

曲げおよび曲げねじれに伴うせん断ひずみの 横座屈荷重へ及ぼす効果

EFFECTS OF SHEAR STRAINS DUE TO BENDING AND WARPING
COUPLES ON LATERAL-TORSIONAL BUCKLING

長谷部 薫*, 堀江 保**, 薄木 征三***

By Kaoru HASEBE, Yasushi HORIE and Seizou USUKI

A new non-linear displacement and strain distributions considering the shear strains due to bending and warping couples are presented in the elastic domain. Applying the high order theory obtained to I-beams bent about their major axes by equal end moments, the effects of shear strains as well as pre-buckling deflections on lateral-torsional buckling are investigated. A closed solution of lateral-torsional buckling moment is presented and this gives a less conservative critical bending moment comparing with that considering only the effects of pre-buckling deflections but neglecting the effects of shear strains. In the case of I-beams having wide flanges, the present solution gives conservative critical moments compared with the Timoshenko's classical solutions, when the beams have slender profiles, but gives less conservative those, when the beams have short profiles. The present study will contribute to the lateral-torsional instability of thin walled members composed with the materials which have high elastic limits and have low ductility.

1. まえがき

圧縮柱の曲げ座屈に及ぼすせん断ひずみの効果は、柱断面は座屈後も平面を保持するとする仮定、言い換えればせん断ひずみの断面内での一様な分布を仮定する Timoshenko¹⁾ ばりにおいて研究されている。しかしながらこの理論を曲げおよび曲げねじれの連成する横座屈へ拡張展開することは、この理論が幾何学的直感に基礎を置いているが為にならずしも容易でない。一方 Trahair²⁾ と西野³⁾ は、座屈以前の等曲げによるはり軸線の曲率の変化を考慮した横座屈モーメントを二軸対称断面に対して、閉じた解で与えた。これらの研究では、St.Venant のねじれによるせん断ひずみは考慮されているが、幅広フランジの I 形ばりなどでは無視できないと考えられる、弱軸まわりの曲げおよび曲げねじれ、すなわちはり断面に生ずるはり軸方向の直応力のはり軸方向への変化に伴うせん断応力によるせん断ひずみは依然として無視されている。鋼など現実に普遍的に使用されている土木材料では、せん断ひずみが問題となるのは部材長が短い、あるいは上述のように幅広断面であるような場合であるがゆえに、弾塑性域の問題となることが多い。逆に延展性には乏しいが、弾性限が鋼よりも大きい材料であると、弾性域でもせん断ひずみの横座屈への効果は無視できない。

本報告は、従来横座屈問題において用いられてきた非線形の変位場を第 1 近似として、応力のつり合い

* 工修 秋田大学助手 鉦山学部土木工学科 (〒010 秋田市手形学園町 1-1)

** 工修 秋田高専講師 土木工学科 (〒011 秋田市飯島文京町 1-1)

*** 工博 秋田大学教授 鉦山学部土木工学科 (〒010 秋田市手形学園町 1-1)

式を満たすべく変位場を修正し、この変位場と得られるひずみ場を基に、一軸対称断面ばりの横座屈モーメントを求める。この解は座屈以前のばり軸線の曲率の変化も包含しており、これを含めて座屈モーメントの低下を調べる。

2. 既往の研究

座標軸を Fig.1 のように断面内の任意点を原点とする右手系直角座標 (x, y, z) および薄肉中心線に沿う直交曲線座標 (s, n, z) を採用する。

ラグランジェ表示のひずみ-変位関係において、薄肉ばりの仮定を満たす変位場は、その原形は St.Venant や Dabrowski⁴⁾ によって与えられている。西野ら³⁾ は開き及び閉じ断面ばりを統一した有限変位場とひずみ場を提示し、座屈前のばり軸線の曲げによるたわみを考慮した横座屈モーメントの 1 つの解を与えている。

西野らの有限変位場において、一軸 (x 軸) 対称断面の場合は、次のようである。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (x - x_s)(\cos\varphi - 1) - y\sin\varphi \\ v &= v_s + (x - x_s)\sin\varphi + y(\cos\varphi - 1) \\ w &= w_0 - x(v'_s\sin\varphi + u'_s\cos\varphi) \\ &\quad - y(-u'_s\sin\varphi + v'_s\cos\varphi) - \omega\varphi' \end{aligned} \right\} \quad (1.a-c)$$

ここで、 x_s はねじれ中心 s の x 座標、 u_s 、 v_s はねじれ中心 s の x 、 y 方向変位、 φ は断面のねじれ角である。また変位 w_0 は原点 0 の部材軸方向変位であり、上指標 $'$ は d/dz を表す。

式(1)に対応するひずみ成分は、2 個のみであって直ひずみ ϵ_z および薄肉中心面に平行な面内でのせん断ひずみ γ_{sz} は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z &= w'_0 + \frac{1}{2}(u_s'^2 + v_s'^2) + \frac{1}{2}\{(x - x_s)^2 + y^2\}\varphi'^2 - x(v_s''\sin\varphi + u_s''\cos\varphi) \\ &\quad - y(-u_s''\sin\varphi + v_s''\cos\varphi) - \omega\varphi'' + x_s(u_s'\sin\varphi - v_s'\cos\varphi)\varphi' \\ \gamma_{sz} &= \theta\varphi' \end{aligned} \right\} \quad (2.a,b)$$

ここで例えば開き断面では $\theta = 2n$ で与えられる、1 つの座標である。

以上の変位場とひずみ場は、せん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定を基礎として導かれたものであり、したがって式(2.b)のせん断ひずみの表式のように、サン・ブナン(St.Venant)のねじれによるせん断ひずみだけが考慮された結果となっている。

曲げや曲げねじれによるせん断遅れは、直応力 σ_z とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみに起因するものである。それ故、上述の変位場とひずみ場によっては、座屈荷重へ及ぼす St.Venant のねじれによるせん断ひずみ以外のせん断ひずみの効果は算定できないのである。

以下では、上述の変位場とひずみ場を第 1 近似として、直応力に起因するせん断ひずみを考慮し得る、より高次の変位場とひずみ場を求める。

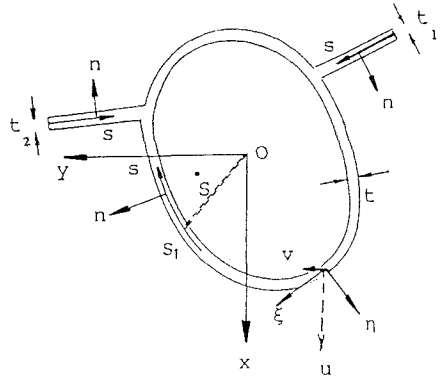


Fig.1 Coordinate systems

3. 修正変位場

始めに、横断面形不変の仮定($\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$)と薄肉の仮定($\gamma_{nz} = 0$)は、修正変位場を求める場合にも保持されるので、これらの仮定をラグランジェのひずみ-変位関係に適用して得られる、普遍的に成立する諸関係を整理しておく。

