

ベクトル計算機を用いた円筒パネルの弾塑性有限変位解析

FINITE DEFORMATION ANALYSIS OF ELASTO-PLASTIC CYLINDRICAL
PANELS USING VECTOR PROCESSOR

三上 市藏* 田中 克弘**

By Ichizou MIKAMI and Katsuhiro TANAKA

A super computer was used to analyze the cylindrical panels subjected to circumferential inplane compression or tension on the basis of the theory for geometrical and material nonlinear thin-shells. The dynamic relaxation method (D.R.M.) was examined, and it was found that the D.R.M. is a very powerful method for the large deflection analysis of elasto-plastic shells using the super computers.

1. まえがき

構造工学の分野において、弾塑性解析や有限変位解析など種々の非線形問題の解析にスーパーコンピュータが有効であるが、FACOM VP シリーズ、HITAC S-810 シリーズ、NEC SXシリーズなどの「演算パイプライン方式のベクトル計算機」を使用する場合、ピーク性能を引き出すのは容易ではない。有限要素法、境界要素法、差分法などで遭遇する大型の連立方程式を解くには、反復解法、とくに共役勾配法が適している¹ことがわかっているが、一般に解法やプログラミングに種々の工夫が必要になる。^{2, 3}

多くの問題に適用され、⁴ 実用にも供されている⁵ 反復解法の一種に動的緩和法(Dynamic Relaxation Method)^{6, 7, 8}がある。この方法によれば、与えられた問題と等価な動的問題が反復的に解かれる。個々の反復計算は簡単な代数計算であり、プログラミングも比較的容易である。シミュレーション言語を用いてプログラミングを簡単にすることもできる。⁹ 通常、場と時間に関して差分法によって離散化されるが、時間に関して差分法、場に関して有限要素法によって離散化する方法¹⁰もある。

この動的緩和法は、つり合い方程式および断面力～変位関係式を直接使い、微小時間間隔で順次数値を代入計算するだけで解が得られるので、きわめてベクトル計算機に向いた解法である。著者^{11, 12}は、円周方向面内荷重を受ける円筒パネルの弾性有限変位解析を例に、ベクトル計算機への動的緩和法の有用性を検討した。その結果、①大次元非線形連立方程式を解かないので、係数マトリックスを記憶する必要がなく、変位、ひずみ、応力、断面力などのベクトルを記憶するだけでよいので、電子計算機の記憶容量が少なくてすむ。②プログラミングがいたって簡単である。③多数の荷重段階に対して、順次解を求めてゆくことができるほか、任意荷重に対する解を直接に早く安定して求めることもできる。④大次元問題になるほど、慣用の解法より早く解が得られる、などがわかった。

* 工博 関西大学教授 工学部土木工学科 (〒564 吹田市山手町3丁目3番35号)

** 工修 日本電子計算機 大阪支店技術営業部 (〒550 大阪市西区江戸堀1丁目9番1号)

本論文では、円周方向面内荷重を受ける円筒パネルの弾塑性有限変位挙動をベクトル計算機を用いて解析する場合、幾何学的・材料的非線形解析法として動的緩和法の有用性を検討する。また、ベクトル計算機用プログラムチューニング支援ツールを用いると、スカラー計算機上での実行結果からベクトル計算機上のベクトル効率を推定することができる。そこで、種々のベクトル計算機用プログラミング技法^{2,3}を検討して、プログラムの改良を試みる。

2. 初期たわみを有する円筒パネルの複合非線形解析

Fig.1 に示すような弧長 a 、幅 b 、厚さ h 、曲率半径 R の円筒パネルを解析する。¹³ パネルは等方性・完全弾塑性材料（降伏応力 σ_y 、Young 率 E 、Poisson 比 ν ）より成り、初期たわみ w_0 を有するが、残留応力はないものとする。座標軸を Fig.1 のように設定し、変位 u 、 v 、 w および断面力の正の方向を Fig.2 のように定義する。荷重として、両直線端辺に一樣な円周方向強制変位 v_m を与える。 $v_m > 0$ の場合は円周方向面内引張荷重が、 $v_m < 0$ の場合は円周方向面内圧縮荷重が作用することになる。

2.1 基礎方程式

Kirchhoff-Love の仮定が成り立つものとして、薄い弾性シェルに対する Washizu の非線形理論¹⁴ を初期たわみのある場合に拡張した三上・矢部¹⁵ の式を単純化し、弾塑性シェルに対する理論とする。

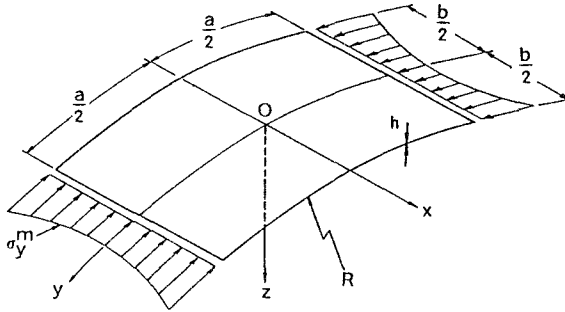


Fig.1 A cylindrical panel under circumferential inplane-load

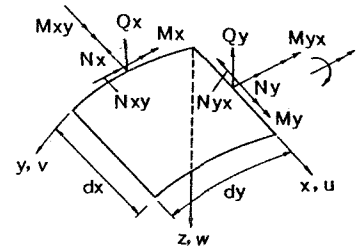


Fig.2 Positive displacements and stress-resultants

(1) ひずみ-変位関係

円筒パネル中央面から z の位置におけるひずみ成分 e_x^z 、 e_y^z 、 e_{xy}^z は次のようになる。

$$e_x^z = e_x - z \kappa_x, \quad e_y^z = e_y - z \kappa_y, \quad e_{xy}^z = e_{xy} - z \kappa_{xy} \quad (1a-c)$$

