

薄板大たわみ問題の摂動解法への 数式処理システムの適用

APPLICATION OF SYMBOLIC MANIPULATION SYSTEM TO LARGE DEFLECTION ANALYSIS OF THIN PLATES
BASED ON PERTURBATION METHOD

中村 秀治 * 松井 正一 **

By Hideharu NAKAMURA and Shouichi MATSUI

Although there are a number of general-purpose computerized symbolic manipulation systems in use, only limited applications have been made in the structural mechanics area. Sometimes symbolic generations of finite element stiffness matrices using the systems are found. However, the systems are essentially suited for obtaining the solution of differential equations rather than matrix algebra.

In this paper, application of symbolic manipulation system to large deflection analysis of thin plates based on perturbation method is discussed. Convergence characteristics are revealed through the study using higher order terms, and at the same time effectiveness of the system to perturbation method is confirmed.

1. まえがき

数式処理システムの構造解析への適用例を概観すると、有限要素マトリックス成分の数式表示に関するものが多い。^{1)~6)} 特に、非線形有限要素解析にその有用性が期待されている。また、伝達マトリックス法による動的解析、安定解析への適用例も有るが、⁷⁾ 数式処理システムはその生い立ち、開発者の志向から考えて、本来、マトリックス演算よりは、微分方程式の求解に適しているものと思われる。

本論文では、非線形微分方程式の一例として薄板の大たわみ問題を取り上げ、その摂動解法への数式処理システムの適用について述べる。この種の問題は、既に、多くの検討結果が発表されているが、その大部分が筆算による3次項まで程度の摂動解の表示に止まっている。従って、より高次項まで用いた収束性の検討などは殆ど皆無である。

本論文では、まず、問題設定したのち、その摂動解法と3次項までの摂動解を示し、次に、数式処理システム (REDUCE 3.1) によるプログラムと数式処理結果を示す。本プログラムによれば、計算機の制限が無い限り、無限項まで摂動解を求められるが、出力結果が極端に多くなるので3次項までを示すに止めた。更に、高次項を用いて収束性の検討を行い、摂動解の項数と近似度について考察した。本検討を通して、薄板の大たわみ問題に対する摂動解法の収束性が確認されると同時に、精度と摂動解の項数との関係が明らかになり、数式処理システムの摂動解法への有用性が確認された。

* 工博 (財)電力中央研究所我孫子研究所耐震構造部構造研究室 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

** 工修 (財)電力中央研究所経済研究所経営情報研究室 (〒100 東京都千代田区大手町1-6-1)

2. 薄板の大たわみ問題の設定

左図に示すように、非圧縮性の液体の上に厚さ h 、半径 a の円形薄板を置いて液体を密封し、さらに、円形薄板の中心に集中荷重 P を作用させる。

この問題に対する微分方程式は、

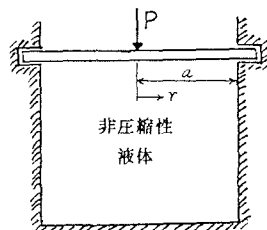


図. 1
解析
モデル

$$\beta'' + \frac{1}{r}\beta' - \frac{1}{r^2}\beta = \left[\frac{1}{r}(r\beta)' \right]' = \frac{1}{D} \left(\beta Nr - \frac{qr}{2} + \frac{P}{2\pi r} \right) \quad (1)$$

$$Nr'' + \frac{3}{r}Nr' = -\frac{Eh}{2} \frac{\beta^2}{r^2} \quad (2)$$

但し、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $(\quad)' = d(\quad)/dr$

$\beta = dW/dr$, W : 面外変位

Nr : 半径方位単位幅当り合力

q : 荷重 P により板が変形し、その変形に伴って発生する液圧となる。

境界条件は次のとおりである。

$$W(a) = 0$$

$$\beta(0) = \beta(a) = 0 \quad (3)$$

$$Nr(a) = Nr'(0) = 0$$

3. 摂動解法

円形板の中心での垂直方向（面外）変位を W_c として、以下のように β , W , N , q , P が級数展開できるものと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= W_c \beta_1(r) + W_c^3 \beta_3(r) + \dots \\ W &= W_c W_1(r) + W_c^3 W_3(r) + \dots \\ Nr &= W_c^2 N_2(r) + W_c^4 N_4(r) + \dots \\ q &= W_c q_1 + W_c^3 q_3 + \dots \\ P &= \pi(W_c P_1 + W_c^3 P_3 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)を式(1),(2)へ代入すれば、 W_c の次数を合せることにより、