部材軸方向変位 $w(s, n, z)$ は、 $\gamma_{nz} = 0$ を積分して次のように得られる。

$$w = w^* - (x - x^*) (v'_s \sin \varphi + u'_s \cos \varphi) - (y - y^*) (v'_s \cos \varphi - u'_s \sin \varphi) - \gamma_n n \varphi' \quad (3)$$

せん断ひずみ γ_{sz} と直ひずみ ε_z は、

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial w^*}{\partial s} + l (v'_s \sin \varphi + u'_s \cos \varphi) + m (-u'_s \sin \varphi + v'_s \cos \varphi) + (\gamma_s^* + 2n) \varphi' \quad (4.a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} (u_s'^2 + v_s'^2) + \frac{1}{2} \{ (x - x_s)^2 + y^2 \} \varphi'^2 + (x - x_s) (-u'_s \sin \varphi + v'_s \cos \varphi) \varphi' - y (u'_s \cos \varphi + v'_s \sin \varphi) \varphi' \quad (4.b)$$

ここで、 m 、 l は薄肉中心線の接線方向余弦であり、 r_s^* 、 r_n は既往の定義と同一である。これらを含めて式で表すと

$$\left. \begin{aligned} x &= x^* + mn \\ y &= y^* - ln \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} l &= \frac{\partial x^*}{\partial s} \\ m &= \frac{\partial y^*}{\partial s} \end{aligned} \quad (5)$$

$$r_n = -l(x - x_s) - my, \quad r_s = m(x - x_s) - ly \quad (6)$$

記号 $*$ は薄肉中心線上の点に関する量を表しており、 $r_s^* = r_s(x^*, y^*)$ および $r_n^* = r_n$ である。

さて薄肉微小要素の変位した後の部材軸方向の応力のつり合い式は、

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_{sz}^* t) + \sigma_z^* t = 0 \quad (7)$$

ここで、せん断応力と直応力ともに薄肉であることから、薄肉厚さ方向(n 軸方向)へ直線的に変化すると見なせるとする従来の考えを踏襲している。 s 座標の任意点 s_1 でのせん断流を $(\tau_{sz}^* t)_{s=s_1} = q$ とおいて、上式を s について積分すると、

$$\frac{\tau_{sz}^*}{G} = \frac{1}{Gt} \left(q - \int_{s_1}^s (\sigma_z^*)' t ds \right) = \gamma_{sz}^* \quad (8)$$

フックの法則 $\sigma_z^* = E \varepsilon_z^*$ において、直ひずみ ε_z^* として、つり合い式(7)において直応力の変化 σ_z^* を無視することによって得られた式(2.a)の ε_z^* を第 1 近似値として採用する。この時、式(2.a)の右辺の部材軸線の変位 v_s 、 u_s および断面のねじれ角 φ は、これらが第 1 近似値であることを明確にするため次のように書き換える。

$$w_o = W, \quad v_s = V, \quad u_s = U, \quad \varphi = \Phi \quad (9)$$

然る後、式(8)の γ_{sz}^* を、式(4.a)で、 $n = 0$ とおいたものに等置すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w^*}{\partial s} + l (v'_s \sin \varphi + u'_s \cos \varphi) + m (-u'_s \sin \varphi + v'_s \cos \varphi) + r^* \varphi' \\ &= \frac{q}{Gt} - \frac{E}{Gt} s_{z0} [W'' + U'U'' + V'V'' + \{ (U' \sin \Phi - V' \cos \Phi) \Phi' \}' x_s] \end{aligned}$$

$$- \frac{E}{G} \{ s_{xy0} \phi' \phi'' - s_{x0} (V'' \sin \phi + U'' \cos \phi)' - s_{y0} (-U'' \sin \phi + V'' \cos \phi)' - s_{\omega 0} \phi'' \} \quad (10)$$

ここで S_{z0} 、 S_{x0} …… は座標であり、次のようである。

$$\begin{bmatrix} S_{z0} & S_{x0} \\ S_{y0} & S_{\omega 0} \end{bmatrix} = \int_{s_1}^s \begin{bmatrix} 1 & x^* \\ y^* & \omega^* \end{bmatrix} t ds, \quad S_{xy0} = \int_{s_1}^s \{ (x^* - x_s)^2 + y^{*2} \} t ds \quad (11.a, b)$$

これらは、直応力 σ_z とつり合い状態にあるせん断応力を求める際に、従来から定義されていた座標と同一のものである。 $l = \partial x^* / \partial s$ 、 $m = \partial y^* / \partial s$ および、式(5)を用いると方程式(10)の積分が可能となる。また薄肉中心線に沿って断面内で一周積分することにより、せん断流 q を部材軸線の変位で表すことができる。

方程式(10)を積分した際に生ずる 1 個の積分定数は、任意点、 $s = s_1$ から、Fig.1 の (x, y) 座標の原点 0 を板厚 $t = 0$ の仮想の薄板に結ぶことにより³⁾、原点 0 の部材軸方向変位 w_0 にて表される。

以上の操作を行って方程式(10)を w^* について解いた後、これを、式(3)の右辺へ代入することによって、断面内の任意点の軸方向変位が次のように得られる。

$$\begin{aligned} w = w_0 - x(v'_s \sin \phi + u'_s \cos \phi) - y(v'_s \cos \phi - u'_s \sin \phi) - \omega \phi' \\ - \frac{E}{G} B_z [w'' + U'U'' + V'V'' + \{ (U' \sin \phi - V' \cos \phi) \phi' \}' x_s] \\ + \frac{E}{G} \{ -B_{xy} \phi' \phi'' + B_x (V'' \sin \phi + U'' \cos \phi)' + B_y (-U'' \sin \phi + V'' \cos \phi)' + B_\omega \phi'' \} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで B_z 、 B_x 、 B_y は、既に微小変位の場合の精密化薄肉はり理論で定義された座標と同一のものであり⁵⁾、 B_{xy} のみが本理論で新たに導入された座標である。これらを一括して示すと次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} B_z & B_x \\ B_y & B_\omega \end{bmatrix} = \int_{s_1}^s \begin{bmatrix} S_z & S_x \\ S_y & S_\omega \end{bmatrix} \frac{ds}{t}, \quad B_{xy} = \int_{s_1}^s \frac{S_{xy}}{t} ds \quad (13.a, b)$$

