

軸圧縮円筒シェルの 弾塑性耐荷力評価法について

ON STRENGTH PREDICTIONS OF COMPRESSED
CYLINDRICAL SHELLS IN ELASTO-PLASTIC RANGE

渡辺英一* 勇秀憲** 京極靖司***

By Eiichi WATANABE*, Hidenori ISAMI** and Yasuji KYOUGOKU***

Proposed herein are two procedures for predicting the strength of compressed cylindrical shells on the basis of so-called nonlinear bifurcation theory: one is a direct approach making use of the pathological curve representing the stability limit for the elasto-plastic behaviors near the elasto-plastic buckling point, and another is a unified approach making use of the pathological curve associated with the plastic failure mechanism but near the equivalent bifurcation point.

Several numerical demonstrations are provided to give the imperfection sensitivity curves, and the ultimate strength curves as the reasonable lower limit of several experimental data, yet showing good correlation with the DAST and ECCS design curves.

1. まえがき

今日、円筒シェル構造は、海洋構造物、原子力発電所、パイプラインや石油貯蔵タンク等の数多くの土木構造物に、幅広く使用されている。これらの円筒シェル構造は、独立にあるいは静水圧やねじりを伴って軸圧縮力を受けることがしばしば見られる。一般的に、圧縮シェル構造は、かなり小さな初期不整に対しても非常に敏感であり、その耐荷力が大きく低下し、容易に全体的な崩壊に至ることはよく知られている。したがって、軸圧縮円筒シェルの安定性と強度に関する研究は、非常に重要である。

円筒シェルの強度に関する研究は、19世紀の後半に始められた[1]。Lorenz、von KármánやFlügeは、それぞれ軸圧縮力、一様外圧およびそれらの組合せを受ける円筒シェルの座屈荷重を求めた[2]。Donnellは、ねじりを受けるシェルの釣り合いの基礎方程式を導いた[3]。しかし、こうした解析的な研究結果とFlüge、Donnellらの対応する実験結果にはかなりの矛盾が見られた[4]。たとえばvon KármánやTsienらは、いわゆる「初期不整の敏感性」によりこうした矛盾を明確に説明しようとした[5]。さらにDonnellやWanは、圧縮円筒シェルの後座屈と一般的な釣り合い径路を求めた[6]。

Koiterは、弾性安定論に基づきポテンシャルエネルギーにより、シェルの安定性と初期不整の敏感性について論じ[7]、軸対称な初期たわみを持つ圧縮円筒シェルの初期不整の敏感性曲線を解析した[8]。また、

* Ph.D. & 工博 京都大学助教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** 工博 高知高専助教授 土木工学科 (〒783 高知県南国市物部乙200番1)

*** 京都大学大学院工学研究科土木工学専攻修士課程学生 (〒606 京都市左京区吉田本町)

ArboczやBabcockは、多くの実験データから初期たわみモードと座屈変形モードの関係を調べた[9]。同様に、Hutchinson、HansenやCrollは、軸圧縮円筒シェルの初期不整の敏感性に注目した[10-12]。一方、シェル構造の非弾性強度に関する研究は、Batterman、HutchinsonやCrollらによって厳密になされてきた[13-15]。Vandepitte、RatheやBorncheuerは、弾性および弾塑性域において ECCS曲線を与える多くの実験結果をまとめた。

シェル構造の多くは、一般に弾塑性域で崩壊するように設計されており、その非弾性強度を評価するには、材料的・幾何学的非線形数値計算法が通常使われている。しかしながら、こうした解法は、演算が複雑で計算も膨大になり、得られる強度は、与えられた材料的・幾何学的パラメータに関し孤立した形で求められるにすぎない。

本論文は、軸圧縮円筒シェルの弾塑性強度を推定するために、残留応力を考慮した統一的评价法を提案するものである。弾塑性強度が、初期不整の敏感性曲線という統一的な形で示される[18-22]。

