

Herrmannの混合法を用いたI形断面曲線桁の曲げ耐荷力解析

Bending Ultimate Strength Analysis of Curved I-Girders by using Mixed Finite Element Approach

末武義崇* 平嶋政治** 依田 照彦***

by Yoshitaka SUETAKE, Masaharu HIRASHIMA and Teruhiko YODA

In this study, elasto-plastic nonlinear analysis of curved I-girders between vertical stiffener under bending is dealt with, in which mixed finite element approach is employed. Constitutive equation for elasto-plastic problems is derived from flow rule based on Drucker's stability postulate, von Mises yield criterion and Ziegler's kinematic hardening rule. In the procedure presented, element matrices along junctions between flange plates and a web are summed up with the help of Lagrange's multipliers method to form fully compatible finite elements. Ultimate strength of total curved I-girders is investigated by changing flange width-thickness ratio. As a result, it is seen that elasto-plastic nonlinear analysis is essential to the determination of ultimate strength of curved I-girders.

1. まえがき

最近、都市内の道路橋に曲線桁が多く用いられるようになってきた。こうした状況に伴い、曲線桁に関するより精密な研究、とりわけその終局強度を決定するための耐荷力解析の必要性が強く指摘されるようになってきている。

曲線桁に関する研究については、これを骨組構造物と見なし、解析を行なった報告も多いが、曲線桁の耐荷力が構成要素の板やシェルとしての挙動に大きく依存するという指摘もあり、平板理論や円筒シェル理論を適用して解析を行なっている例も多い。円筒シェル理論をウェブパネルの解析に適用した研究報告としては、Culver, Dymらの研究^{1)~3)}、Dabrowskiらの研究⁴⁾、Abdel-Sayedの研究⁵⁾等が著名であるが、これらはいずれも

線形あるいは準線形理論に基づいた解析である。幾何学的非線

形性を考慮した研究に関しては、非線形シェル理論を用いて解析を行なった三上・古西・米沢の研究⁶⁾、有限要素法を用いた倉西・樋渡の研究⁷⁾が例として上げられる。また、実際の曲線桁においては、ウェブ

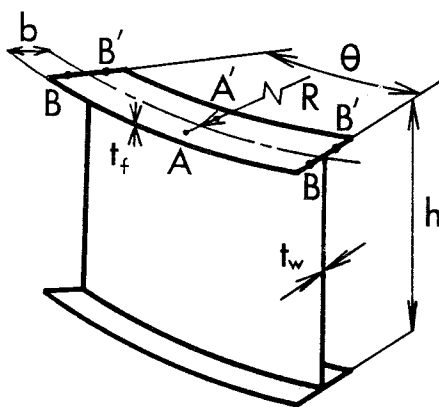


図-1 解析モデル

- * 早稲田大学大学院理工学研究科 建設工学専攻 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)
 ** 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)
 *** 工博 早稲田大学助教授 理工学部土木工学科 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)

パネルの上下辺がフランジプレートによって弾性的に拘束されて、しかも桁全体の耐荷力がフランジの剛性やその薄板としての挙動に大きく依存することから、最近ではフランジプレートをも含めた全体的な構造解析が必要であるとの認識が一般に受け入れられるようになってきた。フランジを含めた曲線桁の解析については、樋渡・倉西⁸⁾が文献7)の解析手法を基に、フランジの剛性を考慮してI形断面曲線桁の幾何学的非線形挙動を精密に調べている他、藤井・大村⁹⁾が有限要素法を用いてI形断面曲線桁の幾何学的非線形解析を実施し、ウェブパネルだけでなく、弾性的なねじれ座屈を中心としたフランジプレートの挙動にも言及している。また、中井・北田・大南・川井¹⁰⁾はフランジや水平補剛材をも考慮した上で、曲線桁ウェブ部の必要幅厚比や水平補剛材の必要剛度に関する提案を行なっている。以上の研究はいずれも弾性解析であり、非線形解析に際しても塑性流れによる材料非線形性は考慮されていない。しかしながら、構造系や荷重系によっては必ずしも座屈がその終局状態を支配するとは限らず、幾何学的非線形性と共に材料非線形性をも考慮した、弾塑性有限変位解析を実施することによって初めて耐荷力が求められる構造物も少なくない。実際、平板の終局圧縮強度などは板の弾塑性的な挙動によって決まり、大坪¹¹⁾、上田・安川¹²⁾、小松・北田・宮崎¹³⁾など、すでに多くの研究者が弾塑性有限変位解析を通じて終局耐荷力を明らかにしている。I形断面曲線桁の曲げ耐荷力特性も桁の弾塑性的な挙動に支配される現象の一例であり、そのため弾塑性有限変位解析に基づく耐荷力解析が強く望まれている。しかしながら、材料非線形性まで考慮した研究は非常に少なく^{14), 15)}、耐荷力にまで言及している研究は中井・北田・大南¹⁶⁾が行なった実験的研究や、有限要素法に基づく筆者らの研究¹⁷⁾の他にはほとんど見あたらないのが現状である。一方、一般の板殻構造物の弾塑性有限変位解析については、わが国でもすでに変位法を中心として幾つかの報告がなされている^{18)~20)}。