ここに、 e_x 、 e_y 、 e_{xy} は中央面のひずみ成分、 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} は曲率およびねじりの変化量であり、次のように表される。

$$e_x = \varepsilon_x + \frac{1}{2} \phi_x^2 + \phi_x \phi_{0x}, \quad e_y = \varepsilon_y + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_y \phi_{0y}, \quad (2a-c)$$

$$e_{xy} = \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} (\phi_x \phi_y + \phi_x \phi_{0y} + \phi_y \phi_{0x}) \quad (2a-c)$$

$$\kappa_x = \phi_{x,x}, \quad \kappa_y = \phi_{y,y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{2} [\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + (\varepsilon_{xy} + \phi)/R] \quad (3a-c)$$

ただし、

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y} - w/R, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (v_{,x} + u_{,y}) \quad (4a-c)$$

$$\phi_x = w_{,x}, \quad \phi_y = w_{,y} + v/R, \quad \phi = \frac{1}{2} (v_{,x} - u_{,y}) \quad (5a-c)$$

$$\phi_{0x} = w_{0,x}, \quad \phi_{0y} = w_{0,y} \quad (6a-b)$$

増分量を記号 Δ で表すことにすれば、式(1)～(5)の増分表示は次のようになる。

$$\Delta e_x^1 = \Delta e_x - z \Delta \kappa_x, \quad \Delta e_y^1 = \Delta e_y - z \Delta \kappa_y, \quad \Delta e_{xy}^1 = \Delta e_{xy} - z \Delta \kappa_{xy} \quad (7a-c)$$

$$\Delta e_x = \Delta \varepsilon_x + \frac{1}{2} \Delta \phi_x^2 + (\phi_x + \phi_{0x}) \Delta \phi_x,$$

$$\Delta e_y = \Delta \varepsilon_y + \frac{1}{2} \Delta \phi_y^2 + (\phi_y + \phi_{0y}) \Delta \phi_y,$$

$$\Delta e_{xy} = \Delta \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} [\Delta \phi_x \Delta \phi_y + (\phi_x + \phi_{0x}) \Delta \phi_y + (\phi_y + \phi_{0y}) \Delta \phi_x] \quad (8a-c)$$

$$\Delta \kappa_x = \Delta \phi_{x,x}, \quad \Delta \kappa_y = \Delta \phi_{y,y},$$

$$\Delta \kappa_{xy} = \frac{1}{2} [\Delta \phi_{x,y} + \Delta \phi_{y,x} + (\Delta \varepsilon_{xy} + \Delta \phi)/R] \quad (9a-c)$$

$$\Delta \varepsilon_x = \Delta u_{,x}, \quad \Delta \varepsilon_y = \Delta v_{,y} - \Delta w/R, \quad \Delta \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (\Delta v_{,x} + \Delta u_{,y}) \quad (10a-c)$$

$$\Delta \phi_x = \Delta w_{,x}, \quad \Delta \phi_y = \Delta w_{,y} + \Delta v/R, \quad \Delta \phi = \frac{1}{2} (\Delta v_{,x} - \Delta u_{,y}) \quad (11a-c)$$

(2) 応力-ひずみ関係

平面応力状態が近似的に成り立つものとして、 x 方向直応力 σ_x^1 、 y 方向直応力 σ_y^1 、 xy 面内せん断応力 σ_{xy}^1 のみを考える。応力-ひずみ関係は、弾性域では Hookeの法則に、塑性域では Prandtl-Reuss式¹⁶に従うものとする。降伏判定には von Mises の降伏条件式を用いる。

任意面における応力増分 $\Delta \sigma_x^1$ 、 $\Delta \sigma_y^1$ 、 $\Delta \sigma_{xy}^1$ は、弾性域においては

$$\Delta \sigma_x^1 = (\Delta e_x^1 + \nu \Delta e_y^1) E / (1 - \nu^2), \quad \Delta \sigma_y^1 = (\Delta e_y^1 + \nu \Delta e_x^1) E / (1 - \nu^2) \\ \Delta \sigma_{xy}^1 = \Delta e_{xy}^1 E / (1 + \nu) \quad (12a-c)$$

となり、塑性域においては偏差応力 S_x^1 、 S_y^1 、 S_{xy}^1 を用いて次のように表される。

$$\Delta \sigma_x^1 = (\Delta e_x^1 + \nu \Delta e_y^1) E / (1 - \nu^2) - S_1^1 \Delta \lambda^1 \quad (13a)$$

$$\Delta \sigma_y^1 = (\Delta e_y^1 + \nu \Delta e_x^1) E / (1 - \nu^2) - S_2^1 \Delta \lambda^1 \quad (13b)$$

$$\Delta \sigma_{xy}^1 = \Delta e_{xy}^1 E / (1 + \nu) - S_3^1 \Delta \lambda^1 \quad (13c)$$

ここに、

$$\Delta \lambda^1 = (S_1^1 \Delta e_x^1 + S_2^1 \Delta e_y^1 + 2 S_3^1 \Delta e_{xy}^1) / S_0^1 \quad (14)$$

$$S_0^1 = S_1^1 S_x^1 + S_2^1 S_y^1 + 2 S_3^1 S_{xy}^1, \quad S_1^1 = (S_x^1 + \nu S_y^1) E / (1 - \nu^2) \quad (15a-b)$$

$$S_2^1 = (S_y^1 + \nu S_x^1) E / (1 - \nu^2), \quad S_3^1 = S_{xy}^1 E / (1 + \nu) \quad (15c-d)$$

$$S_x^1 = (2\sigma_x^1 - \sigma_y^1) / 3, \quad S_y^1 = (2\sigma_y^1 - \sigma_x^1) / 3, \quad S_{xy}^1 = \sigma_{xy}^1 \quad (16a-c)$$