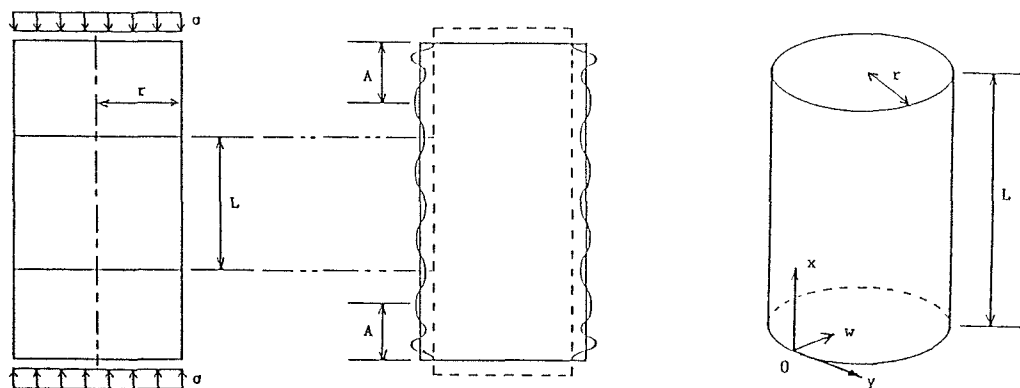
2. 弾塑性強度評価法

(1) 弾塑性座屈強度

図-1に示す軸圧縮を受ける長さ L の円筒シェルモデルを考える。材料はすべて完全弾塑性体と仮定する。モデルは軸方向に沿って溶接されており、残留応力の分布はその方向に様であると仮定する。初期自己釣り合い条件を満たす円周方向の残留応力の分布は、図-2に示すように放物線、三角形あるいは台形のいずれかであり（半円周分を図に示す）、その最大圧縮残留応力の大きさを σ_r とする。このとき、接線係数 E_t 、割線係数 E_s 、平均軸応力 σ および平均軸ひずみ ϵ の関係は、

$$\sigma = \sigma(k), \quad \epsilon = \epsilon(k), \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = kE, \quad \text{and} \quad E_s = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1)$$

ここに、与えられた弾性係数 E と降伏応力 σ_y に対し、応力 σ とひずみ ϵ はともに係数 k の関数である。この k は、シェルモデルの弾性域の断面積と全断面積の比を示し、接線係数 E_t と弾性係数 E との比を示す。



A : 端部拘束の影響を受ける領域

図-1 軸圧縮円筒シェルモデル

また、面外たわみは W は、図-1の座標系を使って弾性・弾塑性域の両方で非対称モードと軸対称モードの連成を考慮して仮定した[8, 9]：

$$W = w_1 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n y}{r} + w_2 \cos \frac{l\pi x}{L} \quad (2)$$

ここに、 r 、 w_1 および w_2 は、それぞれシェルの半径、非対称モード及び軸対称モードの大きさを示す。さらに、対応する初期面外たわみの大きさは、それぞれ W_0 、 w_{01} および w_{02} とする。

円筒シェルの釣り合い方程式は、割線係数 E_s とBleich係数 τ により修正されたDonnellの基礎方程式から求められる[18, 20, 22, 23]：

$$\begin{aligned} \nabla^4 F + E_s t \left(\frac{1}{r} W_{,xx} + W_{,xx} W_{,yy} - W_{,xy}^2 + W_{,xx} W_{o,yy} - 2 W_{,xy} W_{o,xy} + W_{,yy} W_{o,xx} \right) &= 0 \\ D \nabla_p^4 W - \left[\frac{1}{r} F_{,xx} + F_{,xx} (W + W_o)_{,yy} - 2 F_{,xy} (W + W_o)_{,xy} + F_{,yy} (W + W_o)_{,xx} \right] &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

ここに、 F はAiryの応力関数で、

$$\begin{aligned} \nabla^4 &= (\nabla^2)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2, \quad \nabla_p^4 = (\nabla_p^2)^2 = \left(\sqrt{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \\ \tau &= \frac{E_t}{E}, \quad W_{,xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad W_{,xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad W_{,yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad t : \text{shell-thickness}. \end{aligned}$$

W_0 を零とおき式(3)に式(2)の W を代入し、Galerkin法を適用すると、弾塑性座屈応力が得られる：非対称モードおよび軸対称モードに対する弾塑性座屈応力 σ_{cr1} および σ_{cr2} は、それぞれ独立して求めることができ、

$$\tilde{\sigma}_{cr1} = f_1^c \tilde{\sigma}_E \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma}_{cr2} = f_2^c \tilde{\sigma}_E \quad (4)$$