および

$$\begin{bmatrix} S_z & S_x \\ S_y & S_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{z0} & S_{x0} \\ S_{y0} & S_{\omega 0} \end{bmatrix} - \frac{1}{\oint \frac{ds}{t}} \oint \begin{bmatrix} S_{z0} & S_{x0} \\ S_{y0} & S_{\omega 0} \end{bmatrix} \frac{ds}{t} \quad (14.a)$$

$$S_{xy} = S_{xy0} - \oint \frac{S_{xy0}}{t} ds / \oint \frac{ds}{t} \quad (14.b)$$

式(14.a, b)で右辺の第 1 項は、式(11.a, b)で定義されている。式(13.a, b)の座標 B_z 、 B_x 、 B_y および B_{xy} が精密化薄肉はり理論の特徴であり、軸方向変位 $w(x, y, z)$ は断面内で複雑な分布を程することになる。そり関数 $\omega(s, n, z)$ は、従来と基本的に同一であり、はり横断面内の任意点の (x, y) 平面内の変位 u 、 v は横断面形不変の仮定から、式(1.a, b)が保持されるのは前述のとおりである。

式(12)を式(4.a, b)に代入することにより、修正されたひずみ成分は次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z = w'_s - x(v''_s \sin \phi + u''_s \cos \phi) - y(v''_s \cos \phi - u''_s \sin \phi) - \omega \phi'' \\ + \frac{1}{2} (u_s'^2 + v_s'^2) + \frac{1}{2} \{ (x - x_s)^2 + y^2 \} \phi'^2 - x_s (-u'_s \sin \phi + v'_s \cos \phi) \phi' \\ - \frac{E}{G} B_z [w'' + U'U'' + V'V'' + \{ (U' \sin \phi - V' \cos \phi) \phi' \}' x_s]' \\ + \frac{E}{G} \{ -B_{xy} \phi' \phi'' + B_x (V'' \sin \phi + U'' \cos \phi)'' + B_y (-U'' \sin \phi + V'' \cos \phi)'' + B_\omega \phi'' \} \end{aligned} \quad (15.a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{sz} = & \theta \varphi' - \frac{E}{G} \frac{S_z}{t} [W'' + U'U'' + V'V'' + \{(U' \sin \phi - V' \cos \phi) \phi'\}' x_s] \\ & + \frac{E}{G} \left\{ -\frac{S_{xy}}{t} \phi' \phi'' + \frac{S_x}{t} (V' \sin \phi + U'' \cos \phi)' + \frac{S_y}{t} (-U'' \sin \phi + V'' \cos \phi)' + \frac{S_\omega}{t} \phi''' \right\} \quad (15.b) \end{aligned}$$

上式(15.a)において、右辺の座標 $B_z, B_x, \dots$ を係数とする各項が直ひずみ、従って直応力の従来のはり理論からの差異を表す項であり、せん断遅れを説明する項である。同様に式(15.b)の右辺において、座標 $S_z, S_x, \dots$ を係数とする項は、直応力 σ_z とつり合い状態にあるせん断応力に起因するせん断ひずみを表している。同様の手順をくり返すとさらに高次の修正変位場が得られるが、線形理論⁵⁾での結果から以上の1回の修正変位場で十分収束しているとみなせる。

4. 横座屈のつり合い式

断面形は Fig.1 の x 軸に関して対称である。今、座屈以前においては、 y 軸まわりの等曲げだけを受けている一軸曲げの状態にあるとし、はりの中間 $0 \leq z \leq l$ には荷重は作用しないとする。したがって座屈以前の状態では、はりは微小変位の状態にあり、しかもせん断遅れ現象は生ぜず、通常のはり理論によって支配される応力と変形状態にある(これらは、厳密には以下の増分理論において座屈以前のはりのつり合い式と境界条件を導き、この解として得られるものである)。

以上より座屈以前の等曲げ状態の解は、上記号 $^\circ$ を付して次式となる。

$$(u_s^\circ)'' = -\frac{M_y^\circ}{EJ_y}, \quad \sigma_z^\circ = \frac{M_y^\circ}{J_y} x, \quad \tau_{sz}^\circ = 0 \quad (16.a-c)$$

および

$$v_s^\circ = \varphi^\circ = u^\circ = v^\circ = \phi^\circ = w^\circ = 0 \quad (17)$$

座屈後の変位を支配する増分形仮想仕事の原理は、はり中間に荷重は作用していないことから次式となる。

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_F (\sigma_z \delta \epsilon_z^L + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz}^L + \sigma_z^\circ \delta \epsilon_z^N + \tau_{sz}^\circ \delta \gamma_{sz}^N) dF dz \\ - \left[\int_F (\bar{\tau}_{xz} \delta u^L + \bar{\tau}_{xz}^\circ \delta u^N + \bar{\tau}_{yz} \delta v^L + \bar{\tau}_{yz}^\circ \delta v^N + \bar{\sigma}_z \delta w^L + \bar{\sigma}_z^\circ \delta w^N) dF \right]_0^L = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

ここで記号 $^\circ$ の付いていない量は増分量であり、記号 $^-$ は、はり端面に作用している表面応力を表す。

直ひずみとせん断ひずみの式(15.a,b)において、上式(16)と(17)を考慮し、 $u_s = u_s^\circ + \Delta u_s$ 、 $v_s = \Delta v_s$ 、 $w_0 = \Delta w_0$ 、 $\varphi = \Delta \varphi$ および $U = \Delta U$ 、 $V = \Delta V$ 、 $W = \Delta W$ 、 $\phi = \Delta \phi$ とおき、増分記号 Δ を省略すれば $\delta \epsilon_z^L$ 、 $\delta \epsilon_z^N$ 、 $\dots$ は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \epsilon_z^L = & w_0' + u_s^\circ u_s' - x u_s'' - y (v_s'' - u_s^\circ \varphi'') - \omega \varphi' + \frac{E}{G} (-B_z W''' + B_x U^{IV} + B_y V^{IV} + B_\omega \varphi^{IV}) \\ \epsilon_z^N = & \frac{1}{2} (u_s'^2 + v_s'^2) + \frac{1}{2} \{ (x - x_s)^2 + y^2 \} \varphi'^2 - x (v_s'' \varphi - \frac{1}{2} u_s^\circ \varphi'^2) + y u_s'' \varphi - x_s (-u_s^\circ \varphi' + v_s^\circ \varphi') \varphi' \\ & - \frac{E}{G} B_z \{ U'U'' + V'V'' - (V'\phi')' x_s \}' + \frac{E}{G} \{ -B_{xy} (\phi' \phi'')' + B_x (V'' \phi)'' + B_y (-U'' \phi)'' \} \quad (19.a, b) \end{aligned}$$

$$\gamma_{sz}^L = \theta \varphi' + \frac{E}{Gt} (-S_z W'' + S_x U''' + S_y V''' + S_\omega \phi''')$$

$$\gamma_{sz}^N = -\frac{E}{G} \frac{S_z}{t} \{ U'U'' + V'V'' + (-V'\phi')' x_s \} + \frac{E}{Gt} \{ -S_{xy} \phi' \phi'' + S_x (V'' \phi)' + S_y (-U'' \phi)' \} \quad (20.a, b)$$