本論文では、幾何学的非線形性を考慮した既往のHerrmannの混合型有限要素法²¹⁾を基礎に、塑性流れによる材料非線形性をも考慮できるように要素方程式の再定式化を計り、その際、完全弾塑性体だけでなくひずみ硬化塑性体をも解析できるように配慮した。また、フランジとウェブの接合辺でモーメントが不連続になるため、接合辺に沿う要素の要素マトリックスを重ね合わせるに当たってLagrangeの乗数法を適用した²²⁾。非線形計算に際しては、増分法と修正Newton-Raphson法とを組み合わせる収束計算を実施した。以上のような解析手法に基づき、図1に示したような垂直補剛材で挟まれたI形断面曲線桁の1パネルに弾塑性有限変位解析を実施し、弾性解析との相異を明確にするとともに、桁の曲げ耐荷力に及ぼすフランジ幅厚比の影響を定量的に調べた。なお、I形断面曲線桁の解析に先立ち、一様圧縮を受ける平板の耐荷力解析を行ない、既往の研究¹²⁾の解析結果と比較して本論文の解析手法の妥当性を検証した。

2. 有限要素定式化

Herrmannの板曲げ要素に増分仮想仕事の原理を適用すれば次式が得られる²¹⁾。

$$\int_S \delta M^T \Delta \kappa dS = \delta M_n^T \Delta \phi + \delta F^T \Delta W + \delta X^T \Delta V \quad (1)$$

ここに、 M ：要素内曲げモーメント、 κ ：曲率、 M_n ：要素境界曲げモーメント、 ϕ ：要素境界回転角、 F ：面外節点力、 W ：面外節点変位、 X ：面内節点力、 V ：面内節点変位であり、 S は要素面積、 δ は仮想量、 Δ は増分量をそれぞれ表わす。文献21)によれば、式(1)の左辺及び右辺第2項はそれぞれ次のように変形される。

$$\int_S \delta M^T \Delta \kappa dS = \delta M_n^T G_{bb} \Delta M_n ; G_{bb} \equiv S P^T D_{bb} P, \Delta M = P \Delta M_n \quad (2)$$

$$\delta F^T \Delta W = \delta M_n^T H_b \Delta u ; \Delta F = H^T \Delta M, W = bu, u^T = \{V^T W^T\} \quad (3)$$

なお、式(2)において、マトリックス D_{bb} には塑性の効果が含まれており、弾塑性応力-ひずみマトリックスを $E^{(ep)}$ とすると、 σ を応力として次のような関係式が得られる。

$$\Delta M = \int_{-t/2}^{t/2} \Delta \sigma_z dz = \left(\int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} z^2 dz \right) \Delta \kappa = E_{bb} \Delta \kappa ; E_{bb} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} z^2 dz = D_{bb}^{-1} \quad (4)$$

式(1)の右辺第3項は塑性流れの発生によって板厚方向の応力分布が非線形になった結果生ずる項で、文献21)では考慮されていない。簡単のため線形化した仮想仕事の原理を適用し、面内方向の力の釣り合いを膜力 N とひずみ ϵ を用いて表現すると

$$\int_S \delta \epsilon^T \Delta N dS = \delta V^T \Delta X \quad (5)$$

を得る。ここで、

$$\Delta N = \int_{-t/2}^{t/2} \Delta \sigma dz = E_{mb} \Delta \kappa ; E_{mb} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} z dz \quad (6)$$

であるので、式(2)、(4)を考慮し式(6)を式(5)に代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \Delta X \\ 0 \end{Bmatrix} = A_{mb} \Delta M_n ; \delta u^T A_{mb} \Delta M_n = \delta V^T \Delta X, A_{mb} \equiv S B^T E_{mb} D_{bb} P \quad (7)$$

が得られる。ここに B は線形の変位-ひずみマトリックスである。式(7)より、

$$\delta X^T \Delta V = \delta \begin{Bmatrix} \Delta X \\ 0 \end{Bmatrix}^T \Delta u = \delta M_n^T A_{mb}^T \Delta u \quad (8)$$

となる。式(6)から明らかなように、塑性変形が生じない間は $E_{mb} = 0$ であるから、式(1)の右辺第3項は存在しない。式(2)、(3)、(8)を式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\delta M_n^T [H + A_{mb}^T \quad -G_{bb}] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta M_n \end{Bmatrix} = \delta M_n^T (-\Delta \phi) \quad (9)$$

次に三角形膜・曲げ混合要素に増分仮想仕事の原理を適用すると、

$$\int_S \{ \delta (\Delta \epsilon)^T (N_0 + \Delta N) + \delta \kappa^T (M_0 + \Delta M_n) \} dS = \delta u^T (f_0 + \Delta f) \quad (10)$$