であり、 σ_x^1 、 σ_y^1 、 σ_{xy}^1 は任意面の全応力である。

(3) 断面力-応力関係

断面力と応力の関係は曲率の影響を無視すると、次のように増分表示される。

$$\Delta N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_x^1 dz, \quad \Delta N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y^1 dz, \quad \Delta N_{xy} = \Delta N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}^1 dz \quad (17)$$

$$\Delta M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_x^1 z dz, \quad \Delta M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y^1 z dz, \quad \Delta M_{xy} = \Delta M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}^1 z dz \quad (18)$$

(4) つり合い式

微小要素に対して仮想仕事の原理を適用し、高次項を無視すると静的つり合い式が得られる。動的緩和法を適用するために、慣性項および減衰項を付加すると、運動方程式が次のように得られる。

$$\rho_u \dot{u}_{,t} + k_u \dot{u} = N_{x,x} + N_{yx,y} \quad (19a)$$

$$\rho_v \dot{v}_{,t} + k_v \dot{v} = N_{y,y} + [N_{xy} - M_{xy}/R]_{,x} - [M_{y,y} + 2 M_{xy,x}] / R \quad (19b)$$

$$\rho_w \dot{w}_{,t} + k_w \dot{w} = M_{x,xx} + M_{yx,xy} + M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x (\phi_x + \phi_{0x})_{,x} \\ + N_{xy} (\phi_y + \phi_{0y})_{,x} + N_{yx} (\phi_x + \phi_{0x})_{,y} + N_y (\phi_y + \phi_{0y})_{,y} + N_y / R \quad (19c)$$

ただし、 t は時間、 ρ_u 、 ρ_v 、 ρ_w は面密度、 k_u 、 k_v 、 k_w は減衰係数であり、 $\dot{u}$ 、 $\dot{v}$ 、 $\dot{w}$ は変位速度で、変位との関係は次のようになる。

$$\dot{u} = u_{,t}, \quad \dot{v} = v_{,t}, \quad \dot{w} = w_{,t} \quad (20)$$

式(19)および(20)を増分表示すると次のようになる。

$$\rho_u \Delta \dot{u}_{,t} + k_u \Delta \dot{u} = \Delta N_{x,x} + \Delta N_{xy,y} \quad (21a)$$

$$\rho_v \Delta \dot{v}_{,t} + k_v \Delta \dot{v} = \Delta N_{y,y} + \Delta N_{xy,x} - [\Delta M_{y,y} + 2 \Delta M_{xy,x}] / R \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \rho_w \Delta \dot{w}_{,t} + k_w \Delta \dot{w} = & \Delta M_{x,xx} + 2 \Delta M_{xy,xy} + \Delta M_{y,yy} \\ & + (N_x + \Delta N_x) \Delta \phi_{x,x} + \Delta N_x (\phi_{x,x} + \phi_{0x,x}) \\ & + (N_{xy} + \Delta N_{xy}) (\Delta \phi_{y,x} + \phi_{x,y}) + \Delta N_{xy} (\phi_{y,x} + \phi_{0y,x} + \phi_{x,y} + \phi_{0x,y}) \\ & + (N_y + \Delta N_y) \Delta \phi_{y,y} + \Delta N_y (\phi_{y,y} + \phi_{0y,y}) + \Delta N_y / R \end{aligned} \quad (21c)$$

$$\Delta \dot{u} = \Delta u_{,t}, \quad \Delta \dot{v} = \Delta v_{,t}, \quad \Delta \dot{w} = \Delta w_{,t} \quad (22a-c)$$

2.2 境界条件式

対称変形を考慮し、円筒パネルの $1/4$ 領域を解析対象とする。

(1) 面外変形に関する境界条件

円筒パネルは周辺単純支持されているものとする、境界条件および対称条件は増分表示で次のようになる。

$$x = b/2 \text{ において} \quad \Delta w = 0, \quad \Delta M_x = 0 \quad (23a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において} \quad \Delta w = 0, \quad \Delta M_y = 0 \quad (24a-b)$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ において} \quad \Delta w(x) = \Delta w(-x), \quad \Delta M_x(x) = \Delta M_x(-x), \quad \Delta M_y(x) = \Delta M_y(-x), \\ \Delta M_{xy}(x) = -\Delta M_{xy}(-x) \end{aligned} \quad (25a-d)$$

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ において} \quad \Delta w(y) = \Delta w(-y), \quad \Delta M_x(y) = \Delta M_x(-y), \quad \Delta M_y(y) = \Delta M_y(-y), \\ \Delta M_{xy}(y) = -\Delta M_{xy}(-y) \end{aligned} \quad (26a-d)$$

動的緩和法では、すべての境界条件を満足するように、運動方程式(21)から変位速度 $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ を求めることになるが、そのためには断面力に関する境界条件(23b) および(24b) を変位で表示しなければならず、煩雑になる。そこで、断面力表示のまま慣性項と減衰項を付加する技法¹⁷を採用することにして、次のように変形する。

$$\rho_w \Delta \dot{w}_{,t} + k_w \Delta \dot{w} = \Delta M_x \quad (27)$$

$$\rho_w \Delta \dot{w}_{,t} + k_w \Delta \dot{w} = \Delta M_y \quad (28)$$

(2) 面内変形に関する境界条件

直線端辺では一様円周方向強制変位 v_m を受けるとともに、膜せん断力 N_{yx} が生じず、円弧側辺では法線方向膜力 N_x および膜せん断力 N_{xy} が生じないものとする、境界条件および対称条件は増分表示で次のようになる。

$$x = b/2 \text{ において} \quad \Delta N_x = 0, \quad \Delta N_{xy} = 0 \quad (29a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において} \quad \Delta v = \Delta v_m, \quad \Delta N_{yx} = 0 \quad (30a-b)$$