変位増分の線形項 u^L, v^L および2次項 u^N, v^N は式(1.a,b)が保持されるので既往のものと同一である。軸方向変位 w に関する増分形は、式(12)から得られる。これらを一括して表示すれば以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} u^L &= u_s - y\varphi, & v^L &= v_s + (x - x_s)\varphi \\ w^L &= w_s - xu'_s - y(v'_s - u_s'\varphi) - \omega\varphi' + \frac{E}{G}(-B_z W'' + B_x U''' + B_y V''' + B_\omega \phi''') \end{aligned} \right\} \quad (21.a-c)$$

および

$$\left. \begin{aligned} u^N &= \frac{1}{2}(x - x_s)\varphi^2, & v^N &= \frac{1}{2}y\varphi^2 \\ w^N &= -x(v'_s\varphi - \frac{1}{2}u_s'\varphi^2) + yu'_s\varphi - \frac{E}{G}B_z\{U'U'' + V'V'' + (-V'\phi')'x_s\} \\ &\quad + \frac{E}{G}\{-B_{xy}\phi'\phi'' + B_x(V''\phi)' + B_y(-U''\phi)'\} \end{aligned} \right\} \quad (22.a-c)$$

増分形仮想仕事の原理、式(18)に以上の式(19)～(22)を代入して、部分積分を実行すればつり合い式と境界条件を得る。

このとき、 $\delta \varepsilon_z^N$ の項から初期断面力

$$\left[\begin{array}{cc} H_z^\circ & H_x^\circ \\ H_y^\circ & H_\omega^\circ \end{array} \right] = \int_F \frac{E}{G} \sigma_z^\circ \left[\begin{array}{cc} B_z & B_y \\ B_x & B_\omega \end{array} \right] dF, \quad H_{xy}^\circ = \int_F \frac{E}{G} B_{xy} \sigma_z^\circ dF \quad (23.a, b)$$

の座標 z に関する微分が現れる。上式に $\sigma_z^\circ = M_0^\circ x/J_y$ (式(16.b)) を代入すれば、これら初期断面力はすべて座屈以前に断面に作用している曲げモーメント M_0° に比例する形となる。今の場合、前述のように、 $M_0^\circ(z)$ は材端に作用している曲げモーメント $\bar{M}_0^\circ$ に等しく、 $0 \leq z \leq L$ で一定である。したがって上式の初期断面力もはり長さ方向へ一定値となり、例えば $(H_z^\circ)' = (H_z^\circ)'' = \dots = 0$ となる。さらに座屈以前において軸力 N° 、 x 軸まわりの曲げモーメント M_x° も生じていないこと、および仮想仕事の式(18)において部材端で作用しているのは $\bar{\sigma}_z^\circ$ のみであり、これらを式で表すと

$$N^\circ = M_x^\circ = 0 \quad \text{および} \quad \bar{\tau}_{xz}^\circ = \bar{\tau}_{yz}^\circ = 0 \quad (24.a, b)$$

が成り立っている。

以上の事柄を考慮して、仮想仕事の式(18)を部分積分すれば以下の二群のつり合い式と境界条件を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_x'' + (M_y^\circ \varphi)'' &= 0 \\ M_\omega'' + T_s' - M_x u_s'' + (K^\circ \varphi')' - M_y (v_s'' - u_s'' \varphi) &= 0 \\ H_x^{IV} - T_y''' &= 0 \\ H_\omega^{IV} - T_\omega''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25.a-d)$$

$$\left. \begin{aligned} N' &= 0 \\ M_y'' &= 0 \\ H_z''' - T_z'' &= 0 \\ H_y^{IV} - T_x''' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26.a-d)$$

および $z = 0$ と L において

$$\left. \begin{aligned} \delta v_s &= 0 & \text{または} & & M_x' + (M_y^\circ \varphi)' &= \bar{Q}_y \\ \delta v_s' &= 0 & \text{,,} & & M_x + M_y^\circ \varphi &= \bar{M}_y^\circ \varphi \\ \delta \varphi &= 0 & \text{,,} & & M_\omega' + T_s + K^\circ \varphi' &= \bar{T} + \bar{M}_x u_s' - M_y^\circ (v_s' - u_s' \varphi) \\ \delta \varphi' &= 0 & \text{,,} & & M_\omega &= \bar{M}_\omega \end{aligned} \right\} \quad (27.a-d)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta V &= 0 & \text{,,} & & H_X'' - T_Y'' &= 0 \\
 \delta V' &= 0 & \text{,,} & & H_X'' - T_Y' - H_2^0 V'' + H_2^0 \phi'' x_s &= -\bar{H}_2^0 V'' + \bar{H}_2^0 \phi'' x_s \\
 \delta V'' &= 0 & \text{,,} & & H_X' - T_Y + H_2^0 (V' - \phi' x_s) - H_Y^0 \phi' &= \bar{H}_2^0 (V' - \phi' x_s) - \bar{H}_Y^0 \phi' \\
 \delta V''' &= 0 & \text{,,} & & H_X + H_Y^0 \phi &= \bar{H}_Y^0 \phi + \bar{H}_X \\
 \delta \phi &= 0 & \text{,,} & & H_\omega''' - T_\omega'' - H_Y^0 V''' &= -\bar{H}_Y^0 V''' \\
 \delta \phi' &= 0 & \text{,,} & & H_\omega'' - T_\omega' + H_2^0 V'' x_s - H_{XY}^0 \phi'' + H_Y^0 V'' &= \bar{H}_2^0 V'' x_s + \bar{H}_Y^0 V'' - \bar{H}_{XY}^0 \phi'' \\
 \delta \phi'' &= 0 & \text{,,} & & H_\omega' - T_\omega - H_2^0 V' x_s + H_{XY}^0 \phi' &= -\bar{H}_2^0 V' x_s + \bar{H}_{XY}^0 \phi' \\
 \delta \phi''' &= 0 & \text{,,} & & H_\omega &= \bar{H}_\omega
 \end{aligned} \right\} \quad (28.a-b)$$