$$\begin{aligned} \beta_1'' + \frac{1}{r}\beta_1' - \frac{1}{r^2}\beta_1 &= \left[\frac{1}{r}(r\beta_1)' \right]' = \frac{1}{2D} \left(-q_1 r + \frac{P_1}{r} \right) \\ \beta_3'' + \frac{1}{r}\beta_3' - \frac{1}{r^2}\beta_3 &= \left[\frac{1}{r}(r\beta_3)' \right]' = \frac{1}{2D} \left(2\beta_1 N_2 - q_3 r + \frac{P_3}{r} \right) \\ \beta_5'' + \frac{1}{r}\beta_5' - \frac{1}{r^2}\beta_5 &= \left[\frac{1}{r}(r\beta_5)' \right]' = \frac{1}{2D} \left[2(\beta_1 N_4 + \beta_3 N_2) - q_5 r + \frac{P_5}{r} \right] \\ \beta_7'' + \frac{1}{r}\beta_7' - \frac{1}{r^2}\beta_7 &= \left[\frac{1}{r}(r\beta_7)' \right]' = \frac{1}{2D} \left[2(\beta_1 N_6 + \beta_3 N_4 + \beta_5 N_2) - q_7 r + \frac{P_7}{r} \right] \end{aligned}$$

$$\beta_3'' + \frac{1}{r}\beta_3' - \frac{1}{r^2}\beta_3 = \left[\frac{1}{r}(r\beta_3)' \right]' = \frac{1}{2D} [2(\beta_1 N_8 + \beta_3 N_6 + \beta_5 N_4 + \beta_7 N_2) - q_3 r + \frac{P_3}{r}]$$

$$\dots\dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} r^3 N_2'' + 3r^2 N_2' &= (r^3 N_2')' = -\frac{1}{2} \text{Ehr } \beta_1^2 \\ r^3 N_4'' + 3r^2 N_4' &= (r^3 N_4')' = -\text{Ehr } \beta_1 \beta_3 \\ r^3 N_6'' + 3r^2 N_6' &= (r^3 N_6')' = -\frac{1}{2} \text{Ehr } (2\beta_1 \beta_5 + \beta_3^2) \\ r^3 N_8'' + 3r^2 N_8' &= (r^3 N_8')' = -\text{Ehr } (\beta_1 \beta_7 + \beta_3 \beta_5) \\ r^3 N_{10}'' + 3r^2 N_{10}' &= (r^3 N_{10}')' = -\frac{1}{2} \text{Ehr } (2\beta_1 \beta_9 + 2\beta_3 \beta_7 + \beta_5^2) \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots (6)$$

を得る。

式(5), (6)の境界条件は、式(3)を参照して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} W_1(0) &= 1, W_3(0) = W_5(0) = \dots\dots\dots = 0 \\ W_1(a) &= W_3(a) = W_5(a) = \dots\dots\dots = 0 \\ \beta_1(0) &= \beta_3(0) = \dots\dots\dots = 0 \\ \beta_1(a) &= \beta_3(a) = \dots\dots\dots = 0 \\ N_2(a) &= N_4(a) = \dots\dots\dots = 0 \\ N_2'(0) &= N_4'(0) = \dots\dots\dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

4. 摂動解^{8), 9)}

式(5)の第1次式

$$\left[\frac{1}{r}(r\beta_1)' \right]' = \frac{1}{2D} (-q_1 r + \frac{P_1}{r}) \dots\dots\dots (5.a)$$

を積分し、境界条件式(7)を用いて積分定数を定めれば、

$$\beta_1 = \frac{1}{D} \left[-\frac{1}{16} q_1 r^3 + \frac{1}{4} P_1 r \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{16} q_1 a^2 r \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$W_1 = \frac{1}{D} \left[-\frac{1}{64} q_1 r^4 + \frac{1}{8} P_1 r^2 \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{16} P_1 r^2 + \frac{1}{32} q_1 a^2 r^2 + D \right] \dots\dots\dots (9)$$