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ において} \quad \Delta u(x) = -\Delta u(-x), \quad \Delta v(x) = \Delta v(-x), \quad \Delta N_x(x) = \Delta N_x(-x), \\ \Delta N_y(x) = \Delta N_y(-x), \quad \Delta N_{xy}(x) = -\Delta N_{xy}(-x) \end{aligned} \quad (31a-e)$$

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ において} \quad \Delta u(y) = \Delta u(-y), \quad \Delta v(y) = -\Delta v(-y), \quad \Delta N_x(y) = \Delta N_x(-y), \\ \Delta N_y(y) = \Delta N_y(-y), \quad \Delta N_{yx}(y) = -\Delta N_{yx}(-y) \end{aligned} \quad (32a-e)$$

式(29a), (29b)および(30b) は、(1)と同様に、慣性項と減衰項を付加して次のように変形する。

$$\rho_u \Delta \dot{u}_{,t} + k_u \Delta \dot{u} = -\Delta N_x, \quad \rho_v \Delta \dot{v}_{,t} + k_v \Delta \dot{v} = -\Delta N_{xy} \quad (33)$$

$$\rho_u \Delta \dot{u}_{,t} + k_u \Delta \dot{u} = -\Delta N_{yx} \quad (34)$$

2.3 初期たわみ

円周方向および母線方向に1半波の初期たわみを仮定する。

$$w_0(x, y) = w_{0max} \cos \pi x \cos \pi y \quad (35)$$

3. 動的緩和法の適用

運動方程式(21)の減衰自由振動を、変位－変位速度関係式(22)、ひずみ－変位関係式(7)～(11)、応力－ひずみ関係式(12)または(13)～(16)、断面力－応力関係式(17)、(18)を使って、境界条件式(23a)、(24a)、(25)～(28)、(30a)、(31)～(34)のもとで計算する。時間に関して繰り返し計算すれば、減衰項の影響により式(21)、(27)、(28)、(33)、(34)の左辺が0に近づき、最終的に静的解に到達する。

(1) 差分表示

式は場および時間に関する偏微分方程式であるので、差分法を用いる。場については円筒パネルの1/4領域を、x方向に n_x 分割、y方向に n_y 分割、z方向に n_z 分割し、時間については Δt 間隔に分割する。基礎方程式および境界条件式の時間に関する微分係数は、新しい技法^{12, 17}に従って、 Δt 間隔の時刻における変位、変位速度、ひずみ、応力、断面力の値を用いて差分表示する。

式(21)の左辺第一項を時刻 $s \Delta t$ において前進差分表示すると、

$$\Delta \dot{u}_{s+1} = [(\rho_u - k_u \Delta t) \Delta \dot{u}_s + \Delta t \{ \text{式(21a)の右辺} \}_s] / \rho_u \quad (36a)$$

$$\Delta \dot{v}_{s+1} = [(\rho_v - k_v \Delta t) \Delta \dot{v}_s + \Delta t \{ \text{式(21b)の右辺} \}_s] / \rho_v \quad (36b)$$

$$\Delta \dot{w}_{s+1} = [(\rho_w - k_w \Delta t) \Delta \dot{w}_s + \Delta t \{ \text{式(21c)の右辺} \}_s] / \rho_w \quad (36c)$$

となり、式(22)の右辺を時刻 $(s+1)\Delta t$ において後退差分表示すると、次式が得られる。

$$\Delta u_{s+1} = \Delta u_s + \Delta t \Delta \dot{u}_{s+1} \quad (37a)$$

$$\Delta v_{s+1} = \Delta v_s + \Delta t \Delta \dot{v}_{s+1} \quad (37b)$$

$$\Delta w_{s+1} = \Delta w_s + \Delta t \Delta \dot{w}_{s+1} \quad (37c)$$

場に関して、式(9)、(10)、(11)および(21)を差分表示する。その際、プログラミングの簡易化のため、仮想分点を用いない方法⁵を採用する。

(2) 反復計算手順

基礎方程式は9つのルーチンに分けられ、各ルーチンを使って次のStep 1からStep 9の手順を変位速度が無視できる程度に小さくなるまで繰り返す。

【Step 1】式(10)および(11)に対するルーチンSTRN0を使って、時刻 $s \Delta t$ において、変位増分から、中央面の線形ひずみ増分と回転成分増分を求める。

【Step 2】式(11a)および(11b)の導関数に対するルーチンSTRN1を使って、時刻 $s \Delta t$ において、変位増分から、中央面の回転成分増分の微分係数を求める。

【Step 3】式(9)に対するルーチンCURVEを使って、時刻 $s \Delta t$ において、中央面の線形ひずみ増分と回転成分増分の微分係数から、曲率・ねじり変化量の増分を求める。

【Step 4】式(8)に対するルーチンDSTRNを使って、時刻 $s \Delta t$ において、中央面の線形ひずみ増分と回転成分増分から、中央面の非線形ひずみを求める。

【Step 5】式(1)および(12)～(16)に対するルーチンSTRESSを使って、時刻 $s \Delta t$ において、中央面の非線形ひずみと曲率・ねじり変化量から、任意面における全応力と von Misesの等価応力を計算し、降伏判定する。そして、任意面の応力増分を求める。

【Step 6】式(17)および(18)に対するルーチンRESULTを使って、時刻 $s \Delta t$ において、任意面の応力増分から、断面力増分を求める。

【Step 7】式(21)の右辺に対するルーチンEQを使って、式(21)の右辺、すなわち不平衡力を求める。

【Step 8】式(36)に対するルーチンDDOTを使って、時刻 $s \Delta t$ における変位速度増分、変位増分、断面力増分などから、時刻 $(s+1)\Delta t$ における変位速度増分を求める。

【Step 9】式(37)に対するルーチンDDISP を使って、時刻 $s \Delta t$ における変位増分と時刻 $(s+1) \Delta t$ における変位速度増分とから、時刻 $(s+1) \Delta t$ における変位増分を求める。

