

弾性シェル構造物の有限変位問題に関する一数值解析

A NUMERICAL ANALYSIS OF FINITE DISPLACEMENT
PROBLEMS OF ELASTIC SHELL STRUCTURES

桜井孝昌*・忠 和男**・西野文雄***

By Takamasa SAKURAI, Kazuo CHU and Fumio NISHINO

A formulation of geometrical nonlinear problems of shells with particular emphasis on the treatment of finite rotations is presented. The finite rotations are deleted in the formulation by removing them and hence only infinitesimally small rotations appear in the formulation. The deformed shell surface is given with the help of interpolation functions by the position vectors and by normal and tangential vectors of the surface at the nodes. A few numerical examples on shallow spherical shells are presented to compare the numerical results with the experimental results.

1. まえがき

シェルの有限変位問題に対しては、離散化解析の手法が有効な方法として用いられる場合が多い。離散化解析に関する定式化には、変形前の形状を基準にして変形後のそれを表わす Lagrange の方法が実際のである。定式化の手法には 2 つの方法が用いられている。1 つは解析の全過程を通じて同一の座標系を用いる方法で、他の 1 つは剛体変位によって生じる有限変位や有限回転を避けるため、剛体変位に応じて移動座標系を用いる方法である。後藤等¹⁾に従って、前者を「直接 Lagrange の手法」、後者を「剛体変位除去の手法」と分類する。しかし、両者の方法は座標系が変形前の状態で定義されているという点から言えば本質的には同じである。さらに、支配方程式の定式化において、作用力の増分量と変位量（または変位後の位置）の増分量を関係付ける増分関係式と、作用力の全体量と変位の全体量を関係付ける全体関係式に分類する。

立体構造物の有限変位解析においては、変形に伴って生じる有限回転角を変位と同じ精度で評価することが必要であるが、有限回転角がベクトルの演算則に従わない為、有限回転角の取り扱いには特別の配慮が必要である²⁾。

全体関係式で解析する場合は、累積誤差は生じないが、増分関係式のように力と変位の関係を線形化することは一般的には困難である。桜井等³⁾は有限回転角を問題とせざるを得ないシェル構造物を、有限回転を厳密に評価して、全体関係式に基づいて解析した。

* 正会員 工修 豊田工業高等専門学校助教授土木工学科 (〒471愛知県豊田市栄生町 2-1)

** 正会員 工修 豊田工業高等専門学校助手土木工学科 (〒471同上)

*** 正会員 Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113東京都文京区本号 7-3-1)

定式化の手法のうち剛体変位除去の手法は、微小ひずみの条件のもとで、離散化した要素の運動を剛体変位と弾性変位に分離することにより、ひずみ—変位関係における高次の微小項が省略でき、かつ、厳密な解析を可能とする方法である。数値解析を目的として、この手法で板あるいはシェルの解析をした研究のうち、増分関係式を用いた研究⁴⁾は報告されている。剛体変位除去の手法が、微小ひずみの条件のもとでは、厳密解に収束することは平面骨組では証明されている¹⁾。

全体関係式による解析では、全体量が直接得られ、かつ、荷重—変位応答が非線形となるような有限変位の幾何学的境界条件が与えられた場合でも容易に対応できるので、これらの点に関しては増分関係式より有利である。

本報告ではシェルの幾何学的非線形問題を全体関係式に基づいて定式化した。定式化においては、有限回転角を用いることなく、方向ベクトルを用いて有限回転を厳密に評価できるようにした。数値計算は有限要素法を用い、曲面を三角形の板要素の集合で近似し、Newton-Raphson 法と等価な逐次代入法⁵⁾を用いて行った。