$$\delta w_0 = 0 \quad \text{または} \quad N = \bar{N}, \quad \delta u_s = 0 \quad \text{または} \quad M_Y' = \bar{Q}_X, \quad \delta u_s' = 0 \quad \text{または} \quad M_Y = \bar{M}_Y \quad (29.a-c)$$

$$\delta W = 0 \quad \text{または} \quad H_Z'' - T_Z' = 0, \quad \delta W' = 0 \quad \text{または} \quad H_Z' - T_Z = 0, \quad \delta W'' = 0 \quad \text{または} \quad H_Z = \bar{H}_Z \quad (30.a-c)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta U &= 0 & \text{または} & & H_Y''' - T_X'' &= 0 \\
 \delta U' &= 0 & \text{,,} & & H_Y'' - T_X' - H_2^0 U'' &= -\bar{H}_2^0 U'' \\
 \delta U'' &= 0 & \text{,,} & & H_Y' - T_X + H_2^0 U' &= \bar{H}_2^0 U' \\
 \delta U''' &= 0 & \text{,,} & & H_Y &= \bar{H}_Y
 \end{aligned} \right\} \quad (31.a-d)$$

以上で新たに定義された断面力増分、 H_z 、 H_x ……は式(23.a,b)で σ_z^0 を増分 σ_z に置き換えたものおよび

$$\begin{bmatrix} T_z & T_x \\ T_y & T_\omega \end{bmatrix} = \int_F \frac{E}{G} \frac{\tau_{sz}}{t} \begin{bmatrix} s_z & s_x \\ s_y & s_\omega \end{bmatrix} dF \quad (32)$$

である。軸力 N 、曲げモーメント M_x 、 M_y および曲げねじれモーメント M_ω と St.Venant のねじれモーメント T_s は、それぞれ従来の慣用の定義に従う断面力増分である。またつり合い式(25.b)で

$$K^0 = \int_F \sigma_z^0 \{ (x - x_s)^2 + y^2 \} dF = 2\beta_y M_y^0 \quad (33)$$

であり、定数 β_y も慣用の定義 $2\beta_y = \int_F \{ (x - x_s)^2 + y^2 \} x dF / J_y$ に従う。

5. 断面力増分-変位増分関係

フックの法則、 $\sigma_z = E \varepsilon_z^L$ および $\tau_{sz} = G \gamma_{sz}^L$ を用いれば、式(23)、(32)の断面力および既往の断面力 N 、 M_x 、 M_y 、 T_s 、 M_ω は以下のようには軸線の変位で表される。

$$\left. \begin{aligned}
 N &= EF (w_0' + u_s^0 u_s') \\
 T_s &= GJ_s \varphi'
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_\omega \\ H_x \\ H_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EJ_x & 0 & E_g K_{xx} & E_g K_{x\omega} \\ 0 & -EJ_\omega & E_g K_{\omega x} & E_g K_{\omega\omega} \\ -E_g K_{xx} & -E_g K_{x\omega} & E_{gg} L_{xx} & E_{gg} L_{x\omega} \\ -E_g K_{\omega x} & -E_g K_{\omega\omega} & E_{gg} L_{\omega x} & E_{gg} L_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_s'' - u_s^0 \varphi' \\ \varphi'' \\ v^{IV} \\ \phi^{IV} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} M_y \\ H_z \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EJ_y & -E_g K_{zy} & E_{gg} K_{yy} \\ -E_g K_{zy} & -E_{gg} L_{zz} & E_{gg} L_{zy} \\ -E_g K_{yy} & -E_{gg} L_{zy} & E_{gg} L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s'' \\ w'''' \\ U^{IV} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{Bmatrix} T_y \\ T_w \end{Bmatrix} = E_g \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{wx} \\ D_{wx} & D_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v''' \\ \phi''' \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} T_z \\ T_x \end{Bmatrix} = E_g \begin{bmatrix} -D_{zz} & D_{zx} \\ -D_{zx} & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w'' \\ u''' \end{Bmatrix} \quad (37), (38)$$

ただし $E_g = E^2/G$ および $E_{gg} = E^3/G^2$ である。

以上で断面定数は以下のように定義される。

$$\begin{bmatrix} K_{zy} & K_{xx} \\ K_{yy} & K_{wx} \end{bmatrix} = \int_F \begin{bmatrix} xB_z & yB_y \\ xB_x & yB_w \end{bmatrix} dF, \quad \begin{bmatrix} L_{zy} & L_{xx} \\ L_{yy} & L_{wx} \end{bmatrix} = \int_F \begin{bmatrix} B_z B_x & B_y^2 \\ B_x^2 & B_y B_w \end{bmatrix} dF \quad (39), (40)$$

$$\begin{bmatrix} K_{ww} & L_{zz} \\ L_{ww} & D_{zz} \end{bmatrix} = \int_F \begin{bmatrix} \omega B_w & B_z^2 \\ B_w^2 & (S_z/t)^2 \end{bmatrix} dF \quad (41)$$

ここで式(13)の B_y 、 B_w の定義と部分積分を用いると

$$K_{xx} = \int_F B_y y dF = - \int_F \left(\frac{S_y}{t} \right)^2 dF = -D_{xx}, \quad K_{ww} = \int_F B_w \omega dF = - \int_F \left(\frac{S_w}{t} \right)^2 dF = -D_{ww} \quad (42)$$

などの関係があり、定数 D は独立ではなく、定数 K によって次のように表される。

$$[D_{zy} \ D_{xx} \ D_{yy} \ D_{wx} \ D_{ww}] = -[K_{zy} \ K_{xx} \ K_{yy} \ K_{wx} \ K_{ww}] \quad (43)$$

xz 面外の変位を支配するつり合い方程式(25)と断面力変位関係(34)、(35)より、これらが座屈モーメントを決定する支配方程式であり、つり合い式(26)と(34)および(36)、(38)は xz 面内の変位を支配する方程式となる。断面力増分・変位増分関係(式(35)と(37))をつり合い式(25)へ代入すれば次式を得る。

$$\{-EJ_x(v_s'' - u_s''\varphi) + E_g(K_{xx}V^{IV} + K_{wx}\phi^{IV})\}'' + (M_y^\circ\varphi)'' = 0 \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \{-EJ_w\varphi'' + E_gK_{wx}V^{IV} + E_gK_{ww}\phi^{IV}\}'' + (GJ_s\varphi')' - \{-EJ_x(v_s'' - u_s''\varphi) + E_gK_{xx}V^{IV} + E_gK_{wx}\phi^{IV}\}u_s^\circ'' \\ & + (K^\circ\varphi')' + M_y^\circ(v_s'' - u_s''\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\{-E_gK_{xx}(v_s'' - u_s''\varphi) - E_gK_{wx}\varphi'' + E_{gg}L_{xx}V^{IV} + E_{gg}L_{wx}\phi^{IV}\}^{IV} - E_g(D_{xx}V'''' + D_{wx}\phi''')''' = 0 \quad (46)$$

$$\{-E_gK_{wx}(v_s'' - u_s''\varphi) - E_gK_{ww}\varphi'' + E_{gg}L_{wx}V^{IV} + E_{gg}L_{ww}\phi^{IV}\}^{IV} - E_g(D_{wx}V'''' + D_{ww}\phi''')''' = 0 \quad (47)$$