となる。ここに f ：節点力であり、添字0は初期値を表わす。updated Lagrangian approach に従えば、 $u_0 = 0$ とすることができ、非線形の変位-ひずみ関係式より次式が得られる。

$$\delta (\Delta \epsilon) = (B + \Delta B_L) \delta u ; \Delta B_L \equiv \begin{bmatrix} \Delta W^T C_x \\ \Delta W^T C_y \\ \Delta W^T C_{xy} \end{bmatrix} b \quad (11)$$

一方、

$$\begin{aligned} \Delta N &= \int_{-t/2}^{t/2} \Delta \sigma dz = \left(\int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} dz \right) \Delta \epsilon + \left(\int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} z dz \right) \Delta \kappa \\ &= E_{mm} \Delta \epsilon + E_{mb} \Delta \kappa ; E_{mm} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} E^{(ep)} dz \end{aligned} \quad (12)$$

であるから、式(11)、(12)を考慮すれば式(10)の左辺第1項は次のように変形される。

$$\int_S \delta (\Delta \epsilon)^T (N_0 + \Delta N) dS = \delta u^T [S (B^T + \Delta B_L^T) \{ N_0 + E_{mm} (B + \frac{1}{2} \Delta B_L) \Delta u + E_{mb} D_{bb} P \Delta M_n \}] \quad (13)$$

式(10)の左辺第2項は部分積分を用いて

$$\int_S \delta \kappa^T (M_0 + \Delta M) dS = \delta u^T b^T H^T (M_{n0} + \Delta M_n) \quad (14)$$

となる²¹⁾。式(10)に式(13)、(14)を代入して次式を得る。

$$\delta u^T [A_{mm} + C \quad b^T H^T + A_{mb}] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta M_n \end{Bmatrix} = \delta u^T (\Delta f - \Delta f^* + R_f); \quad A_{mm} \equiv S B^T E_{mm} B, \\ C \Delta u \equiv S \Delta B_L^T N_0, \quad \Delta f^* = \left(\frac{S}{2} B^T E_{mm} \Delta B \right) \Delta u + S \Delta B_L^T \Delta N, \quad R_f = f_0 - S B N_0 - b^T H^T M \quad (15)$$

ここに、 Δf^* は各ステップにおける不平衡力、 R_f は前ステップまでの残差を表わしている。式(9)、(15)をまとめて、解くべき増分要素方程式として次式を得る。

$$\begin{bmatrix} A_{mm} + C & b^T H^T + A_{mb} \\ H_b + A_{mb}^T & -G_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta f - \Delta f^* + R_f \\ -\Delta \phi \end{Bmatrix} \quad (16)$$

塑性流れを考慮した結果、文献21) と異なり式(16)において A_{mb} のようなマトリックスが生じ、 A_{mb} や G_{bb} にも塑性の効果が含まれることになる。また、文献21) では変位-ひずみ関係を一部線形化して用いているため、式(16)における不平衡力 Δf^* や残差の R_f は現れてこない。収束計算は不平衡力 Δf^* が与えられた増分荷重 Δf の1.0%以下になるまで実施した。

材料非線形性を考慮するにあたって以下の仮定を導入した。(1)応力-ひずみ関係は Drucker の仮定に基づく流れ則に従う。(2)降伏曲面は Mises 型の降伏関数で表現される。(3)ひずみ硬化則として Ziegler の移動硬化則を用いる。以上の仮定に基づく応力-ひずみマトリックス $E^{(ep)}$ として次式を用いた²³⁾。

$$E^{(ep)} = E^{(e)} - \frac{E^{(e)} \{ \partial F / \partial \sigma \} \{ \partial F / \partial \sigma \}^T E^{(e)}}{H_K' / \sigma_Y + \{ \partial F / \partial \sigma \}^T E^{(e)} \{ \partial F / \partial \sigma \}} \quad (17)$$

ここに $E^{(e)}$: 弾性応力-ひずみマトリックス、 F : 降伏関数、 σ_Y : 降伏応力、 H_K' : 移動硬化率であり、 H_K' は単軸状態の応力-塑性ひずみ曲線の接線係数として与えられる。式(17)を具体的な形に書き下すと次のようになる²³⁾。

$$E^{(ep)} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_1^2 & S_1 S_2 & S_1 S_3 \\ & S_2^2 & S_2 S_3 \\ \text{Sym.} & & S_3^2 \end{bmatrix} \\ ; \quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} (\sigma' - \alpha'), \quad S = \frac{4}{9} \sigma_Y^2 H_K' + S_1 \sigma_x' + S_2 \sigma_y' + 2 S_3 \tau_{xy}' \quad (18)$$

ここに、 E は Young 率、 ν は Poisson 比であり、 σ' 及び α' はそれぞれ応力、原点移動量の偏差成分を表わしている。なお、塑性域の板厚方向への広がり評価するために要素を9層に分割し、式(4)、(6)、(12)における積分を Gauss-Legendre の数値積分公式を用いて計算した。