浅い部分球殻については実験を行い、その結果と本報告による解析結果を比較した。

2. 薄板のひずみ—位置関係式

Fig. 1 に示すように、3次元空間内に固定された直交単位ベクトル $\langle \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \rangle$ で定義される3次元デカルト座標系の固定点を O_0 とする。初期応力のない変形前の薄板要素内の中央面上の任意の2点を O, P とし、この2点に対応する変形後の点を $\hat{O}, \hat{P}$ とする。点 O_0 を原点とする点 $\hat{O}, \hat{P}$ の位置ベクトルを $\hat{\mathbf{X}}^O, \hat{\mathbf{X}}^P$ とする。点 O を原点とする点 P の位置ベクトルを $\mathbf{x}^P$ とし、点 $\hat{O}$ を原点とする点 $\hat{P}$ の位置ベクトルを $\hat{\mathbf{x}}^P$ とする。点 $\hat{P}$ の位置ベクトル $\hat{\mathbf{X}}^P$ は、

$$\hat{\mathbf{X}}^P = \hat{\mathbf{X}}^O + \hat{\mathbf{x}}^P \dots\dots\dots (1)$$

と関係づけられる。

変形前の板厚面内に直交単位ベクトル $\mathbf{i}_{01}, \mathbf{i}_{02}$ を、その平面の法線方向に単位ベクトル $\mathbf{i}_{03}$ を、 $\langle \mathbf{i}_{01}, \mathbf{i}_{02}, \mathbf{i}_{03} \rangle$ が右手系となるように選ぶ。さらに、変形後の曲面に近接して選んだ平面を基準にして、直交単位ベクトル $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ を $\mathbf{i}_{01}, \mathbf{i}_{02}, \mathbf{i}_{03}$ と同じ方法で定義する。

位置ベクトル $\mathbf{x}^P$ をベクトル $\mathbf{i}_{0\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) のスカラー成分で表わすと、

$$\mathbf{x}^P = x_\alpha^P \mathbf{i}_{0\alpha} \quad (\alpha = 1, 2) \dots\dots\dots (2)$$

変位後の位置ベクトルをベクトル $\mathbf{i}_i$ のスカラー成分で表わすと、

$$\hat{\mathbf{X}}^P = \hat{X}_i^P \mathbf{i}_i, \quad \hat{\mathbf{X}}^O = \hat{X}_i^O \mathbf{i}_i, \quad \hat{\mathbf{x}}^P = \hat{x}_i^P \mathbf{i}_i \quad (i = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (3 \cdot a \sim c)$$

ベクトル $\mathbf{i}_i$ はベクトル $\mathbf{l}_i$ によって、

$$\mathbf{i}_i = l_{ij} \mathbf{l}_j \dots\dots\dots (4)$$

と表わされる。ここに、 l_{ij} はベクトル $\mathbf{i}_i$ の、座標系 $\mathbf{l}_j$ における方向余弦である。式(2)、(3)、(4)における下添字 i は3次元での直交デカルト座標系 1, 2, 3 を表わし、 α は2次元でその座標系 1, 2 を表わす。以後、特に銘記しない限り、ローマン添字 $i, j, \dots$ とギリシア添字 $\alpha, \beta, \dots$ はそれぞれ3次元および2

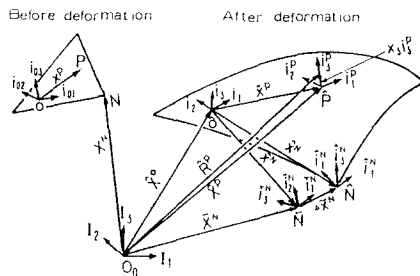


Fig. 1. Coordinate System of a Representative Shell Element E.