(3) 初期条件

初期条件として、時刻 0 において、 $\Delta u = \Delta w = \Delta \dot{u} = \Delta \dot{v} = \Delta \dot{w} = 0$ とする、 $\Delta v = 0$ とすると、両直線端辺に衝撃荷重を加えることになるので、弾性一軸応力状態を仮定して、次の値を初期値とする。

$$\Delta v = 2 \Delta v_m y / a \quad (38)$$

(4) 無次元パラメータ

数値計算の便宜上、次に示す無次元パラメータを用る。

$$\begin{aligned} \alpha &= a/b, \quad \beta = b/h, \quad Z = b^2/hR, \quad \bar{x} = x/b, \quad \bar{y} = y/a, \quad \bar{z} = z/h, \\ (\bar{u}, \bar{v}) &= (u, v) b/h^2, \quad (\bar{w}, \bar{w}_0) = (w, w_0)/h, \quad V_m = 2v_m/a, \quad \bar{\kappa} = b\kappa \\ \bar{\sigma} &= \sigma/\sigma_Y, \quad \bar{N} = N/N_p, \quad \bar{M} = M/M_p, \quad \bar{t} = t\sqrt{D/\rho_w}/b^2, \\ (\bar{\rho}_u, \bar{\rho}_v) &= (\rho_u, \rho_v) h^2/b^2\rho_w, \\ (\bar{k}_u, \bar{k}_v) &= (k_u, k_v) h^2/\sqrt{\rho_w D}, \quad \bar{k}_w = k_w b^2/\sqrt{\rho_w D} \end{aligned} \quad (39)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は曲げ剛度、 $N_p = \sigma_Y h$ は全塑性膜力、 $M_p = 1/4 \sigma_Y h^2$ は全塑性モーメントである。なお、無次元量を示す上付き記号「 $\bar{\quad}$ 」は以下では省略する。

(5) 時間間隔

時間間隔 Δt は解の精度にはあまり関係しないので、大きくとって計算時間を短縮させるのがよいが、大き過ぎると収束しなくなる。⁹ 弾性の場合は理論値が論じられており、^{18, 19} $\Delta t \approx 1/2 [(2n_x)^2 + (2n_y/\alpha)^2]$ が適している。^{11, 12} 弾塑性の場合はやや小さい間隔が望ましいと予想されたので、弾性の場合の $1/2$ にとった。

(6) 減衰係数

減衰係数 k_w の値によって静的解への収束の早さに差がでる。 k_w が臨界減衰係数 k_w^* より小さいと、振動が生じて収束が遅くなり、逆に大きいと単調収束するが、収束が遅くなる。Rushton²⁰ は弾性板の曲げ問題について、自由振動の無次元周期 T から臨界減衰係数が $k_w^* = 4\pi/T$ として求められることを示した。彼はさらに、板の有限変位解析の場合には、 $k_w = 0$ 、 $\rho_u = \rho_v = \infty$ として自由振動を解き、その周期を求めれば、同式から k_w^* が得られるとした。²⁰

しかし、著者の研究¹²によれば、円筒パネルの弾性有限変位解析の場合はほぼ $1/2 k_w^*$ の値が適している。本論文では、弾塑性有限変位解析を行うのであるが、弾性有限変位解析^{11, 12} の場合と同じ値を用い、収束しない場合には、荷重の刻みを小さくするか、 k_w を大きくした。

(7) 数値計算例

$\alpha = 1$ 、 $\beta = 40$ 、 $Z = 0.4$ 、 $w_{0\max} = 0$ の円筒パネル ($E = 2.1 \times 10^6$ kgf/cm²、 $\nu = 0.3$) において、荷重 $V_m = -1.00 \sigma_Y/E$ に対する解を初期値として、荷重 $V_m = -1.05 \sigma_Y/E$ に対する解を求めると、パネル中央の変位速度増分 $\Delta \dot{w}$ および変位増分 Δw は時刻 t と Fig.3 ような関係にある。 $\Delta \dot{w}$ は時間とともに 0 に近づいており、収束の様子がわかる。途中で振動が生じているが、塑性域が広がるためと思われる。

(8) 分割数と解の精度

$\alpha = 1$ 、 $\beta = 48$ 、 $Z = 0$ 、 $w_{0\max} = 0.1$ の円筒パネル ($E = 2.1 \times 10^6$ kgf/cm²、 $\nu = 0.316$) において、最大強度と分割数との関係は Fig.4 のようになる。分割数 $n_x = n_y = 6$ の場合、解の誤差は 2% 以下である。

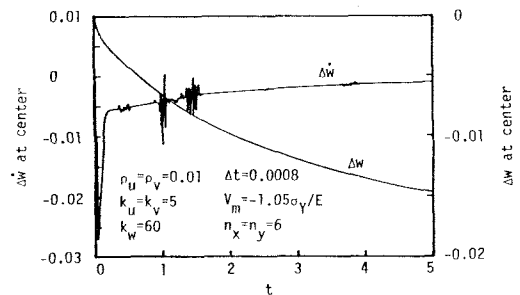


Fig.3 Variation of incremental deflection and its verocity

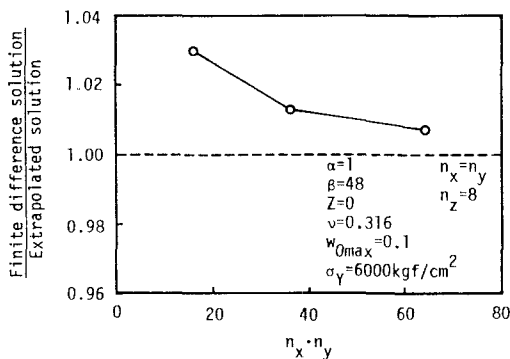


Fig.4 Accuracy of maximum strength
by D.R.M.