一辺を3つ以上の要素が共有する部分、たとえばI形断面曲線桁のフランジとウェブの接合辺のような部分では曲げモーメントが不連続になるので、混合法のように要素境界曲げモーメントを未知パラメータとして用いる手法では、このような接合辺に沿う要素の要素マトリックスを単純に重ね合わせることが不可能となる²⁴⁾。筆者らは、すでにI形断面曲線桁の幾何学的非線形解析に際して、接合辺におけるモーメントの

釣り合い式を拘束条件として Lagrange の乗数法を適用し、問題をいわゆる“条件付き極値問題”に帰着させ、全体方程式を誘導することによってこの問題を解決している²²⁾。

3. 解析モデル

対象とした I 形断面曲線桁パネルの形状は図 1 に示したとおりである。モデルの寸法は、曲率パラメータ $Z=7.15$ ； $Z=h^2\sqrt{1-\nu^2}/Rt_w$ 、中心角 $\theta=0.05$ 、ウェブの幅厚比 $h/t_w=150$ 、アスペクト比 $R\theta/h=1.0$ でいずれも一定とし、フランジ断面に関するパラメータを種々変化させて解析を行なったフランジ断面については、フランジ幅を $b=30$ [cm] で一定とし、フランジ幅厚比が 12、14、16 となるようにフランジ厚を変化させたモデルと、フランジ幅

厚比を $b/t_f=12$ で一定としてフランジとウェブの断面積比を 0.2、0.5、1.0 となるように変化させたモデルとを考えた。材料定数は Young 率 $E=2.1\times 10^6$ [kg/cm²] すなわち 2.06×10^6 [MPa]、Poisson の比 $\nu=0.3$ とし、鋼材は SS41 を想定して降伏応力 $\sigma_y=2400$ [kg/cm²] すなわち 235 [MPa] とした。単軸状態の応力-ひずみ関係としては図 2 に示したように、降伏後平坦な領域を経てからひずみ硬化を生ずる tri-linear なモデルを考えた。ここで本研究の解析手法は updated Lagrangian approach に従っているのので、応力とひずみの組み合わせは Cauchy の応力と対数ひずみでなければならない。しかし、今回の解析ではひずみの値は高々 1% であるので、単軸状態の応力-ひずみ曲線として公称応力と公称ひずみを用いて画かれた図 2 を用いてもさしつかえないと考えられる。荷重としてはフランジ端部で一様分布、ウェブ端部で線形分布する応力を与え、パネルに曲げを作用させた。境界条件はフランジ端部で板曲げモーメントが零、ウェブ端部で板曲げモーメント及び面外変位が零とした。さらに、パネルの端部には本来垂直補剛材が存在するので端部の拘束がきつくなることを予想し、B、B' 点(図 1)の面外変位が零であるという条件とウェブ端部が上下方向に伸縮しないという条件を新たに付け加えた。パネルの有限要素分割はウェブ部 100 分割、フランジ部上下ともに 40 分割ずつとし、解析は構造の対称性を利用してパネルの右半分について行なった。なお、本論文の解析手法の妥当性を検証するために、図 3 に示したような板厚が 4.5 [mm]、1 辺の長さが 500 [mm] の正方形板が一様圧縮力を受けた時の耐荷力解析を実施し、既往の研究¹²⁾との比較を行った。Young 率、Poisson 比は I 形断面曲線桁モデルと同一であるが、降伏応力は文献¹²⁾に従って $\sigma_y=2480$ [kg/cm²] すなわち 243 [MPa] とし、ひずみ硬化は考慮していない。境界条件は四辺単純支持である。解析に際しては Sin 半波の初期たわみを与え、中央点の初期たわみ w_0 と板厚 t の比を $w_0/t=0.01$ とした。

4. 解析結果及び考察

4.1 一様圧縮を受ける正方形平板の耐荷力解析

解析結果を図 3 に示す。図において、実線は文献¹²⁾の解析結果を、プロットは本論文の解析結果をそれぞれ示している。図から明らかなように、弾性的な座屈挙動についてはほとんど一致した結果が得られている。また、後座屈領域に入り徐々に塑性化の影響が卓越してくると両者の挙動が若干異なってくるが、耐荷力そのものはほぼ一致している様子が見られる。