次元の座標系を表わす添字とする。式(2), (3), (4)におけるように, 添字が二重に使われている場合は, それらの添字に総和規約を適用する。

変形後の点 $\hat{P}$ における中央面の基底ベクトルを $\mathbf{a}_\alpha^p(0)$ とすると, 基底ベクトルの定義およびベクトル $\hat{\mathbf{X}}^0$ が座標変数 x_α^p とは独立な値であることを考慮して, 式(1), および(3・C)より,

$$\mathbf{a}_\alpha^p(0) = \hat{\mathbf{X}}_\alpha^p = \hat{x}_{i,\alpha}^p \mathbf{i}_i \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

となる。ここに, $(\)_{,\alpha}$ は偏微分記号 $\partial(\)/\partial x_\alpha^p$ を表わす。点 $\hat{P}$ における法線方向単位ベクトルは $\mathbf{a}_3^p(0)$ は,

$$\mathbf{a}_3^p(0) = [\mathbf{a}_1^p(0) \times \mathbf{a}_2^p(0)] / |\mathbf{a}_1^p(0) \times \mathbf{a}_2^p(0)| \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

ここに, 記号“ $\times$ ”はベクトルの外積を表わす。式(5・a)を式(5・b)に代入し, 変位成分の微分に相当する量 $(\hat{x}_i^p - x_i^p)$, α の2次以上の項を単位の値に対して微小として省略すると,

$$\mathbf{a}_3^p(0) = \mathbf{i}_3 - \hat{x}_{i,\gamma}^p \mathbf{i}_\gamma \dots\dots\dots (6)$$

変形後の中央面上の点 $\hat{P}$ から, この面の法線にある板厚内部の点までの距離を x_3 とし, 点 O_0 を原点とするこの点の位置ベクトルを $\hat{\mathbf{R}}^p$ とすると,

$$\hat{\mathbf{R}}^p = \hat{\mathbf{X}}^p + x_3 \mathbf{a}_3^p(0) \dots\dots\dots (7)$$

変形後の板厚内部の基底ベクトル $\mathbf{a}_\alpha^p(x_3)$ は, 式(5・a), (7)を用いて,

$$\mathbf{a}_\alpha^p(x_3) = \hat{\mathbf{R}}_\alpha^p = \mathbf{a}_\alpha^p(0) + x_3 \mathbf{a}_{3,\alpha}^p(0) \dots\dots\dots (8)$$

となる。板厚面内の Green のひずみテンソルを $\varepsilon_{\alpha\beta}$ とすると,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = [\mathbf{a}_{\alpha,\beta}^p(x_3) - \delta_{\alpha\beta}] / 2 \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

ここに, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカデルタを表わし, $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}^p(x_3)$ は x_3 における計量テンソル,

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta}^p(x_3) = \mathbf{a}_\alpha^p(x_3) \cdot \mathbf{a}_\beta^p(x_3) \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

を表わす。ここに“ $\cdot$ ”は内積を表わす。Kirchhoff-Loveの仮定および板厚不変の仮定を適用し, 高次の微小項を省略すると, 式(6), (8), (9・a)より, ひずみテンソル $\varepsilon_{\alpha\beta}$ は,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + x_3 \kappa_{\alpha\beta} \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

と表わされる。ここに, ひずみのオーダーを考慮して式(9・a)を整理すると, 式(10・a)の $\eta_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ は,

$$\eta_{\alpha\beta} = [(\hat{x}_\alpha^p - x_\alpha^p)_{,\beta} + (\hat{x}_\beta^p - x_\beta^p)_{,\alpha} + \hat{x}_{i,\alpha}^p \hat{x}_{j,\beta}^p + (\hat{x}_\gamma^p - x_\gamma^p)_{,\alpha} (\hat{x}_\gamma^p - x_\gamma^p)_{,\beta}] / 2 \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -\hat{x}_{3,\alpha\beta}^p + \hat{x}_{i,\gamma}^p \hat{x}_{j,\alpha\beta}^p \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

これ以外の面外ひずみテンソル $\varepsilon_{3\alpha}$, $\varepsilon_{\alpha 3}$, ε_{33} はKirchhoff-Loveの仮定および板厚不変の仮定より, いずれも零となる。