となる。

さらに、境界条件 $W_1(a) = 0$ より、

$$\frac{1}{64} q_1 a^4 - \frac{1}{16} P_1 a^2 + D = 0 \quad \dots\dots\dots (10.a)$$

および、非圧縮性の条件 $\int_0^a W r dr = W_c \int_0^a W_1 r dr + W_c^3 \int_0^a W_3 r dr + \dots\dots\dots = 0$
より、

$$\frac{1}{96} q_1 a^4 - \frac{3}{64} P_1 a^2 + D = 0 \quad \dots\dots\dots (10.b)$$

となり、式(10)を解けば、

$$P_1 = \frac{64 D}{a^2} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$q_1 = \frac{192 D}{a^2}$$

を得る。

式(11)を式(8),(9)に代入すれば、

$$\beta_1 = -\frac{12}{a^4} r^3 + \frac{16}{a^2} r \ln \frac{r}{a} + \frac{12}{a^2} r \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$W_1 = -3\left(\frac{r}{a}\right)^4 + 8\left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln \frac{r}{a} + 2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

となる。

式(6)の第2次式に、式(12)を代入して積分し、境界条件式(7)を用いれば、

$$N_2 = \frac{Eh}{a^2} \left[-\frac{3}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \frac{8}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^4 + 8\left(\frac{r}{a}\right)^4 \ln \frac{r}{a} - 16\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^2 - 5\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{23}{6} \right] \quad (14)$$

を得る。同様に、式(5)の第3次式を解けば、

$$P_3 = \frac{24502 Eh}{14175 a^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$q_3 = \frac{15349 Eh}{4725 a^4} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = \frac{12(1-\nu^2)}{a^{12} h^2} & \left[\frac{3}{20} r^{11} - \frac{3}{2} a^2 r^9 \ln \frac{r}{a} - \frac{23}{80} a^2 r^9 + \frac{20}{3} a^2 r^7 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^2 - a^4 r^7 \ln \frac{r}{a} + \frac{139}{72} a^4 r^7 \right. \\ & - \frac{32}{3} a^6 r^5 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^3 + \frac{16}{3} a^6 r^5 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^2 - \frac{46}{9} a^6 r^5 \ln \frac{r}{a} - \frac{295}{108} a^6 r^5 + \frac{23}{3} a^8 r^3 \ln \frac{r}{a} \\ & \left. - \frac{15347}{75600} a^8 r^3 + \frac{122151}{28350} a^{10} r \ln \frac{r}{a} + \frac{43147}{37800} a^{10} r \right] \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_3 = \frac{12(1-\nu^2)}{h^2} & \left[\frac{1}{80} \left(\frac{r}{a}\right)^{12} - \frac{3}{20} \left(\frac{r}{a}\right)^{10} \ln \frac{r}{a} - \frac{11}{800} \left(\frac{r}{a}\right)^{10} + \frac{5}{6} \left(\frac{r}{a}\right)^8 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^2 \right. \\ & - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^8 \ln \frac{r}{a} + \frac{163}{576} \left(\frac{r}{a}\right)^8 - \frac{16}{9} \left(\frac{r}{a}\right)^6 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^3 + \frac{16}{9} \left(\frac{r}{a}\right)^6 \left(\ln \frac{r}{a}\right)^2 - \frac{13}{9} \left(\frac{r}{a}\right)^6 \ln \frac{r}{a} \\ & \left. - \frac{139}{648} \left(\frac{r}{a}\right)^6 + \frac{23}{12} \left(\frac{r}{a}\right)^4 \ln \frac{r}{a} - \frac{160249}{302400} \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{12251}{56700} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{104939}{226800} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。

5. REDUCE プログラムの概要と、4 次項までの数式処理結果

次ページに示す REDUCE プログラム (procedure perturb(i))は、

BRH(i) : 式(5)の i 次式の右辺

NRH(i) : 式(6)の i 次式の右辺

WIO(i) : 式(7)の $r = 0$ での W_i の値(境界条件)

が、与えられたものとして、i 次の摂動解を求めるものである。

本プログラムは内容的に 4 つの部分に分けて考えるのが適当である。

① では
$$\beta_i = \int \{ (f(5) \text{ 式の } i \text{ 次式の右辺} \cdot dr + C_{i1}) \times r \} dr + C_{i2} \quad \dots\dots\dots(19)$$