方程式(44)と(45)において、せん断変形を支配する変位 V と ϕ を 0 とおくと、これらは中間荷重が作用しない場合の西野氏らの方程式³⁾に一致する。式(44)～(47)は v_s 、 φ および V 、 ϕ に関する連立方程式であり、座屈以前では等曲げでせん断変形の影響はなक्तも、座屈後の xz 面外の変形に対しては部材軸方向への直応力の変化 σ_z' が存在するために、せん断変形を支配する変位 V と ϕ が連成することを示している。

はり両端が単純支持のとき方程式(44)～(47)の解を

$$[v_s \ \varphi \ V \ \phi] = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4] \sin \frac{n\pi}{L} z \quad (48)$$

とおくと境界条件式(27)および(28)の全てを満たす。上式を式(44)～(47)へ代入すれば、係数 $A_1 \sim A_4$ に関する同次方程式を得るが、これから係数 A_3 、 A_4 を消去すると係数 A_1 、 A_2 に関する次の縮約された固有値決定方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} M_y^\circ + E\bar{J}_x u_s^\circ'' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E\bar{J}_x \kappa_y \\ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E\bar{J}_w + GJ_s + K^\circ + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 u_s^\circ'' \{M_y^\circ + E\bar{J}_x u_s^\circ'' + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E\bar{J}_x \kappa_y\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

この係数行列より、 $K^\circ = 2\beta_y M_y^\circ$ (式(33))および $u_s^{\circ\circ} = -M_y^\circ / EJ_y$ (式(16.a))を用いて、横座屈モーメント M_y° に関する次の二次方程式を得る。

$$\left(1 - \frac{\bar{J}_x}{J_y}\right) M_y^{\circ 2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E \bar{J}_x \left\{ 2\beta_y - \kappa_y \left(2 - \frac{\bar{J}_x}{J_y}\right) \right\} M_y^\circ - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E \bar{J}_x \left\{ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E \bar{J}_\omega + GJ_s - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E \bar{J}_{x\omega}^2 \right\} = 0 \quad (50)$$

上式(49)と(50)において、各定数は以下のである。

$$\left. \begin{aligned} B_{xx} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{G} L_{xx} - K_{xx} & , & & B_{\omega\omega} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{G} L_{\omega\omega} - K_{\omega\omega} \\ B_{\omega x} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{G} L_{\omega x} - K_{\omega x} & , & & k &= B_{\omega\omega} B_{xx} - B_{\omega x}^2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

とおくとき

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_x &= J_x + \frac{1}{k} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{G} \{ K_{xx} (K_{x\omega} B_{x\omega} - K_{xx} B_{\omega\omega}) + K_{x\omega} (K_{xx} B_{x\omega} - K_{x\omega} B_{xx}) \} \\ \bar{J}_\omega &= J_\omega + \frac{1}{k} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{G} \{ K_{x\omega} (K_{\omega\omega} B_{x\omega} - K_{x\omega} B_{\omega\omega}) + K_{\omega\omega} (K_{x\omega} B_{x\omega} - K_{\omega\omega} B_{xx}) \} \\ \kappa_y &= \frac{1}{k} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{E}{GJ_x} \{ K_{xx} (K_{\omega\omega} B_{x\omega} - K_{x\omega} B_{\omega\omega}) + K_{x\omega} (K_{x\omega} B_{x\omega} - K_{\omega\omega} B_{xx}) \} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$\bar{J}_x$ および $\bar{J}_\omega$ はそれぞれ x 軸に関する修正断面二次モーメントおよび修正曲げねじれ定数と呼ぶべき断面定数である。定数 κ_y は断面の一軸対称性に起因する係数であり、式(50)の第3項より修正曲げねじれ定数 $\bar{J}_\omega$ を低下させる効果をもつ。式(50)を M_y° について解けば、座屈前の曲げモーメント M_y° による部材軸線の曲率の変化、 $u_s^{\circ\circ}$ と xz 面外変位に伴うせん断変形の影響を考慮した座屈モーメントを得る。とくに断面が二軸対称のときは、式(39)と(40)の断面定数について

$$K_{x\omega} = L_{\omega x} = 0 \quad (53)$$

したがって、式(52)より

$$B_{\omega x} = \kappa_y = 0, \quad k = B_{\omega\omega} B_{xx} \quad (54)$$

となる。また式(33)の下より $\beta_y = 0$ である。これらより式(50)の解は $n = 1$ において

$$M_y^\circ = \frac{\pi}{L} \sqrt{E \bar{J}_x GJ_s} \sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2 E \bar{J}_\omega}{GJ_s L^2}}{1 - \frac{\bar{J}_x}{J_y}}} \quad (55)$$

となる。ここに $\bar{J}_x$ 、 $\bar{J}_\omega$ は、式(52)に式(53)、(54)を考慮して

$$\bar{J}_x = J_x - \frac{\pi^2 E}{L^2 G} \frac{K_{xx}^2}{(\pi/L)^2 EL_{xx} / G - K_{xx}}, \quad \bar{J}_\omega = J_\omega - \frac{\pi^2 E}{L^2 G} \frac{K_{\omega\omega}^2}{(\pi/L)^2 EL_{\omega\omega} / G - K_{\omega\omega}} \quad (56)$$

定義式(42)より上式の右辺において $K_{xx} < 0$ 、および $K_{\omega\omega} < 0$ であるから、 $\bar{J}_x < J_x$ および $\bar{J}_\omega < J_\omega$ となる。また式(55)の右辺の分母は $1 - \bar{J}_x / J_y > 1 - J_x / J_y$ となるから、せん断変形を考慮した横座屈モーメントは、無視した場合より小さくなると結論される。