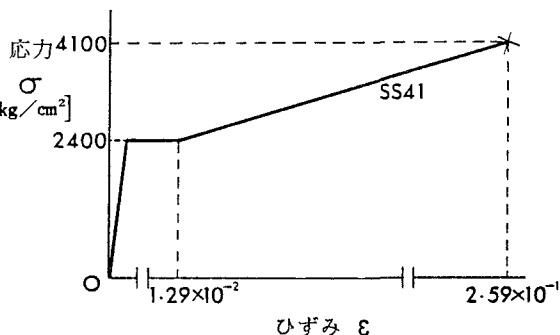


図 2. 単軸状態の応力-ひずみ曲線

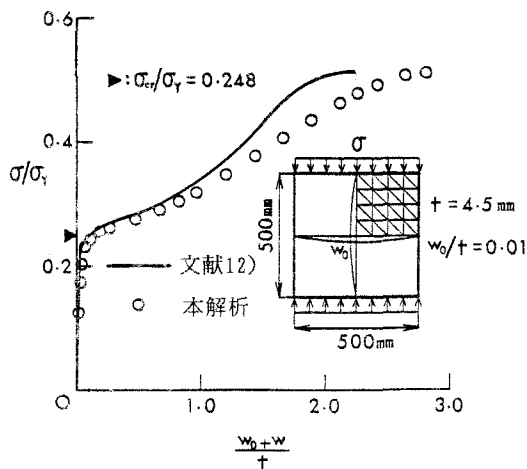


図 3 正方形平板の面内一様圧縮

かる。後座屈領域における弾塑性的な挙動の差異については、変位法と混合法という手法の相違や層分割による板厚方向の塑性化に対する評価方法の違いなどの原因が考えられるが、最も大きな理由は文献12)における非線形計算が修正荷重増分を用いた増分法のみによって行われているのに対し、本論文においては各増分区分毎に修正Newton-Raphson法を用いた収束計算が行なわれている点にあると考えられる。

4.2 弾性解析の結果との相異点

図4において、今回の解析結果と弾性解析の結果との比較を行なった。結果を図示するにあたっては、 $b/t_f=12$ 、 $A_f/A_w=1.0$ のモデルと、弾性解析との差異を明確にするために多少極端ではあるが $b/t_f=20$ 、 $A_f/A_w=0.6$ のモデルを選んだ。図は縦軸にパネル端部の曲げ荷重によるモーメントを降伏モーメントで割って無次元化した量を、横軸に圧縮フランジ中央辺(A-A'辺)の円周方向まわりの回転角をそれぞれとして図示してある。幾何学的非線形性のみを考慮した弾性解析結果を実線で、材料非線形性をも考慮した今回の弾塑性解析結果をプロットでそれぞれ示した。両者を比較すると明らかなように、図に示した荷重レベルの範囲内では、モデルによって弾性的な座屈を生じなかったり、座屈しても後座屈強度が発現して弾性解析のみによっては耐荷力を求めることができなかったのに対し、弾塑性解析を実施することによって最高荷重を決定することができ、真の耐荷力を求めることが可能となる。従来から、I形断面曲線桁の耐荷力解析にあたっては、弾塑性有限変位解析の実施が不可欠であるとの指摘が多くなされてきたが、今回の解析を通じて耐荷力解析を複合非線形問題として取り扱うことの意義があらためて確認できた。

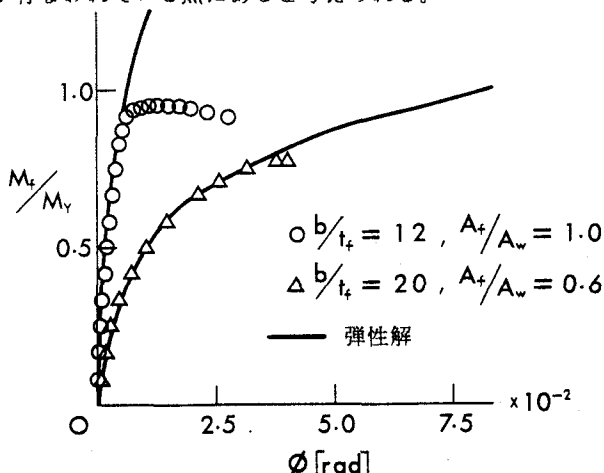


図4. 弾性解析結果との比較

4.3 圧縮フランジの耐荷力に及ぼす影響

I形断面曲線桁の曲げ耐荷力に影響を及ぼすパラメータとしては、桁の曲率、フランジやウェブの幅厚比、フランジとウェブの断面積比、ウェブのアスペクト比など種々のものが考えられるが、今回は特にフランジの幅厚比及びフランジとウェブの断面積比に着目して解析を行なった。我が国の道路橋示方書²⁶⁾では、圧縮フランジ、引張フランジともに板厚 t_f が自由突出幅 b の1/16以上と規定されている。そこで今回の解析にあたっては、解析モデルの最大フランジ幅厚比を $b/t_f=16$ とし、フランジ幅厚比の影響を調べるために $b/t_f=12$ 、14のモデルについても解析を行なって耐荷力の比較検討を試みた。解析結果を図5に示す。縦軸及び横軸には図4と同じく無次元化モーメント及び圧縮フランジ中央辺の円周方向のまわりの回転角をそれぞれとして図示してある。今回はフランジの突出幅を一定にしたために、フランジ幅厚比の増加とともにフランジとウェブの断面積比が減少するので、当然耐荷力の低下が予想される。実際、図5から明らかなように、フランジ幅厚比が増加するにつれて耐荷力が低下している。しかし、その