微小ひずみの範囲ではせん断変形量が単位の値に対して微小であるので, 変形後の中央面内の任意点における接平面内の2つの基底ベクトルは, 直角ではなくなるものの, 直角から変化している角度は単位の値に対してひずみのオーダーの微小量である。さらに, 伸びひずみも同様に微小であることから, Fig. 1に示す点 $\hat{O}$ において, 曲面の接平面内に直交単位ベクトル $\mathbf{i}_n$ を,

$$\mathbf{i}_\alpha \approx \mathbf{a}_\alpha^0(0) \dots \dots \dots (11 \cdot a)$$

と選ぶことができる。このベクトル $\mathbf{a}_\alpha^0(0)$ に対して、その接平面の法線方向単位ベクトル $\mathbf{a}_3^0(0)$ とベクトル $\mathbf{i}_3$ は一致するので、

$$\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_3^0(0) \dots \dots \dots (11 \cdot b)$$

式 (11) で定義した座標ベクトル $\langle \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 \rangle$ を本報告では要素基準ベクトルと呼ぶ。Fig. 1 に示す変形前の点 P の位置ベクトル成分 x_β^p は、ベクトル $\mathbf{i}_{0\beta}$ で表わされる平面が、 $\mathbf{i}_\beta$ で表わされる平面に剛体変位してもその値は変わらない。このことを考慮して、式 (5・a) で示した任意点 $\hat{P}$ における基底ベクトル $\mathbf{a}_\alpha^p(0)$ を点 $\hat{O}$ で Taylor 展開してその第 2 項までとり、式 (11・a) を用いると、

$$\mathbf{a}_\alpha^p(0) \approx \mathbf{i}_\alpha + \hat{x}_{i,\alpha\beta}^p x_\beta^p \mathbf{i}_i \dots \dots \dots (12 \cdot a)$$

となる、同様にして、点 $\hat{P}$ の法線ベクトル $\mathbf{a}_3^p(0)$ は式 (6) より、

$$\mathbf{a}_3^p(0) \approx \mathbf{i}_3 - \hat{x}_{i,3\beta}^p x_\beta^p \mathbf{i}_i \dots \dots \dots (12 \cdot b)$$

となる。式 (12) より、要素内の任意点 $\hat{P}$ における基底ベクトル $\mathbf{a}_i^p(0)$ は、微小ひずみの仮定のもとで、要素を小さく選ぶことにより、 x_β^p を小さくすることができるので、

$$\mathbf{a}_i^p(0) = \mathbf{i}_i + O_{ij}(\varepsilon) \mathbf{i}_j \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $O_{ij}(\varepsilon)$ はひずみのオーダーまで小さくすることができる微小量を表わす。ベクトル $\mathbf{i}_i$ に対して、要素内の点 $\hat{P}$ における接平面内の直交単位ベクトルおよびその法線ベクトル $\mathbf{i}_i^p$ および $\mathbf{i}_3^p$ を、Fig. 1 に示すように、点 $\hat{O}$ における場合と同様に、点 $\hat{P}$ の基底ベクトル $\mathbf{a}_\alpha^p(0)$ に接近して選ぶ。これらのベクトル $\mathbf{i}_i^p$ を点 $\hat{P}$ での基準ベクトルと呼ぶ。ベクトル $\mathbf{i}_i$ をそれぞれの軸の回りに $\hat{\theta}_i^p$ だけ回転すると、ベクトル $\mathbf{i}_i$ と $\mathbf{i}_i^p$ が一致する角を $\hat{\theta}_i^p$ と定義する。ベクトル $\mathbf{i}_i^p$ は前述のように選ばれている為、式 (13) よりこれらの回転角 $\hat{\theta}_i^p$ は微小となる。微小回転角はベクトルとして扱うことができるので、点 $\hat{P}$ における回転ベクトルを $\hat{\boldsymbol{\theta}}^p$ と表わし、式 (3) と同様に、これをベクトル $\mathbf{i}_i$ 成分で表わすと、