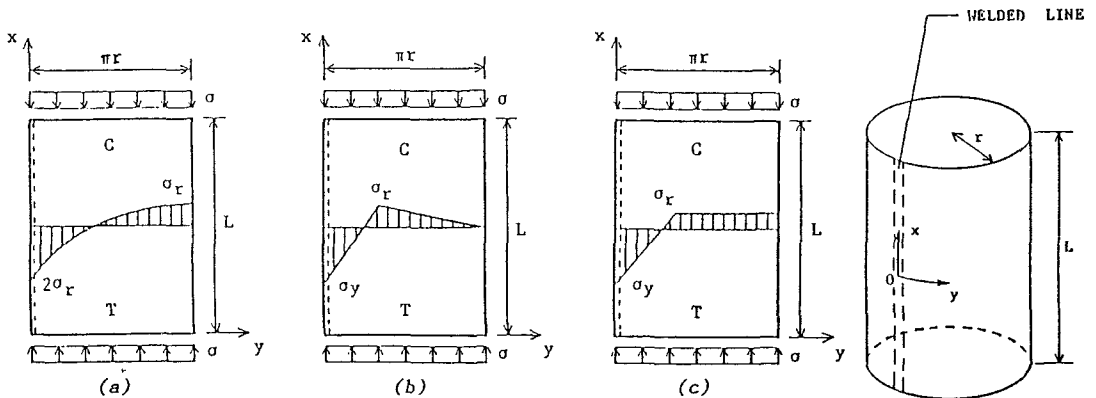


図-2 円周方向の残留応力分布
(a) 放物線 (b) 三角形 (c) 台形

ここに、 $\gamma_{cr1} = \frac{\sigma_{cr1}}{\sigma_Y}$, $\gamma_{cr2} = \frac{\sigma_{cr2}}{\sigma_Y}$, $\gamma_E = \frac{\sigma_E}{\sigma_Y} = \frac{1}{R^2}$, $\sigma_E = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{r}$,

$$R = \sqrt{\frac{r}{t} \frac{\sigma_Y}{E} \sqrt{3(1-\nu^2)}} , \quad f_1^C = \beta f_2^C , \quad f_2^C = \sqrt{\frac{k^C E_S}{E}} , \quad \text{and} \quad \beta = \frac{\sigma_{cr1}}{\sigma_{cr2}} = \frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{k^C} + 1)^2}{8 k^C} .$$

σ_E と R はそれぞれ圧縮円筒シェルの弾性座屈応力と一般化半径-板厚比である。弾塑性座屈応力 σ_{cr} におよぼす残留応力の影響を考慮するために、ここではBleich係数 ν は式(1)の係数 k に等しくとられる。このとき、 k° と f° はともに弾塑性座屈点で評価された値であり、特に f° は弾塑性座屈応力と Euler応力の比を与える。ただし、 $0 < k^\circ \leq 1$ だから $\beta \geq 1$ である。本論文では、最小の弾塑性座屈応力 σ_{cr} は非対称モード w_1 との連成を考慮して軸対称モード w_2 に対応する σ_{cr2} が用いられる。もちろん純弾性域 $\beta = 1$ つまり $k^\circ = 1$ では式(4)の σ_{cr2} はちょうど σ_{cr1} に等しい。なお、非対称モードと軸対称モードの連成を考慮すると、当該の座屈モードは、次の関係を満足する：

$$\left(\frac{\lambda \pi}{L}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3(1-\nu^2)}}{k^C t r} \sqrt{\frac{E_S}{E}} \quad \text{and} \quad \left(\frac{\lambda \pi}{L}\right) = 2\left(\frac{m \pi}{L}\right) = 2\left(\frac{n}{r}\right) \quad (5)$$

(2) 弾性擬似ポテンシャルエネルギー

円筒シェルの弾塑性釣合い径路は、式(2)の弾塑性座屈モードを式(3)の釣合い方程式に代入することにより得られる：

$$\frac{1}{8}(\beta - \lambda)x - \frac{1}{8}\lambda \epsilon_1 + 2\alpha_S xy = 0 \quad (6a)$$

$$(1 - \lambda)y - \lambda \epsilon_2 + \alpha_S x^2 = 0 \quad (6b)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{\sigma}{\sigma_{cr}} , \quad \sigma_{cr} = \sigma_{cr2} , \quad \alpha_S = \frac{3\sqrt{3(1-\nu^2)}}{32\sqrt{k^C}} \sqrt{\frac{E_S}{E}} ,$$

$$x = \frac{w_1}{t} , \quad \epsilon_1 = \frac{w_{o1}}{t} , \quad y = \frac{w_2}{t} , \quad \text{and} \quad \epsilon_2 = \frac{w_{o2}}{t}$$

したがって、弾性擬似ポテンシャルエネルギー A は、弾塑性座屈点の近くで A の1回微分が釣合い方程式(6)を与えるように定義される：

$$A = \frac{1}{16}(\beta - \lambda)x^2 - \frac{1}{8}\lambda \epsilon_1 x + \frac{1}{2}(1 - \lambda)y^2 - \lambda \epsilon_2 y + \alpha_S x^2 y \quad (7)$$

このポテンシャルエネルギーは、モードの3次項までで打ち切られて定義される、これは4次項が省略されているという意味で不完全な「放物的へそ」のカストロフイーである。弾塑性座屈および弾性座屈は、それぞれ近接および完全同時座屈に対応する[24, 26]。