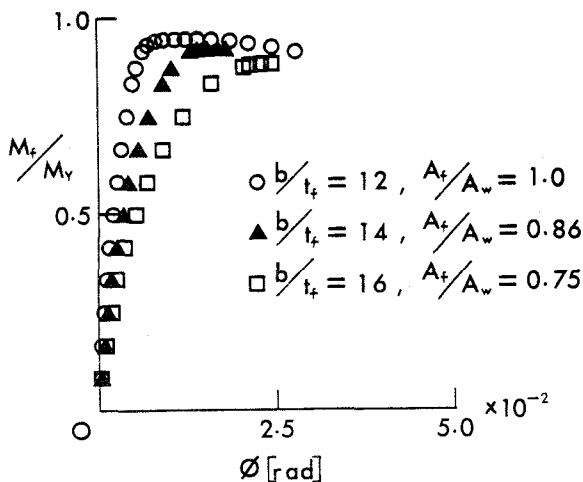


図5. フランジ幅厚比の影響

差はそれ程大きくなく、 $b/t_f=12$ 、 $A_f/A_w=1.0$ のモデルを基準にすると $b/t_f=14$ 、 16 の場合の耐荷力の低下率はそれぞれ 2.3% 、 6.6% 程度である。道示²³⁾の規定で使用鋼材としてSS41を用いた場合の最大ウェブ幅厚比が 152 とされていることを考慮し、今回の解析モデルも $b/t_f=150$ としたが、ウェブ幅厚比の減少に伴いウェブの板曲げ剛性が増加してフランジのねじれに対する拘束度が増せば、フランジ断面の変化による耐荷力の差はさらに縮まるものと考えられる。従って、フランジ幅厚比やフランジとウェブの断面積比が図5に示した程度の範囲であれば桁の曲率が極端に大きくならない限り、フランジ断面の変化が桁の耐荷力に大きな影響を及ぼすとは考えられない。さらに、フランジとウェブの断面積比の影響を明確にするために、フランジ幅厚比を $b/t_f=12$ で一定とし、フランジとウェブの断面積比を $A_f/A_w=0.2$ 、 0.5 、 1.0 の3通りに変化させて解析を行なってみた。結果は図6に示したとおりである。図6から明らかなように、断面積比の減少に伴い耐荷力が低下している。しかし、この傾向もフランジ幅厚比が道示²⁶⁾の基準を満たした範囲内であり、図4に示した $b/t_f=20$ のような極端なモデルの場合、フランジとウェブの断面積比が $A_f/A_w=0.6$ であっても耐荷力は著しく低下する。図6に解析結果を図示したモデルの耐荷力について、 $A_f/A_w=1.0$ のモデルを基準にすると $A_f/A_w=0.2$ 、 0.5 の場合の耐荷力の低下率はそれぞれ 4.0% 、 10.2% であり、 $A_f/A_w=0.2$ のモデルの耐荷力低下が若干目立っている。従って、このように断面積比が比較的小さい場合には、フランジとウェブの断面積比が桁の耐荷力特性に関し重要なファクターになると考えられる。

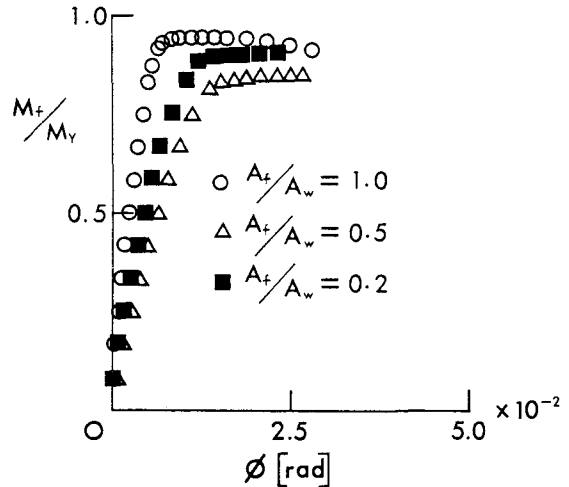
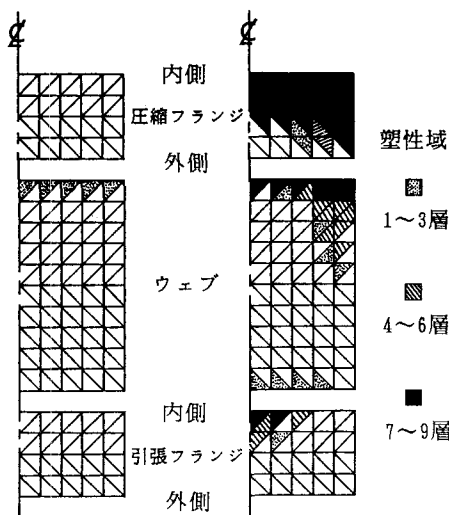