また従来の結果のように $J_x \geq J_y$ のような断面であると横座屈を起こさないとさえず、 $\bar{J}_x \geq J_y$ のとき、すなわち x 軸に関するせん断変形を考慮した修正断面二次モーメントが、 y 軸に関する断面二次モーメント J_y 以上の大きさの時、横座屈を生じないと修正されねばならない。

なお、式(50)で $\bar{J}_x / J_y \ll 1$ として $\bar{J}_x / J_y$ を無視すれば、初期曲率 $u_s^{\circ\circ}$ を無視した場合の解となること

は、せん断変形を考慮しない場合と同様である。

6. 結果と考察

式(13.a)で定義される座標 B_x , B_y および B_w を Fig.2 に示す。これらの座標から定義される式(39)、(40)の断面定数のうち横座屈に関連する定数および J_x , J_y など既存の定数を

$$\alpha = \frac{b}{h}, \quad \beta = \frac{t_f}{t_w} \quad (57)$$

を用いて表すと次のようである。

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{6} h^3 t_w \alpha^3 \beta, & J_y &= \frac{1}{12} h^3 t_w (1 + 6\alpha\beta), & K_{xx} &= -\frac{1}{60} h^5 t_w \alpha^5 \beta \\ J_s &= \frac{1}{3} h t_w^3 (1 + 2\alpha\beta^3), & J_w &= \frac{1}{24} t_w h^5 \alpha^3 \beta, & K_{ww} &= -\frac{1}{240} h^7 t_w \alpha^5 \beta \\ L_{xx} &= \frac{17}{16 \times 630} h^7 t_w \alpha^7 \beta, & L_{ww} &= \frac{17}{120 \times 336} h^9 t_w \alpha^7 \beta \end{aligned} \quad (58)$$

Fig.2 の座標から $K_{xx} = \int_F B_y B_w dF$ と $L_{xx} = \int_F B_y B_w dF$ はいずれも 0 となり、したがって式(53)の成り立つことがわかる。せん断変形の効果を表す定数は上式のうち x 軸まわりの曲げに関する K_{xx} , L_{xx} および曲げねじれに関する K_{ww} , L_{ww} の4個である。

Fig.3 は、図中に示すように $h/t_f = 30$ および $t_f/t_w = 2$ 、したがってウェブの幅厚比 $h/t_w = 60$ をもつ I 形ばりであり、式(55)で与えられる横座屈モーメントがせん断変形を無視した Trahair²⁾ および西野らの解に比べてどの程度小さくなるかを示したものである。西野らの解は、前述のように式(55)の M_{cr} において、 $J_x \rightarrow J_x$ および $J_w \rightarrow J_w$ としたものである。Trahair の解は若干複雑であるけれど両者とも数値上ではほとんど差異はない。

Fig.3 からフランジ幅-けた高比が、 $b/h = 1/3 \sim 1$ と大きくなるに従って座屈モーメントの減少が顕著に見られる。このことは、 x 軸(垂直軸)まわりの曲げおよび

曲げねじれモーメントのはり軸方向への変化に伴うせん断応力、したがってせん断ひずみの現出によって、修正断面二次モーメント J_x と曲げねじれ定数 J_w がフランジ断面の増加により、相対的に顕著に減少をきたすことによっている。けた高-スパン比 h/L が 1 に近づくにつれ、すなわち相対的にスパンが短くなるにつれ、横座屈モーメントが減少するのは直応力に比べて、せん断応力が相対的に卓越してくる効果によるのであるが、これは圧縮柱の曲げ座屈¹⁾ においても既に指摘されてきたことである。

Fig.4 は文献 6) 7) 及び 8) において解析の対象となっている I 形ばりである。図中に示すように幅厚比は、 $h/t_w = 34$ であるから、前出 Fig.3 の場合の約半分である。また $h/b = 1.16$ であるから $b/h = 0.86$ となり Fig.3 の曲線で、 $b/h = 1$ と $3/4$ の中間に位置する断面である。Fig.4 の横軸は、 $0 \leq h/L \leq 1/3$ の範囲で示してあり、Fig.3 から、せん断ひずみを無視した場合に比べて M_{cr} は約80%程度以下の減少を示す領域といえる。

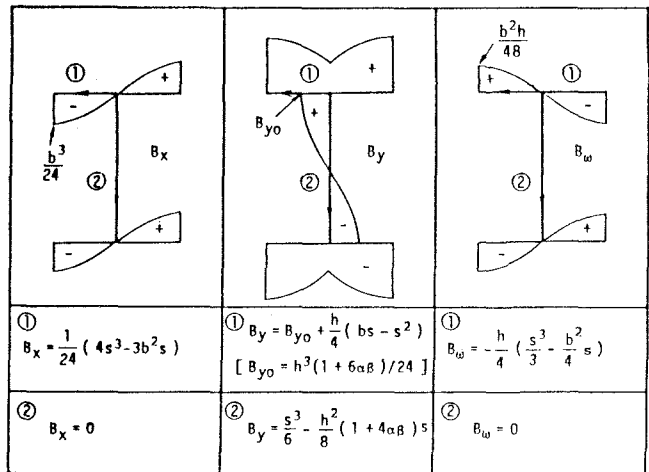


Fig.2 Coordinate B_x , B_y and B_w of doubly symmetric I-beam

Fig.4 において本報告の結果（太実線）は、 h/L が小さい時、すなわちスレンダーなはりでは、Trahair と西野らの M_{cr} と Timoshenko の M_{cr} とのほぼ中間にある。

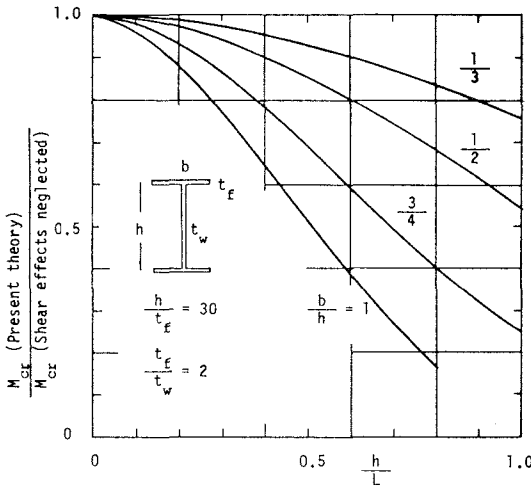


Fig.3 Reduction of critical moment

しかし $h/L > 0.24$ （または $h/L < 4.2$ ）では本報告の結果は両者の M_{cr} より低下し、危険側の値を与える結果となっている。このことは、初期曲率 u_s'' の効果を上まわってせん断変形が卓越し、横座屈荷重を低下させることを示すものである。しかしながら、断面変形を許した著者らの文献 7)によれば、この断面では $h/L > 0.14$ （または $L/h < 7$ ）の領域では横座屈は生ぜず、断面変形を伴った distortional buckling が支配することが分かっている。