3. 直接強度評価法（評価法Ⅰ）

(1) 弾塑性耐荷力

ここで最初に提案する方法は、弾塑性座屈点の近傍で弾性擬似ポテンシャルエネルギー A の安定性限界を直接評価するものである。圧縮円筒シェルの弾塑性安定性限界は、弾性擬似ポテンシャルエネルギー(7)の

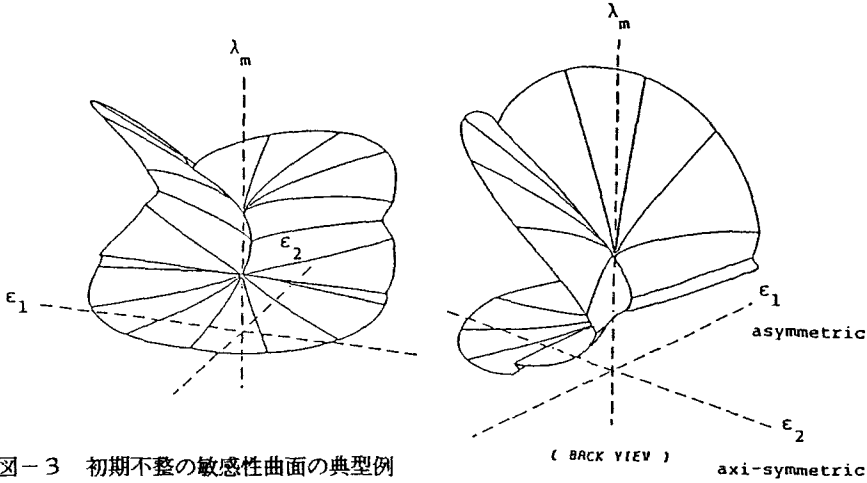


図-3 初期不整の敏感性曲面の典型例

(評価法Ⅰ、放物的へそ)

ヘッシアン行列の特異条件から直接得られる[24, 27]。式(6)の釣り合い式とヘッシアン行列式を零にすると、弾塑性耐荷力公式 λ_m が「弾塑性座屈点」近傍の初期不整の敏感性曲面として求められる：

$$\frac{16}{3\sqrt{6}\alpha_s} \left[2\alpha_s \lambda_m \varepsilon_2 + \frac{1}{8} (1 - \lambda_m)(\beta - \lambda_m) \right]^{\frac{3}{2}} = \lambda_m (1 - \lambda_m) \varepsilon_1 \quad (8)$$

図-3は典型的な敏感性曲面である。純弾性域で特に $\varepsilon_1 = 0$ のとき、式(8)は圧縮円筒シェルにおける有限・軸対称初期たわみのみを考慮したKoiterの敏感性曲線に完全に一致する[8]。

(2) 等価初期不整

柱、梁、圧縮板や圧縮補剛板の場合と同じように、「等価初期たわみ」の概念が導入される[18-22]：

$$\varepsilon_i^* = \mu(R) \varepsilon_i \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

ここに、

$$\mu(R) = \mu_c \left(\frac{R}{p} \right)^{\beta^*}, \quad \mu_c = 1, \quad \text{and} \quad \beta^* = 2 \left(1 - \frac{R}{p} \right)$$

ε_i^* と ε_i はともにシェルの板厚 t で無次元化された等価初期たわみと元の初期たわみである。 R は弾塑性座屈から弾性座屈に至るときの一般化半径-板厚比 R の遷移値である。またこの $\mu(R)$ の形は、数多くの実験結果、DAST や ECCS設計強度曲線を考慮して定められる。結局、圧縮円筒シェルの耐荷力つまり初期不整の敏感性は、等価初期不整(9)を使って式(8)より直接求められる。

4. 統一的強度評価法(評価法Ⅱ)

(1) 弾塑性後座屈経路と塑性崩壊機構

評価法Ⅰでは弾塑性耐荷力に及ぼす塑性崩壊機構の影響を考慮することができないので、ここでその影響を考慮したもう1つの評価法Ⅱを提案する。この場合、「等価分岐点」近傍の初期不整の敏感性曲線から耐荷力が得られる。等価分岐点は、図-4の弾塑性後座屈経路と図-5の塑性崩壊機構曲面との交点で定義できる[18-22]。

本論文では、軸圧縮円筒シェルの崩壊機構曲面として次の独立した2つを考える（図-4）：1つは軸対称モードに対応する「リング」タイプ Srであり、もう1つは非対称モードに対応する「ダイヤモンド」タイプ Sdである。このとき、面外たわみと平均軸圧縮応力の間の関係は、[18]

$$\tilde{w} = A_p \frac{1 - \tilde{\sigma}^2}{\tilde{\sigma}} \quad (10)$$

ここに、

$$\tilde{w} = \frac{w}{t}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_Y} \quad \text{および} \quad A_p = \frac{3}{4} \text{ (ダイヤモンド) あるいは } A_p = \frac{1}{4} \text{ (リング)}$$