図6. フランジとウェブの断面積比の影響

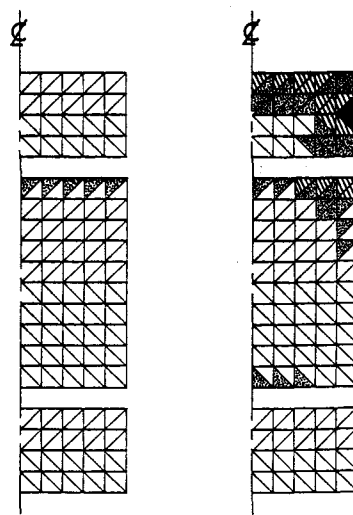
4.4 塑性域の進展状況

図7～9に $b/t_f=12$ 、 $A_f/A_w=1.0$ のモデル、 $b/t_f=16$ 、 $A_f/A_w=0.75$ のモデル及び $b/t_f=12$ 、 $A_f/A_w=0.2$ のモデルに関する塑性域の進展状況を図示した。いずれも塑性域が発生し始める初期の段階と最高荷



(a) $M_x/M_y=0.75$ (b) $M_x/M_y=0.947$

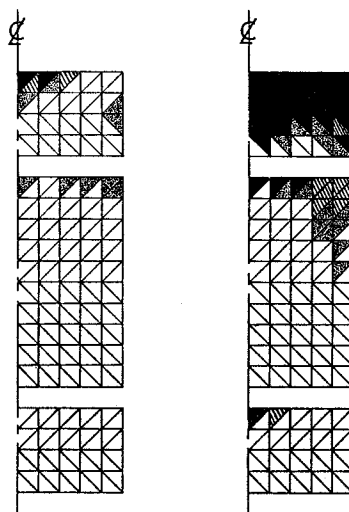
図7. 塑性域の進展状況($b/t_f=12$ 、 $A_f/A_w=1.0$)



(a) $M_x/M_y=0.75$ (b) $M_x/M_y=0.885$

図8. 塑性域の進展状況($b/t_f=16$ 、 $A_f/A_w=0.75$)

重付近の2つの荷重レベルについて図示してある。図を見ると三者ともに荷重レベルの増大に伴って、圧縮フランジとウェブの接合部付近を中心に塑性域が広がっている様子がわかる。特にウェブとフランジとの接合部には、フランジのねじれによって比較的大きな板曲げ応力が作用するので、荷重レベルの低い段階からフランジに先んじて板表面が塑性化している。荷重レベルが増大すると中央部よりも荷重載荷辺付近に多くの塑性領域が見られるが、これは荷重載荷辺でウェブの面外変形を拘束した結果、載荷辺付近の要素に円周方向まわりの板曲げモーメントが生ずるためと考えられる。3つのモデルの結果を比べると、フランジ幅厚比が同じ2つのモデルの塑性化状況は、フランジとウェブの断面積比が大きく異なっているにもかかわらず、終局状態において



(a) $M_F/M_Y=0.75$ (b) $M_F/M_Y=0.850$
図9. 塑性域の進展状況 ($b/t_f=16$, $A_f/A_w=0.2$)

比較的類似している。このことから、通常のI形断面曲線桁の場合、フランジ幅厚比が曲げ終局状態における塑性化状況に及ぼす影響は大きいと考えられる。また、この3つの図において、圧縮フランジ内部の塑性域の広がりに着目すると、曲率中心に向かって外側よりも内側に塑性化した部分が多く存在していることがわかる。このことは、桁の曲率が塑性域の進展に影響していることを意味している。さらに塑性域の板厚方向への広がりについて着目してみると、フランジ幅厚比の小さいモデルの方がより深く塑性化が進行していることがわかる。これは、フランジ幅厚比が大きいと、塑性化の進行だけでなくフランジの変形の増大によっても終局的な耐荷機能が低下するためと考えられる。なお、今回の解析を通じて対象としたすべてのモデルに関し、最高荷重に到達した後もひずみ硬化を生じた要素は現われなかった。従って、鋼材としてSS41を使用する場合には、材料を完全弾塑性体と見なして解析しても良いと考えられる。

5. 結 論

以上の解析結果から次の結論が得られる。

- (1) 本論文のHerrmannの混合型有限要素法に基づく有限要素定式化は、板殻構造物の弾塑性有限変位解析に適用できる。
- (2) I型断面曲線桁の耐荷力を弾塑性有限変位解析を用いて決定することができた。
- (3) 使用鋼材がSS41である場合、現行の道路橋示方書で規定されている範囲内では、I形断面曲線桁の曲げ耐荷力に対するフランジとウェブの断面積比の影響が大きい。
- (4) I形断面曲線桁の塑性領域の進展に対しては、フランジ幅厚比の影響が大きい。
- (5) I形断面曲線桁の耐荷力解析においては、使用鋼材をSS41とした場合解析モデルとして通常用いられているような断面を選べば、材料を完全弾塑性体と見なして解析しても良いと考えられる。