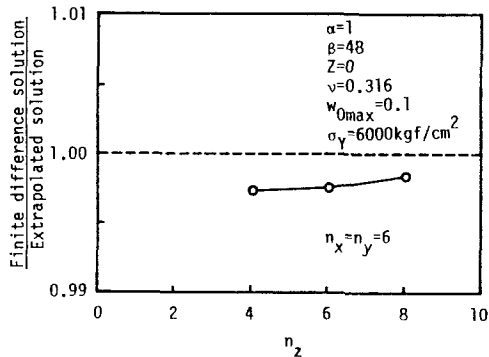


Fig.5 Accuracy of maximum strength
by D.R.M.

また、最大強度と分割数 n_z との関係はFig.5 のようになる。厚さ方向の分割は解の精度にはほとんど影響を与えないようであるが、塑性域の広がり を考慮して、以下の計算では $n_z = 8$ にとる。

(9) 他の解との比較

本理論において $Z = 0$ とおくだけで、初期たわみのある平板の弾塑性有限変位解析ができる。動的緩和法による解の妥当性を調べる目的で、Coan²¹による平板の弾性有限変位解および小松・北田

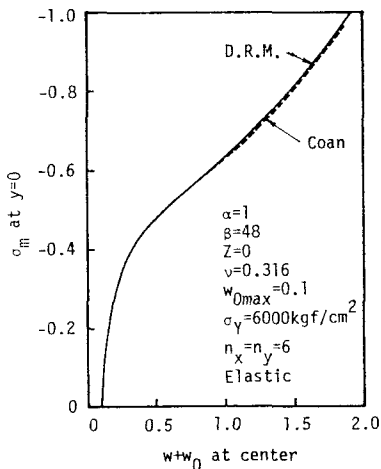


Fig.6 Comparison between
deflections obtained by
D.R.M. and other method

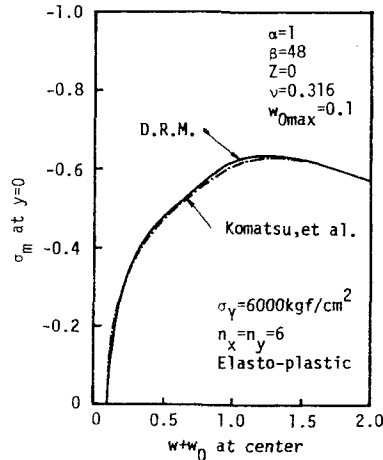


Fig.7 Comparison between
deflections obtained by
D.R.M. and other method

・宮崎²²による平板の弾塑性有限変位解と比較した。板中央の全たわみ $w + w_0$ と中央横断面の平均円周方向膜応力 σ_m との関係をFig.6 およびFig.7 に示す。これらの図から、動的緩和法による解は他の2つの解とはほぼ一致しており、妥当であることがわかる。

4. ベクトル計算機への適用

ベクトル計算機を用いた複合非線形解析法として、動的緩和法の有用性を明らかにするため、ベクトル計算機 FACOM VP-200 とスカラー計算機 FACOM M-380 を用いて、円筒パネル ($E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, $\nu = 0.3$) の弾塑性有限変位解析を行う。

(1) ベクトル計算機の特徴と動的緩和法

パイプライン方式ベクトル計算機では、1つの演算が終了しないうちに次の演算に進む並列先行処理がなされるので、ベクトル長が大で、かつ並列処理が可能な解法が望ましい。³ 動的緩和法は、計算手順を多数

のルーチンに分けて、各ルーチンでは既知ベクトルによる代入計算によって未知ベクトルの値を計算するので、並列処理が可能であり、本質的にベクトル計算機に適應する解法である。^{11, 12}

ベクトル計算機用コンパイラには、ユーザが特にハードウェアの詳細を意識しなくても、自動的にベクトル命令を生成し、高速演算を実現する自動ベクトル化機能がある。しかし、その技術が完成しているわけではなく、ベクトル効率向上のためにはユーザ側でもプログラミングの点で工夫する必要がある。今回は、次の点に留意してベクトル計算機向きのプログラムを作成した。①ベクトル長（特に、多重D O ループの場合、最内側より2つのループのベクトル長）が大きくなるようにする。②D O ループ内にはできるだけIF文やCALL文を入れない。③D O ループの数が増えないように1つのループにまとめるようにする。

(2) ベクトル効率

プログラムチューニング支援ツールFORTUNE²³ と会話型ベクトライザIVP²⁴ を用いて、分割数 $n_x = n_y = 6$, $\Delta t = 0.0008$, 反復回数10000 の場合を例にベクトル効率を調査した。結果をFig. 8に示す。図中、V-COSTはベクトル計算機で実行したときの実行コスト、S-COSTはスカラー計算機で実行したときの実行コストを示す。V-RATEは各ルーチンのベクトル化率を示し、S-COSTに占める、ベクトル化された部分のS-COSTの比率として計算される。図中、上から9個のルーチンは主要反復計算部分であるが、それらのV-RATEはすべて94%を越える高い値を示しており、これらルーチン内の演算は十分ベクトル化されている。

ベクトル長が一定値（交叉ベクトル長）以上になって初めてベクトル処理がスカラー処理より速くなる。Fig. 8において、V-EFFECTはルーチン単位のベクトル化効果を示す値で、倍率 $V-COST/S-COST$ で与えられる。これはベクトル長、演算子の種類・数などによって左右され、範囲で表示される。このプログラムの場合、ベクトル長は分割数に対応している。V-EFFECTが 0.8~2.9 とあまり良くないが、これは分割数が 6×6 （ベクトル長25）と小さいためと考えられる。

次に、ベクトル長の影響を見るために、分割数 $n_x = n_y = 6$, 10 に対するベクトル化情報を、反復計算部分とI/Oなどの部分とに分けてTable 1に示す。表中、ベクトル長とは、主要計算部分の最内側から2つのD O ループの平均ループ長である。表からわかるように、反復計算部分のV-RATEはすべて99%を越えており、特に分割数 10×10 の場合には、99.6% とほとんどの部分がベクトル化されている。V-EFFECTの値もベ