(2) 弾塑性耐荷力

塑性崩壊機構曲面は、図-4のSrとSdのように2つのモードごとに独立に取り扱うものとし、また弾塑性後座屈経路は、図-5のように軸対称モードと非対称モードの2つの連成を考慮に入れるものとする。したがって、弾塑性耐荷力は「等価分岐点」C ($\tilde{w}_1^*, \tilde{w}_2^*, \tilde{\sigma}^*$) 近傍で軸対称および非対称の2つの独立した初期たわみモードに対しいわゆる初期不整の敏感性曲線の形で求められる：

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}^*} = 1 + \alpha^* \tilde{w}_{oi} - \sqrt{2 \alpha^* \tilde{w}_{oi} \left(1 + \frac{1}{2} \alpha^* \tilde{w}_{oi} \right)} \quad (i=1,2) \quad (11)$$

ここに、 $\tilde{\sigma}^*$ は等価分岐点での平均圧縮応力を降伏応力で無次元化した値で、次の多項式の実根である。ダイヤモンド崩壊機構（式(10)で $A_p = 3/4$ ）に対し

$$(1 - 4c_1) \tilde{\sigma}^{*2} - \tilde{\sigma}_{cr2} \tilde{\sigma}^* + 4c_1 = 0 \quad (12a)$$

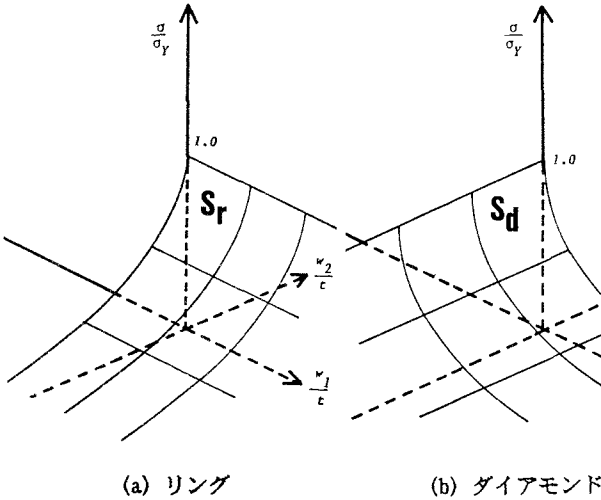


図-4 塑性崩壊機構曲面

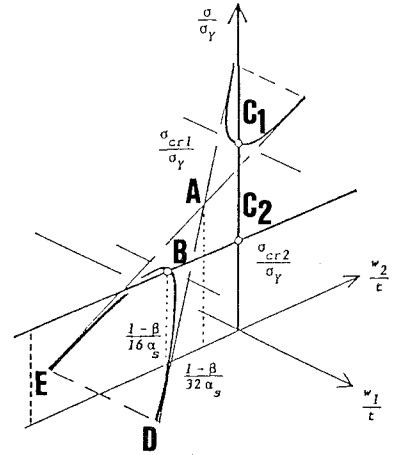


図-5 弾塑性後座屈経路
(非対称モード+軸対称モード)

またリング崩壊機構（式(10)で $A_0 = 1/4$ ）に対し

$$(9c_1^2 - 1)\tilde{\sigma}^{*4} + (\tilde{\sigma}_{cr1} + \tilde{\sigma}_{cr2})\tilde{\sigma}^{*3} - (18c_1^2 + \tilde{\sigma}_{cr1}\tilde{\sigma}_{cr2})\tilde{\sigma}^{*2} + 9c_1^2 = 0 \quad (12b)$$

ここに、

$$c_1 = \tilde{\sigma}_E \frac{3\sqrt{3(1-\nu^2)}}{32} \frac{E_s}{E}$$

さらに、係数 α^* は等価分岐点における各崩壊機構曲面の勾配から近似的に決定される：ダイヤモンドに対して w_1 方向 ($\tilde{w}_2 = \tilde{w}_2^*$) の勾配、リングに対して w_2 方向 ($\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1^*$) の勾配を用いる。

$$\alpha^* = - \frac{1}{\tilde{\sigma}^*} \frac{d\tilde{\sigma}}{d\tilde{w}} \bigg|_{(\tilde{w}_1^*, \tilde{w}_2^*, \tilde{\sigma}^*)} = \frac{\tilde{\sigma}^*}{A_p (1 + \tilde{\sigma}^{*2})} \quad (13)$$