参考文献

- 1) Culver, C.G., Dym, C.L. and Brogan, D.K.: Bending behavior of cylindrical web panels, Proc. ASCE, Vol.98, No.ST10, pp.2291~2308, Oct., 1972.
- 2) Culver, C.G., Dym, C.L. and Uddin, T. : Web slenderness requirements for curved girders, Proc. ASCE, Vol.99, No.ST3, pp.417~430, Mar., 1973.
- 3) Mariani, N., Mozer, J.D., Dym, C.L. and Culver C.G.: Transvers stiffener requirements for curved webs, ASCE, Vol.99, No.ST4, pp.757~771, Apr., 1973.
- 4) Dabrowski, R. and Wachowiak, J. : Stress in thin cylindrical webs of curved plate girders, Proc. of Colloquium on Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength, London, 1971, IABSE, Vol.11, pp.337~352, 1972.
- 5) Abdel-Sayed, G. : Curved webs under combined shear and normal stresses, Proc.ASCE, Vol.99, No.ST3, pp511~525, Mar., 1973.
- 6) 三上市蔵・古西和夫・米沢博 : 曲げを受ける円筒腹板パネルの非線形挙動, 土木学会論文報告集, No.299, pp.23~34, 1980-7.
- 7) 倉西茂・樋渡滋 : 曲げを受ける曲線プレートガーターのウェブプレートの弾性挙動について、土木学会論文報告集, No.315, pp.1~11, 1981-11.
- 8) 樋渡滋・倉西茂 : 曲げを受ける I 型断面弾性曲線プレートガーターの有限変位挙動について、土木学会論文集・I, No.350, pp.59~69, 1984-10. (英文)
- 9) 藤井堅・大村裕 : フランジ剛性の影響を考慮した曲線桁腹板の非線形挙動、土木学会論文集・I, No.356, pp.69~79, 1985-4.
- 10) 中井博 : 北田俊行・大南亮一・川井正 : 曲げを受ける曲線桁橋腹板の解析と設計に関する一研究、土木学会論文集・I、No.368, pp.235~244, 1986-4.
- 11) 大坪英臣 : 平板の弾塑性たわみ問題の一解法, 日本造船学会論文集, No.130, pp.173~182, 1971-11.
- 12) 上田幸雄・安川度・矢尾哲也・池上博・大南亮一 : 圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第1報), 日本造船学会論文集, No.137, pp.210~221, 1975-5.
- 13) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司 : 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No.244, pp.1~14, 1975-12.
- 14) 大村裕・藤井堅・平尾克之 : 曲げを受ける曲線桁の非線形断面変形挙動と耐荷力について、土木学会第40回年次学術講演会講演概要集・I, pp. 143~144, 1985-9.
- 15) 菅井幸仁・樋渡滋・倉西茂 : 曲げを受ける曲線 I 型プレートガーターの弾塑性解析, 土木学会第41回年次学術講演会講演概要集・I, pp.165~166, 1986-11.
- 16) 中井博・北田俊行・大南亮一 : 曲線桁腹板の曲げ強度に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No.340, pp.19~28, 1983-12.
- 17) 末武義崇・平嶋政治・依田照彦 : 混合型有限要素法による I 形断面曲線桁の弾性有限変位解析, 構造工学にける数値計算シンポジウム論文集, JSSC, Vol.10, pp.377~382, 1986-7.
- 18) 吉田裕・増田陳紀・松田隆 : 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, No.288, pp.41~55, 1979-8.
- 19) 山田嘉昭 編 : 非弾性構造解析法の実用化に関する研究(I)・(II), 非弾構造解析法実用化研究分科会, 日本機械学会, 1977, 1979.
- 20) 宇佐美勉・土屋信洋・大谷恭弘・福本 士 : 薄板集成短柱の弾塑性有限変位解析、土木学会論文集・I、No.362, pp.293~302, 1985-10.

- 21) 和田均・滝佳弘・高村東作・西村融：混合要素を用いた板，かくの増分法による幾何学的非線形解析，日本機械学会論文集(A編)，Vol.46，No.404，pp.428～437，1980-4.
- 22) 末武義崇・平嶋政治・依田照彦：曲げを受ける曲線 I 桁の混合型有限要素法による幾何学的非線形解析，土木学会論文集・I，No.374，pp.1～10，1986-10.
- 23) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，培風館，1984.
- 24) Herrmann, L.R. and Campbell, D.M.: A Finite-Element Analysis for thin Shells, AIAA Journal, Vol.6, No.10, pp.1842～1847, Oct., 1968.
- 25) 武田洋：非線形問題における数値解法の基礎、構造工学における有限要素法の理論と応用、日本鋼構造協会，pp.37～46，1986.
- 26) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，丸善，1980-2.

(1986年10月17日受付)