INTERACTIVE VECTORIZER			V10L20		DATE 86.02.06		TIME 00.57.28						
VECTORIZE - TOTAL INFORMATION (DYNAMIC FEATURE)				V-COST		S-COST		V-RATE		V-EFFECT		PAGE	
ROUTINE FLAG		MSG		EXECUTIONS		717825992		1339909202		99.1		0.8- 2.6	
(TOTAL)		W		116		-----							
STRESS	W	4	10001	484698461	884158407	99.8	0.8- 2.4	28					
RESULT	W	7	10002	127555506	253930776	99.5	0.9- 2.9	30					
STRNO	W	1	10002	26870373	51000198	94.6	1.0- 2.7	12					
STRN1	W	1	10002	24639927	46669332	94.4	1.0- 2.6	15					
EQ	W	1	10000	21015000	40710000	96.7	1.0- 2.8	21					
DSTRN	W	2	10001	12811280	25342534	98.8	0.9- 2.9	19					
DDOT	W	2	10000	10545000	20870000	98.9	0.9- 2.9	25					
CURVE	W	2	10002	4695939	9141828	97.2	0.9- 2.8	20					
DDISP	W	2	10000	3440000	6660000	96.6	0.9- 2.8	27					
PRINTP	W	2	10001	540306	401692	17.2	0.2- 0.5	36					
TINIT	W	5	1	491669	491669	0.0	1.0- 1.0	8					
MAIN	W	3	1	210049	210049	0.0	1.0- 1.0	1					
PRINTS	W	19	1	69569	69569	0.0	1.0- 1.0	41					
PRINTD	W	9	1	55262	55262	0.0	1.0- 1.0	39					
PRINTR	W	8	1	55166	55166	0.0	1.0- 1.0	44					
PRINTV	W	8	1	55163	55163	0.0	1.0- 1.0	37					
MIDAS1	W	1	11	44198	44198	0.0	1.0- 1.0	54					
AVLOAD	W	9	1	8301	8301	0.0	1.0- 1.0	46					
WOSTRN	W	2	1	5509	10794	97.6	0.9- 2.8	5					
PGSKIP	W	1	196	3532	3532	0.0	1.0- 1.0	48					
SUM	W	7	1	2532	4637	95.7	0.9- 2.6	32					
HEADP	W	1	2	2018	2018	0.0	1.0- 1.0	49					
HEADV	W	1	2	2018	2018	0.0	1.0- 1.0	50					
HEADD	W	1	2	2018	2018	0.0	1.0- 1.0	51					
HEADS	W	1	2	2018	2018	0.0	1.0- 1.0	52					
HEADR	W	1	2	2018	2018	0.0	1.0- 1.0	53					
DINIT	W	6	1	1799	3487	96.4	1.0- 2.8	10					
TSTRN	W	2	1	1179	2336	98.8	0.9- 2.9	18					
CONST	W	1	1	182	182	0.0	1.0- 1.0	4					
CHECK	W	6	0	0	0	0.0	0.0- 0.0	34					

Fig.8 Vectorize information by the tuning tool

Table 1 Number of mesh and effect of vector processing

Number of mesh	6x6	10x10
Vector length	25	81
Procedures		
V-Cost	71681E4	83115E4
S-Cost	133888E4	333963E4
V-Rate	99.2	99.6
I/O and others		
V-Cost	101E4	209E4
S-Cost	102E4	212E4
V-Rate	2.0	2.4
Total		
V-Cost	71782E4	83324E4
S-Cost	133991E4	334176E4
V-Rate	99.1	99.5
V-Effect	0.8-2.6	2.1-5.3

Table 2 Comparison between CPU-times by vector machine and scalar machine

Number of mesh			6x6	10x10
Vector length			25	81
Elastic	CPU time	A:M380	5.82	14.84
	(msec/cycle)	B:VP200	0.84	1.15
		A/B	6.9	12.9
Iteration			7657	14358
Elasto-plastic	CPU time	A:M380	8.82	22.20
	(msec/cycle)	B:VP200	1.01	1.52
		A/B	8.7	14.6
Iteration			17123	33104
Total	CPU time	A:M380	151173	735098
	(msec)	B:VP200	17371	50532
		A/B	8.7	14.5

クトル長が伸びると向上している。I/Oなどの部分は、I/Oがベクトル化非対象項目であるため、V-RATEの値が良くないが、CPU コストが小さいため、全体に与える影響は少ない。

以上のベクトル効率に関するデータは、スカラー計算機上で実行した結果をもとにベクトル計算機上の値を推定したものである。そこで、実際にプログラムをベクトル計算機にかけ、分割数とCPU時間の関係を調べた結果をTable 2 に示す。表には、弾性域での主要反復計算部分の1サイクル当たりのCPU時間と1荷重ステップの求解に要する反復回数、および弾塑性域（最大強度近傍）での主要反復計算部分の1サイクル当たりのCPU時間、1荷重ステップの求解に要するCPU時間と反復回数を記した。ベクトル計算機を使用するとCPU時間が大幅に低減され、分割数上がるほど効果が大きい。10×10分割の場合、反復計算1サイクル当たりの実行速度比は14.6となった。また、1荷重ステップ当たりの実行速度比も14.5となり、I/Oによる効率の低下はさほど大きくない。

(3) プログラムの改良

チューニングツールFORTUNE²³ とIVP²⁴ を用いて、プログラムの細部を検討し、VPコンパイラの持つ機能^{25, 26} を使って、ベクトル効率を向上させる技法^{2, 3} を実際に施し、その有効性を検証した。以下に結論の一部を述べる。

DOループ内に現れる変数や配列要素が、代入文の左辺に現れる「定義」か、右辺に現れる「引用」のいずれか一方であるのが望ましいが、動的緩和法の基礎式はすべてそのようになるので、特に工夫する必要はない。