但し、 C_{i1} , C_{i2} は積分定数とする。

を用いて β_i を決定する。

次に、 $\beta_i = 0$, at $r = 0$, $r = a$ の条件から C_{i1} , C_{i2} を求めている。

(REDUCE では、積分は INT(式, 変数)、ある変数を設定した時の式の値は SUB(変数=値, 式) で求まる。また、連立方程式は SOLVE(LST(式1, 式2, ……), 変数1, 変数2, ……) で解ける。答は、SOLN(1, i) に入って与えられる。)

② では、 $W_i = \int \beta_i dr$ と $r=0$ での W_i の値を用いて、 W_i を決定する。

③ では、 $W_i(a) = 0$ と、水の非圧縮性の条件 $\int_0^a W_i \cdot r \cdot dr = 0$ から、 P_i , Q_i を決定する。

④ では

$$N_{i+1} = \int \left[\frac{\int \text{式(6)の右辺} \cdot dr + CC_{i1}}{r^3} \right] dr + CC_{i2}$$

但し、 CC_{i1} , CC_{i2} は積分定数とする。

と、
$$\frac{dN_{i+1}}{dr} = 0 \quad \text{at } r = 0, \quad N_{i+1} = 0 \quad \text{at } r = a$$

の条件から N_{i+1} を決定する。

以下に、REDUCE プログラムを示す。

```

OPERATOR N,B,W,C,CC,P,Q,WIO;

ARRAY BRH(30),NRH(30),CO(50);

PROCEDURE PERTURB(I);
BEGIN;
WRITE " ";
WRITE "***** ORDER ",I,"*****";
WRITE " ";
% DFRBIR = DF(R*B(I),R)/R;
% DFRBI = DF(R*B(I),R);
DFRBIR:= INT(BRH(I),R)+C(I,1);
DFRBI := DFRBIR*R;
B(I) := (INT(DFRBI,R)+C(I,2))/R;
% BOUNDARY CONDITIONS B(I)=0 AT R=0 AND R=A;
BINUM := NUM(B(I));
COEFF(BINUM,R,CO);
WRITE"COEFF(R**0)=",CO(0);
WRITE"COEFF(R**1)=",CO(1);
BIBCO:=SUB(R=0,BINUM);
BIBCA:=SUB(R=A,B(I));
SOLVE(LST(BIBCO,BIBCA),C(I,1),C(I,2));
C(I,1):=SOLN(1,1);
C(I,2):=SOLN(1,2);
% W(I) = INT(B(I),R);
W(I) := INT(B(I),R)+ C(I,3);

```

①

```

% BOUNDARY CONDITION W(I)=WIO(I) AT R=0;
  WIBCO := SUB(R=0,W(I)) - WIO(I);
  SOLVE(WIBCO,C(I,3));
  C(I,3):=SOLN(1,1);
% DETERMINE P(I) AND Q(I);
% BOUNDARY CONDITION W(I)=0 AT R=A;
  WIBCA := SUB(R=A,W(I));
% IMCOMPRESSIBILITY CONDITION ;
  INTWIR:=INT(W(I)*R,R);
  WIBCC := SUB(R=A,INTWIR)-SUB(R=0,INTWIR);
  SOLVE(LST(WIBCA,WIBCC),P(I),Q(I));
  P(I):=SOLN(1,1);
  Q(I):=SOLN(1,2);
  WRITE "P(",I,")=",P(I);
  WRITE "Q(",I,")=",Q(I);
  WRITE "B(",I,")=",B(I);
  WRITE "W(",I,")=",W(I);
  DFNIR := INT(NRH(I+1),R)+CC(I,1);
% BOUNDARY CONDITION DF(N(I+1),R)=0 AT R=0;
  NIBCO := SUB(R=0,DFNIR);
  SOLVE(NIBCO,CC(I,1));
  CC(I,1):=SOLN(1,1);
  N(I+1) := INT(DFNIR/R**3 , R ) + CC(I,2) ;
% BOUNDARY CONDITION N(I+1)=0 AT R=A;
  N2BCA := SUB(R=A,N(I+1));
  SOLVE(N2BCA,CC(I,2));
  CC(I,2):=SOLN(1,1);
  WRITE "N(",I+1,")=",N(I+1);
END;