5. 数値計算例

軸圧縮円筒シェルの弾塑性耐荷力に関し、2、3の数値計算が行われる。円周方向の残留応力の分布形状は、図-2(a)の放物線分布を仮定する。なお、最大圧縮残留応力の大きさは、危険側として $\sigma_r = 0.4\sigma_y$ とする。さらに、面外初期たわみの大きさは、軸対称および非対称の両方に対し ECCSの制限値である $\ell_r/100$ (ℓ_r はゲージ長で $\ell_r = 4\sqrt{rt}$) を仮定するものとする[25]。

$$\epsilon_i = \frac{w_{oi}}{t} = \frac{w_{oi}}{\ell_r} \frac{\ell_r}{t} = 0.04 \sqrt{\frac{r}{t}} \quad (14)$$

図-6は、軸対称初期たわみに対し得られた耐荷力曲線である。ここに、評価法Ⅱでは軸対称モードに対応してリング崩壊機構だけを考慮している。図中にはいくつかの実験結果、DAST と ECCSの設計曲線が同時に描かれている[16, 17, 25]。また図-7は、与えられた一般化半径-板厚比 $R = 0.516, 0.807, 1.291$ および 1.504 に対し評価法Ⅰと評価法Ⅱ（リング崩壊機構）による初期不整の敏感性曲線を比較したものである。縦軸は降伏応力で無次元化された耐荷力で、横軸は定数により無次元化された初期たわみである。横軸の 0.04 という値は、ちょうど ECCSの制限値に対応する。

図-6と7より、 R の値に関係なく、評価法Ⅱの結果は一般的に評価法Ⅰの結果より安全側を与え、また DAST や ECCSの設計曲線によく相関していることが示される。比較的小さな初期たわみに対しては、 R が遷移値 R_c に近づくにつれて、初期不整の敏感性は顕著になる。さらに、2つの評価法の違いは R が大きくなるにつれて、ほとんどなくなる。また、図-8は台形の残留応力分布の場合に図-6と同様の条件で得られた耐荷力曲線である。三角形の残留応力分布に対してもほぼ同様の結果が求められる。

一方、図-9は非対称初期たわみに対し得られた耐荷力曲線である。ここに、評価法Ⅱでは非対称モードに対応してダイヤモンド崩壊機構だけを考慮している。図中にはいくつかの実験結果、DAST と ECCSの設計曲線も示されている。 $R > 0.58$ では、評価法Ⅱの結果は存在しない。これは、図-5の弾塑性後座屈経路、たとえば分岐 EBD の角度は式(6)より係数 k° 、つまり R の関数であり、 $R > 0.58$ では経路 BD と図-4のダイヤモンド崩壊機構曲面 Sd とが交点を持たないからである。さらにリングとダイヤモンドの複合した崩壊機構を考えれば、 $R > 0.58$ でも連続した耐荷力曲線が求められるに違いない。また、この場合も R が大きくなるにつれて2つの評価法の相違はほとんどなくなる。したがって、耐荷力は、評価法Ⅱの曲線上の $R = 0.58$ 付近から評価法Ⅰの曲線上の $R = 1$ 付近の中間的な R の点を連結する曲線により求められよう。また、図-10は与えられた一般化半径-板厚比 $R = 0.516, 0.807, 1.291$ および 1.504 に対し評価法Ⅰと評価法Ⅱ（ダイヤモンド崩壊機構）による初期不整の敏感性曲線を比較したものである。図-7と同様に、 $R <$

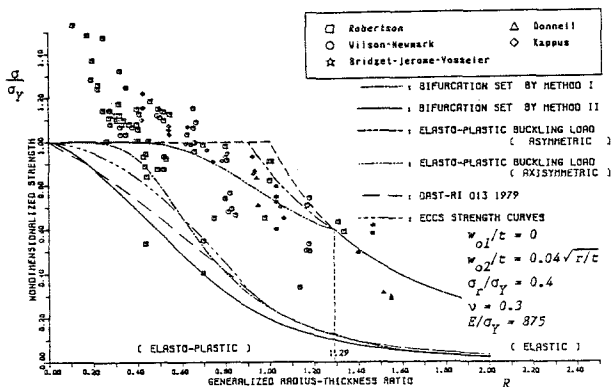


図-6 軸対称初期たわみに対する耐荷力曲線
(放物線残留応力分布)

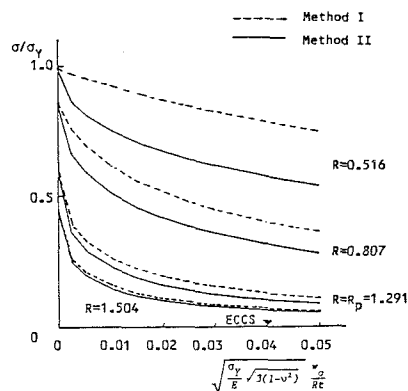


図-7 初期不整の敏感性曲線の比較
(軸対称初期たわみ)