現在のVPコンパイラ^{25, 26} では多重DOループの内、2重ループまでが1重ループに置き換えられて、ベクトル化される。したがって、内側2ループが確実にベクトル化されるように、また、ベクトル長が大になるようにするのがよい。

境界上の差分点では境界条件が、x, y軸上の差分点では対称条件を考慮した基礎式が適用されるので、2重DOループが不連続になって、1重ループへの置き換えが不可能になる。すなわち、内側ループのみがベクトル化されるだけになる。このような場合、これらの式を、一般差分点での基礎式と同じループ内にIF文を使って並べると、マスク処理が施されて、ベクトル効率を向上させることができた。

プログラムは簡明で、デバッグし易いものがよい。ベクトル効率を追求するあまり、プログラムが複雑になれば、デバッグに長時間を要するようになり、好ましくない。そのため、趣旨に反するアンローリングの技巧^{2, 3} を使用せず、コンパイラのもつアンローリング機能²⁵ に委ねた。

5. あとがき

円筒パネルの弾塑性有限変位解析をベクトル計算機を用いて行う場合の解法として、動的緩和法の有用性を検討した。動的緩和法は、電子計算機の記憶容量が少なくすみ、プログラミングもいたって簡単である。多数の荷重段階に対して、解を順次に求めることもできるほか、任意荷重に対する解を直接に早く安定して求めることもできる。弾性有限変位解析の場合と同様に、弾塑性有限変位解析に対してもベクトル計算機に適した解法であることがわかった。

本研究は、京都大学大型計算機センター数値解析研究委員会の研究計画「VPを利用した板・補剛板・円筒シェルの非線形構造解析プログラムの開発」（代表：渡邊英一京都大学助教授）に基づくものである。

参考文献

1. 二宮市三, 秦野篤世: NUNPACスーパー・コンピュータ版, ベクトル計算機応用シンポジウム論文集, 京都大学大型計算機センター, 1985.3.
2. 島崎真昭: スーパーコンピュータ入門, コンピュータソフトウェア, Vol.2, No.3, pp.484-508, 1985.
3. FACOM OS IV/F4 MSP FORTRAN77/VP プログラミングハンドブック, 富士通, 1985.1.
4. 馬場俊介・成岡昌夫: 差分表示を用いる新しい構造解析法—Dynamic Relaxation Method の説明, 土木学会誌, Vol.58, No.9, pp.50-56, 1973.8.
5. 三上市蔵: 「差分表示を用いた板の非線形解析」への討議, 土木学会論文報告集, No.265, pp.147-150, 1977.9.
6. Day, A.S.: An introduction to dynamic relaxation, Engineer, Vol.219, pp.218-221, Jan., 1965.
7. Otter, J.R.H.: Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation, Nuclear Structural Engineering, Vol.1, No.1, pp.61-75, 1965.
8. Otter, J.R.H.: Dynamic relaxation compared with other iterative finite difference methods, Nuclear Engineering and Design, Vol.3, No.1, pp.183-185, 1966.
9. Mikami, I.: Dynamic and viscous relaxation methods using simulation language, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.32, Univ. of Tokyo Press, Mar., 1984.
10. Lynch, R.D., Kelsey, S. and Saxe, H.C.: The application of dynamic relaxation to the finite element method of structural analysis, Technical Report No.THEMIS-UND-68-1, Univ. of Notre Dame, Sept., 1968.
11. 渡邊英一・三上市蔵・他: 構造物の非線形耐力解析におけるVPの応用について, ベクトル計算機応用シンポジウム論文集, 京都大学大型計算機センター, pp.94-103, 1985.3.
12. 三上市蔵・山科 純・田中克弘: ベクトル計算機を用いた円筒パネル弾性有限変位解析, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.32A, pp.313-322, 1986.4.
13. 三上市蔵・田中克弘: ベクトル計算機を用いたシェルの複合非線形解析, ベクトル計算機応用シンポジウム論文集, 京都大学大型計算機センター, pp.118-127, 1986.3.
14. Washizu, K.: Variation Method in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
15. 三上市蔵・矢部幸男: 初期たわみを有する弾性円筒パネルの円周方向面内力による非線形挙動, 構造工学論文集, Vol.31A, pp.209-222, 1985.3.
16. 山田嘉昭: マトリックス法材料力学, 培風館, 1980.
17. Mikami, I., Miura, Y., Matsumura, K., and Tanaka, K.: Useful techniques for dynamic relaxation method, Technology Reports of Kansai University, No.27, Mar., 1986.
18. Cassell, A.C., Kinsey, P.J., and Sefton, D.J.: Cylindrical shell analysis by dynamic relaxation, Proceedings of Institution of Civil Engineers, Vol.39, pp.75-84, Jan., 1968.
19. Rushton, K.R.: Large deflexion of variable-thickness plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.10, pp.723-735, 1968.
20. Rushton, K.R.: Dynamic-relaxation solutions of elastic-plate problems, Journal of Strain Analysis, Vol.3, No.1, pp.23-32, 1968.
21. Coan, J.M.: Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, Journal of Applied Mechanics, Vol.18, pp.143-151, June, 1951.
22. 小松定夫・北田俊行・宮崎清司: 残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No.244, pp.1-14, 1975.4.
23. FACOM OS IV/F4 MSP FORTUNE使用手引書 V10用, 富士通, 1984.12.
24. FACOM OS IV/F4 MSP 会話型ベクトライザ使用手引書 V10用, 富士通, 1985.1.
25. FACOM OS IV/F4 MSP FORTRAN77/VP 使用手引書 V10用, 富士通, 1984.12.
26. FACOM OS IV/F4 MSP FORTRAN77/VP ベクトル拡張言語手引書 V10用, 富士通, 1985.2.

(1986年10月17日受付)