```

以下に、4 次項までの数式処理結果を示す。

```

OFF SOLVEWRITE;
BETA:=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 9 SUM(WC**I*B(I));
BETA := WC*(B(9)*WC8 + B(7)*WC6 + B(5)*WC4 + B(3)*WC2 + B(1))
NR :=FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 10 SUM(WC**I*N(I));
NR := WC*(N(10)*WC8 + N(8)*WC6 + N(6)*WC4 + N(4)*WC2 + N(2))
PP :=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 9 SUM(WC**I*P(I));
PP := WC*(P(9)*WC8 + P(7)*WC6 + P(5)*WC4 + P(3)*WC2 + P(1))
QQ :=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 9 SUM(WC**I*Q(I));
QQ := WC*(Q(9)*WC8 + Q(7)*WC6 + Q(5)*WC4 + Q(3)*WC2 + Q(1))
EQ1:=(BETA*NR-QQ*R/2+PP/2/R)/D¥
EQ2:=-EH*BETA**2*R/2;
EQ2 := (R*EH*WC*( - B(9)2*WC16 - 2*B(9)*B(7)*WC14 - 2*B(9)*B(5)*WC12 - 2*B(9)*B(3)*WC10 - 2*B(9)*B(1)*WC8 -
B(7)2*WC12 - 2*B(7)*B(5)*WC10 - 2*B(7)*B(3)*WC8 - 2*B(7)*B(1)*WC6 - B(5)2*WC8 - 2*B(5)*B(3)*WC6 - 2
*B(5)*B(1)*WC4 - B(3)2*WC4 - 2*B(3)*B(1)*WC2 - B(1)2))/2
DENEQ1:=DEN(EQ1)¥
DENEQ2:=DEN(EQ2)¥

```

COEFF(NUM(EQ1),WC,BRH);

19

COEFF(NUM(EQ2),WC,NRH);

18

```
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 10 DO <<
  BRH(I):=BRH(I)/DENEQ1;
  NRH(I):=NRH(I)/DENEQ2;
>>;
```

% 1-ST ORDER;

WIO(1) := 1%
PERTURB(1)%

***** ORDER 1*****

COEFF(R**0)=16*C(1,2)*D

COEFF(R**1)=0

P(1)=(64*D)/A²

Q(1)=(192*D)/A⁴

B(1)=(4*R*(- 4*LOG(A)*A² + 4*LOG(R)*A² + 3*A² - 3*R²))/A⁴

W(1)=(- 8*LOG(A)*A² + 8*LOG(R)*A² + A⁴ + 2*A²*R² - 3*R⁴)/A⁴

N(2)=(EH*(- 96*LOG(A)²*A⁴ + 192*LOG(A)*LOG(R)*A⁴ - 48*LOG(A)*A²*R⁴ - 96*LOG(R)²*A⁴ + 48*LOG(R)*A²*R⁴
+ 23*A⁶ - 30*A⁴*R² + 16*A²*R⁴ - 9*R⁶))/(6*A⁸)

% 3-RD ORDER;

WIO(3) := 0%
PERTURB(3)%

***** ORDER 3*****

COEFF(R**0)=2160*C(3,2)*A¹²*D

COEFF(R**1)=0

P(3)=(24502*EH)/(14175*A²)

Q(3)=(15349*EH)/(4725*A⁴)

B(3)=(R*EH*(2419200*LOG(A)³*A⁶*R⁴ - 7257600*LOG(A)²*LOG(R)*A⁶*R⁴ + 1209600*LOG(A)²*A⁶*R⁴ + 1512000*LOG(A)²*A⁴*
R⁶ + 7257600*LOG(A)*LOG(R)²*A⁶*R⁴ - 2419200*LOG(A)*LOG(R)*A⁶*R⁴ - 3024000*LOG(A)*LOG(R)*A⁴*R⁶ -
98008*LOG(A)¹⁰*A⁸ - 1738800*LOG(A)⁸*A²*R² + 1159200*LOG(A)⁶*A⁴*R² + 226800*LOG(A)⁴*A⁶*R² + 340200*LOG(A)²*A⁸*
R² - 2419200*LOG(R)³*A⁶*R⁴ + 1209600*LOG(R)²*A⁶*R⁴ + 1512000*LOG(R)²*A⁴*R⁶ + 98008*LOG(R)²*A⁸*
A¹⁰ + 1738800*LOG(R)⁸*A²*R² - 1159200*LOG(R)⁶*A⁴*R² - 226800*LOG(R)⁴*A⁶*R² - 340200*LOG(R)²*A⁸*R² +
258882*A¹⁰ - 46047*A⁸*R² - 619500*A⁶*R⁴ + 437850*A⁴*R⁶ - 65205*A²*R⁸ + 34020*R¹⁰))/(226800*A¹²*D)