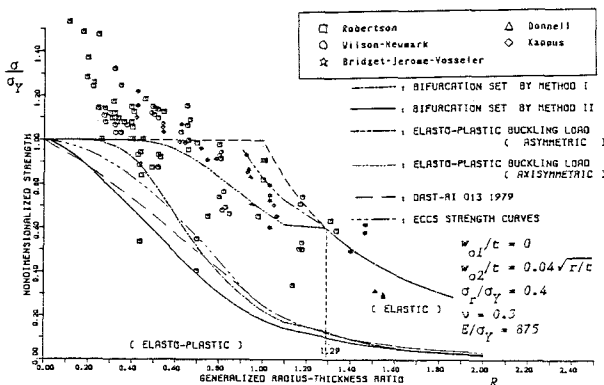


図-8 軸対称初期たわみに対する耐荷力曲線
(台形残留応力分布)

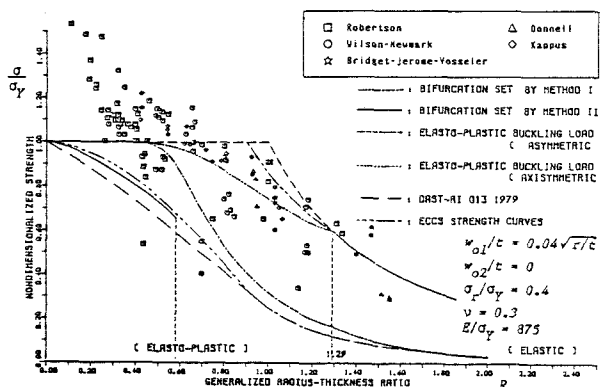


図-9 非対称初期たわみに対する耐荷力曲線
(放物線残留応力分布)

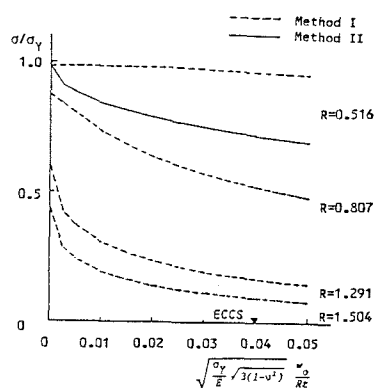


図-10 初期不整の敏感性曲線の比較
(非対称初期たわみ)

0.58では評価法Ⅱの結果は評価法Ⅰの結果より安全側を与える。さらに、三角形や台形の残留応力分布に関しても図－9と同様の耐荷力曲線が得られる。

結局、図－6、8や9より、仮定した円周方向の残留応力分布の形状は、得られる耐荷力曲線に重大な影響を及ぼさないことが示された。さらに、図－7と10を考慮に入れると、初期たわみの大きさがECCS制限値内にあるときには、リング塑性崩壊機構を使った評価法Ⅱから予測される圧縮円筒シェルの耐荷力が、広範囲な一般化半径－板厚比に対してもっとも安全側にあることが分かる。

さて、最大残留応力の大きさ σ_r は、特に弾塑性座屈応力 σ_{cr1} 、 σ_{cr2} や遷移一般化－半径板厚比 R_p 等に影響を及ぼす。例えば、 σ_r を大きくすると R_p も大きくなり、 σ_{cr1} 、 σ_{cr2} は小さくなる。

6. 結論と謝辞

- (1) 圧縮円筒シェルの弾塑性耐荷力を推定するための2つの評価法が提案された：評価法Ⅰは、弾塑性分岐点の近くでの弾塑性挙動から、安定性限界曲線の勾配を使った直接的なアプローチであり、また評価法Ⅱは、等価分岐点での塑性崩壊機構曲面の勾配を使った統一的アプローチである。
- (2) 初期たわみは、いくつかの実験データやDAST・ECCS設計曲線によりよく相関するように「等価初期たわみ」に修正され、置き換えられた。
- (3) 弾塑性座屈は、軸対称モードと正方形非対称モードで隣接同時座屈として起こる。特に純弾性域では評価法Ⅰは完全な同時座屈を与え、軸対称初期たわみモードに対する初期不整の敏感性曲線はKoiterの結果と完全に一致した。
- (4) 円周方向の残留応力分布形状は、得られる耐荷力曲線にほとんど大きな影響を及ぼさない。
- (5) 初期たわみの大きさがECCS制限値内にあるときには、リング塑性崩壊機構を使った評価法Ⅱから予測される圧縮円筒シェルの耐荷力が、広範囲な一般化半径－板厚比に対してもっとも安全側にあることがわかった。この耐荷力が軸圧縮円筒シェルの簡単で有用な基礎耐荷力曲線を与えてくれよう。