Fig.5 は Fig.4 と図中に示すように 2 つのパラメーター h/t_w と t_f/t_w は同一であるが、 t_f/b を 0.2～0.01まで変化させ、この時の J_x/J_y を求め、これを横軸にとって座屈応力 σ_{cr} を調べたものである。

$L/h = 15$ とはりがスレンダーな場合、本報告の結果は、Timoshenko（破線）と Trahair、西野ら（細実線）との中間の座屈応力となるが、 $J_x/J_y = 1$ のとき Trahair と西野らの結果は、 σ_{cr}/E が無限大となって座屈を生じないのに対して、著者らの結果は有限値にとどまる。実際この断面では $J_x/J_y = 1.038$ のとき著者らの結果は発散した。 $L/h = 3$ の場合は、Fig.4 で $h/L > 0.24$ （または $L/h < 4.2$ ）の場合と同じく、著者らの σ_{cr}/E は三者の中で最も小さく、危険側の値となる。

しかしながら、著者らの前出文献 6)によれば、 $L/h = 15$ のとき、 $J_x/J_y > 0.5$ において、 $L/h = 5$ のとき、 $J_x/J_y > 0.2$ においては断面変形を認めたとき、前述の局部座屈が発生し、横座屈は生じない。

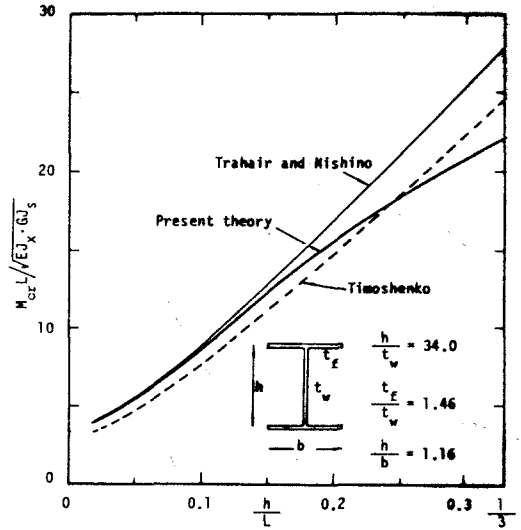


Fig.4 Comparison of three kinds of critical moment

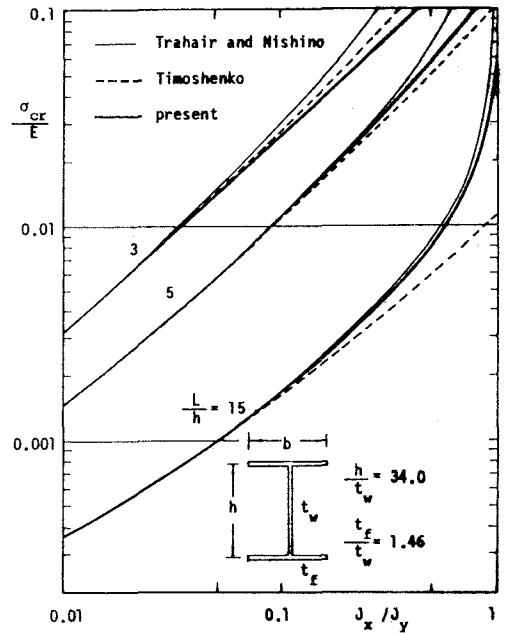


Fig.5 Effects of J_x/J_y on critical stress

7. あとがき

従来、曲げと曲げねじれに伴う直応力とつり合うせん断応力は薄肉微小要素のはり軸方向の応力のつり合い式から求めており、いわばせん断応力だけが修正されてきたのであり、このせん断応力に比例するせん断ひずみは修正されず、St.Venant のねじれに伴うせん断ひずみだけが考慮されてきた。本研究では、変位場を修正することにより、この直応力の変化に伴うせん断応力によるせん断ひずみを取り込み、等曲げを受ける一軸対称断面ばりの横座屈支配方程式と両端単純支持の場合の座屈モーメントを、座屈以前のはり軸線の曲率の変化をも包含した形で提示した。

二軸対称断面の場合、せん断変形の効果は、弱軸まわりの曲げ剛性と曲げねじれ剛性の低下として評価され、単に座屈以前の曲率の変化のみを考慮した解より小さい座屈モーメントを与える。特に幅広フランジを持つ I 形ばりで部材長が短くなると、Timoshenko の解をも下まわる曲げモーメントで座屈することを定量的に明らかにした。

以上のような結果が問題となるのは、鋼などよりも高い弾性限を持つが、延展性に乏しい材料から成るはり、および例えばボニートラス形式で、よりスレンダーなトラス構造などの横座屈においてである。後者では、斜材等の腹材はせん断力を受け持つ部材であり、トラス構造を薄肉はりに置き換えた場合（自由度がトラスに比べ著しく減少する）、斜材のひずみはせん断ひずみとして考慮されうるからである。本研究はこれらの問題への展開の一つの手段ともなりうるものである。

参考文献

- 1) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of elastic stability, McGraw-Hill, N.Y., 1959
- 2) Trahair, N.S. and Woolcock, S.T. : Effects of major axis curvature on l-beam stability, Proc. ASCE, Vol.99, No.EM1, pp.85-98, 1973
- 3) 西野・倉方・長谷川・奥村：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，第225号，pp.1-15，1974
- 4) Dabrowski, R. : Dunwandige Stäbe unter zweiachsig au ermittligem Druck, Stahlbau, Vol.12, pp.360-365, 1961
- 5) 稼農・薄木・堀江：せん断変形を考慮した薄肉断面直線ばりの理論，土木学会論文報告集，第282号，pp.1-13，1979
- 6) Usuki, S. and Hasebe, K. : Effects of pre-buckling deflections on local, distortional and lateral-torsional buckling of l-beams, Proc. of JSCE, Structural Eng./ Earthquake Eng. Vol.2, No.2, 1985/ Technical Note. pp.221-224
- 7) 薄木・長谷部：二次の変位場理論に基づく薄肉断面ばりの局部および全体座屈解析，土木学会論文集，第344号/ I-1, pp.357-366, 1984
- 8) Hancock, G.J. : Local, Distorsional and lateral Buckling of l-beams, ASCE, Vol.104, ST11, pp.1787-1798, 1978

(1986年10月17日受付)