W(3)=(R*EH*(1612800*LOG(A)³*A⁶*R⁴ - 4838400*LOG(A)²*LOG(R)*A⁶*R⁴ + 1612800*LOG(A)²*A⁶*R⁴ + 756000*LOG(A)²*A⁴*
R⁶ + 4838400*LOG(A)*LOG(R)²*A⁶*R⁴ - 3225600*LOG(A)*LOG(R)*A⁶*R⁴ - 1512000*LOG(A)*LOG(R)*A⁴*R⁶ -
196016*LOG(A)¹⁰*A⁸ - 1738800*LOG(A)⁸*A²*R² + 1310400*LOG(A)⁶*A⁴*R² + 302400*LOG(A)⁴*A⁶*R² + 136080*

$$\begin{aligned}
& \text{LOG}(A) * A^2 * R^8 - 1612800 * \text{LOG}(R) * A^3 * R^6 + 1612800 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^4 + 756000 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^4 + 196016 * \text{LOG}(R) * A^{10} \\
& + 1738800 * \text{LOG}(R) * A^8 * R^2 - 1310400 * \text{LOG}(R) * A^6 * R^4 - 302400 * \text{LOG}(R) * A^4 * R^6 - 136080 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^8 \\
& + 419756 * A^{10} - 480747 * A^8 * R^2 - 194600 * A^6 * R^4 + 256725 * A^4 * R^6 - 12474 * A^2 * R^8 + 11340 * R^{10} \big) / (907200 * A^{12} * D) \\
N(4) = & E H^2 * (1693440000 * \text{LOG}(A) * A^4 * R^8 - 6773760000 * \text{LOG}(A) * A^3 * \text{LOG}(R) * A^8 * R^6 + 1552320000 * \text{LOG}(A) * A^3 * R^8 + 1397088000 * \\
& \text{LOG}(A) * A^3 * R^8 + 10160640000 * \text{LOG}(A) * A^2 * \text{LOG}(R) * A^8 * R^6 - 4656960000 * \text{LOG}(A) * A^2 * \text{LOG}(R) * A^8 * R^6 - 4191264000 * \\
& \text{LOG}(A) * A^2 * \text{LOG}(R) * A^6 * R^8 - 411633600 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^{12} - 2434320000 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^{10} + 1111320000 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^8 \\
& * R^6 + 943034400 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^8 + 412776000 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^{10} - 6773760000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^3 * R^8 + \\
& 4656960000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^2 * R^8 + 4191264000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^2 * R^8 + 823267200 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^{12} * R^2 \\
& + 4868640000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^{10} * R^4 - 2222640000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^8 * R^6 - 1886068800 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^6 * R^8 \\
& R^8 - 825552000 * \text{LOG}(A) * \text{LOG}(R) * A^4 * R^{10} + 778579200 * \text{LOG}(A) * A^{12} * R^2 - 370234200 * \text{LOG}(A) * A^{10} * R^4 - \\
& 1500870000 * \text{LOG}(A) * A^8 * R^6 + 797186880 * \text{LOG}(A) * A^6 * R^8 + 109279800 * \text{LOG}(A) * A^4 * R^{10} + 57834000 * \text{LOG}(A) * A^2 * R^{12} \\
& + 1693440000 * \text{LOG}(R) * A^4 * R^8 - 1552320000 * \text{LOG}(R) * A^3 * R^8 - 1397088000 * \text{LOG}(R) * A^3 * R^8 - 411633600 * \\
& \text{LOG}(R) * A^2 * R^{12} - 2434320000 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^{10} + 1111320000 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^8 + 943034400 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^8 + \\
& 412776000 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^{10} - 778579200 * \text{LOG}(R) * A^{12} * R^2 + 370234200 * \text{LOG}(R) * A^{10} * R^4 + 1500870000 * \text{LOG}(R) * A^8 * R^6 \\
& * R^6 - 797186880 * \text{LOG}(R) * A^6 * R^8 - 109279800 * \text{LOG}(R) * A^4 * R^{10} - 57834000 * \text{LOG}(R) * A^2 * R^{12} + 3443707 * A^{14} - \\
& 128635500 * A^{12} * R^2 + 368771200 * A^{10} * R^4 - 182995925 * A^8 * R^6 - 177274062 * A^6 * R^8 + 118796580 * A^4 * R^{10} - \\
& 5933250 * A^2 * R^{12} + 3827250 * R^{14} \big) / (476280000 * A^{16} * D)
\end{aligned}$$