本論文を取りまとめるにあたり、常に暖かい御指導と有益な御意見・御助言を頂きました福井工業高等専門学校長（前京都大学教授）丹羽義次先生に、感謝し御礼申し上げます。

参考文献

- 1) Brush,D.O. and B.O.Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells. McGraw-Hill, 1975.
- 2) Flüge,W., Die Stabilität der Kreiszyinderschade, Ing-Arch, 3, pp. 463-506, 1932.
- 3) Donnell,L.H., Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion. NACA Report No. 479, 1933.
- 4) Donnell,L.H., A new theory for the buckling of thin cylindrical shells under axial compression and bending. Trans. ASME, 56, pp. 795-806, 1934.
- 5) von Karman,Th. and H.-S.Tsien, The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. Aero. Sci., 8, pp. 303-312, 1941.
- 6) Donnell,L.H. and C.C.Wan, Effects of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression. J. Applied Mech., 17, pp. 73-83, 1950.
- 7) Koiter,W.T., On the Stability of Elastic Equilibrium. Thesis, Delft, 1945 (English translation from French), NASA Technical Trans., F10, 833, 1967.
- 8) Koiter,W.T., The Effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression. Proc. Konik. Neder. Akad. Waten., Ser. B, 66, pp. 265-279, 1963.
- 9) Arbocz,J. and C.D.Babcock, The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells. J. Applied Mech., 36, pp. 28-38, 1969.
- 10) Hutchinson,J.W., R.C.Tennyson and D.B.Muggeridge, Effect of a local axisymmetric imperfection on the buckling behavior of a circular cylindrical shell under axial compression. AIAA J., 9, pp. 48-52, 1971.
- 11) Hansen,J.S., Influence of general imperfections in axially loaded cylindrical shells. Int. J. Solids Struct., 11, pp. 1223-1233, 1975.
- 12) Croll,J.G.A. and R.C.Batista, Explicit lower bounds for the buckling axially loaded cylinders. Int. J. Mech. Sci., 23, pp. 331-343, 1981.
- 13) Batterman,S.C., Plastic buckling of axially compressed shells. AIAA J., 3, pp. 316-325, 1965.
- 14) Hutchinson,J.W., Plastic Buckling. Advances in Applied Mechanics, 14, Academic Press, pp. 67- 144, 1974.
- 15) Croll,J.G.A., Elasto-plastic buckling of pressure and axial loaded cylinders. Proc. Instn Civil Engrs., Part 2, 73, pp. 633-652, 1982.
- 16) Vandepitte,D. and J.Rathe, Buckling of circular cylindrical shells under axial load in the elastic-plastic region. Der Stahlbau, 49, pp. 369-373, 1980.
- 17) Bornscheuer,F.W., Plastisches beulen von kreiszyinderschalen unter axialbelastung. Der Stahlbau, 50, pp. 257-262, 1981.
- 18) Niwa,Y., E.Watanabe and H.Isami, A unified approach to predict the strength of steel structures. Theoretical and Applied Mechanics, 34, pp. 265-273, 1985.
- 19) Niwa,Y., E.Watanabe and H.Isami, A new approach to predict the strength of steel columns. Proc. JSCE, 341, pp. 13-21, 1984.
- 20) Niwa,Y., E.Watanabe, H.Isami and Y. Fukumori, A new approach to predict the strength of compressed steel plates. Proc. JSCE, 341, pp. 23-31, 1984.
- 21) Niwa,Y., E.Watanabe and S.Suzuki, A new approach to the elasto-plastic lateral buckling strength of beams. Proc. JSCE, Struct. Eng./Earthq. Eng., 1, pp. 41s-49s, 1984.
- 22) Niwa,Y., E.Watanabe and H.Isami, A new approach to predict the strength of compressed steel stiffened plates. Proc. JSCE, Struct. Eng./Earthq. Eng., 2, pp. 281s-290s, 1985.
- 23) Bleich,F., Buckling of Metal Structures. McGraw-Hill, 1952.
- 24) Thom,R., Structural Stability and Morphogenesis. Benjamin, 1975.
- 25) ECCS, European Recommendations for Steel Construction: Buckling of Shells, 2nd Edition. Publication No. 29, 1983.
- 26) Thompson,J.M.T. and G.W.Hunt, Elastic Instability Phenomena. John Wiley & Sons, 1984.
- 27) Noguchi,H., Catastrophes. Science Library, Mathematics in Scientific Engineering, 13, Saiensu-Sha, 1977 (in Japanese).

(1986年10月17日受付)