6. 数値計算結果の検討

前述のREDUCEプログラムを用いて求めた摂動解をFORTRANプログラムに変換し（REDUCEでは自動的に行える）、数値計算を行った。この結果を $(a^2/Eh^3)Nr$ および $(a^2/Eh^3)N\theta$ と (Wc/h) の関係で示したのが 図.2 と 図.3（いずれも摂動解8次項まで）である。更に、摂動解の収束性を検討するために、8次項まで取ったものを仮りに真の値とし、2次項、4次項、6次項までとった場合の相対誤差を $N\theta$ の $(r/a=0.1)$ について、図.4に示した。相対誤差 Err は次式で求めている。

$$\text{Err} = \log_{10} \left| \frac{i \text{ 項まで取った値} - 8 \text{ 次項まで取った値}}{8 \text{ 次項まで取った値}} \right| \quad \dots\dots (20)$$

これから、薄板大たわみ問題の非線形性の程度と、摂動解法を採用した場合の収束性が、おおよそ判断できる。即ち、中心位置での面外変位 Wc が、板厚 h に達するかなり以前から面内応力を生じて、連成効果が表れるが、特に、板厚 h 以上に達した時、非線形性が急速に増大する。摂動項数と精度については、 (Wc/h) が小さい（変位が小さい）場合には、少ない項数で十分な精度が得られる（ $(Wc/h)=1$ で4次項まで取れば、4桁の精度）が、 (Wc/h) が大きくなれば、より多くの項数が必要である（ $(Wc/h)=3$ で6次項まで取って、3桁の精度）。

また、 Nr , β , w , P , q についても、収束の程度、精度は、ほぼ同様の結果を得た。

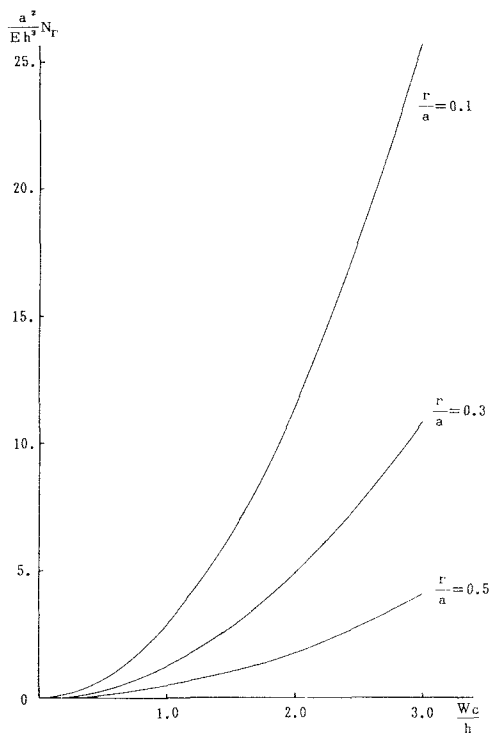


図. 2 面外変位と半径方向面内力の関係

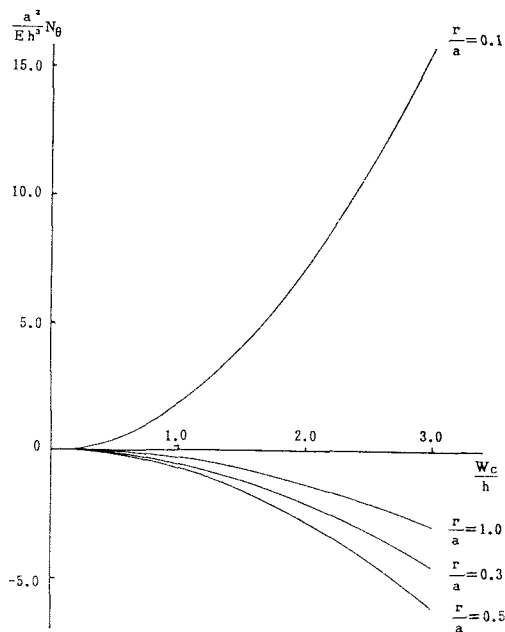


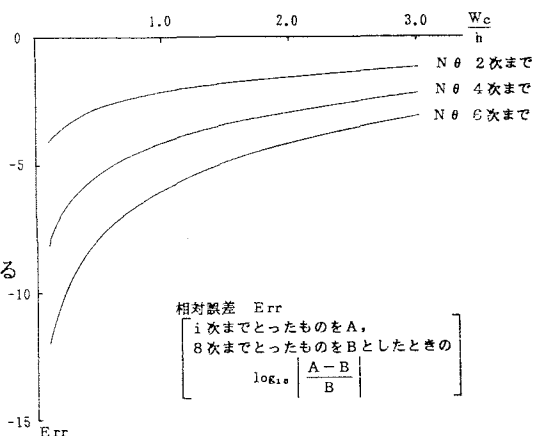
図. 3 面外変位と周方向面内力の関係

図. 4

$$\frac{r}{a} = 0.1 \text{ における}$$

周方向合力 N_θ の相対誤差

(但し、 $N_\theta = N_r + r \cdot N_r'$)



7. 結 び

以上、薄板大たわみ問題の一例として非圧縮性液体をシールした円板の中心に面外方向集中心力が作用する場合を取り上げ、数式処理システムによる解法を示した。摂動解の低次項について、別途、筆算で得た結果と比較してプログラム内容を確認の上、高次項まで用いた検討を行った。その結果、薄板大たわみ問題における非線形効果が定量的にとらえられたと同時に、必要な摂動解の次数が明らかになった。

本論文に述べた解法、手順は、数式処理システムによる非線形方程式の摂動解法一般に適用可能であり、解析的に非線形方程式の近似解を得る際に有力な手段として役立つであろう。関連して今後検討すべき課題は、線形方程式に対する同様の解法を見出すことであり、それを解決することにより、微分方程式の解析的近似解法としての立場を築くことができるものと思われる。

なお、本論文における計算例は電力中央研究所大型計算機システム (FACOM M-200)を用いて行ったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 中村秀治・松井正一：REDUCE を用いて有限要素マトリクス成分を数式表示するためのプログラム例、東大大型計算機センター、REDUCE プログラミング資料第三集、1986年3月
- 2) Noor,A.K. and Andersen,C.M.: Computerized symbolic manipulation in structural mechanics - progress and potential,Computers & Structures, Vol.10, pp95-118, 1979
- 3) Noor,A.K. and Andersen,C.M.:Computerized symbolic manipulation in nonlinear finite element analysis, Computers & Structures, Vol.13, pp379-403, 1981
- 4) Fateman,R.J.: Symbolic and algebraic computer programming systems, Handouts for a short course of International Conference of Mathematics Educators, Berkeley, Calif., 1980
- 5) Korncoff,A.R. and Fenves,S.J.: Symbolic generation of finite element stiffness matrices, Computers & Structures, Vol.10,pp119 - 124, 1979
- 6) Rizzi,N. and Tatone,A: Symbolic manipulation in buckling and post buckling analysis, Computers & Structures, Vol.21,pp691 - 700, 1985
- 7) 中村秀治・寺野隆雄：伝達マトリクス法に基づく動的解析、安定解析への数式処理システムの適用、構造工学論文集、Vol.32A, 1986,4
- 8) Jin, M. G. : Finite Deflection of a Circular Plate Sealing an Incompressible Fluid,Master Thesis,The Univ of Arizona, 1980
- 9) Schmidt,R.: Finite Deflections of a Circular Plate Sealing an Incompressible Liquid, Journal of Applied Mechanics, Vol.43, Dec. 1976, pp.694-695

(1986年10月17日受付)