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^p = \hat{\theta}_i^p \mathbf{i}_i \dots \dots \dots (14)$$

要素基準ベクトル $\mathbf{i}_i$ を式 (11) のように選んだので、式 (10・b) の $(x_\beta^p - x_\beta^r)_{,\alpha}$ に関する 2 次項は、ひずみの 2 乗のオーダーにすることができ、微小ひずみの条件のもとでは省略できる。数値解析においては、式 (10・b, c) のひずみ成分 $\eta_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ として、 $\hat{x}_{\beta,\alpha}^p$ の線形項のみを用いても、非線形項を含んだ厳密な項を用いても、解が収束する場合は両者は共に解となる^{1)・5)}。ただし、剛体変位除去の手法で平面骨組構造物を数値解析する場合は、2 次の微小項として式 (10・b) の右辺第 3 項を残すことが一番能率が良い¹⁾。さらに、つり合い径路上の特異点を解析するためには、非線形項のうちの代表的な項を残す必要がある。以上のことより、本解析ではひずみの 2 次の微小項として Von Karman の板理論に対応する項である式 (10・b) の右辺第 3 項を残した。これらのことを考慮して、式 (10・b, c) で示すひずみテンソル $\eta_{\alpha\beta}$, $\kappa_{\alpha\beta}$ の高次の項を省略すると、

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^I + \eta_{\alpha\beta}^{II}, \kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta}^I \dots \dots \dots (15 \cdot a, b)$$

と表わされる。ここに、

$$\eta_{\alpha\beta}^I = [(\hat{x}_\alpha^p - x_\alpha^p)_{,\beta} + (\hat{x}_\beta^p - x_\beta^p)_{,\alpha}] / 2, \eta_{\alpha\beta}^{II} = \hat{x}_{i,\alpha}^p \hat{x}_{i,\beta}^p / 2, \kappa_{\alpha\beta}^I = -\hat{x}_{i,\alpha\beta}^p \dots \dots \dots (15 \cdot c \sim e)$$

3. 剛性方程式および境界条件

有限要素法による解析を行うため、Fig. 1 に示す一つの要素について、節点の位置ベクトルおよび回転ベクトルと節点力ベクトルとの関係を求める。Fig. 1 の点 $\hat{N}$ における位置ベクトルおよび回転ベクトルは、それぞれ $\hat{\mathbf{x}}^N$ および $\hat{\boldsymbol{\theta}}^N$ と表わされる。これらをベクトル $\mathbf{i}_i$ の成分で表わすと、

$$\hat{\mathbf{x}}^N = \hat{x}_i^N \mathbf{i}_i, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^N = \hat{\theta}_i^N \mathbf{i}_i \quad \dots\dots\dots (16\cdot a, b)$$

ベクトル $\hat{\mathbf{x}}^N$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^N$ の一要素内の全ての $\mathbf{i}_i$ 成分を $\hat{\boldsymbol{\delta}}_E^N$ と表わすと、式(16)より3三角形平板要素に対しては、

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_E = \langle \hat{x}_i^N \quad \hat{\theta}_i^N \rangle_E^T \quad (i, N=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、上添字Tは転置記号を表わす。

外力としては節点外力のみを考えることとする。一要素の節点力ベクトルのうち、力に関するベクトルを $\mathbf{N}^N$ 、モーメントに関するベクトルを $\mathbf{M}^N$ とし、これらをベクトル $\mathbf{i}_i$ の成分で表わすと、

$$\mathbf{N}^N = \hat{N}_i^N \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{M}^N = \hat{M}_i^N \mathbf{i}_i \quad (i, N=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (18\cdot a, b)$$

式(17)と同様に、一要素の全ての節点力ベクトルの $\mathbf{i}_i$ 成分 $\hat{N}_i^N$, $\hat{M}_i^N$ を $\hat{\mathbf{F}}_E^N$ と表わすと、

$$\hat{\mathbf{F}}_E = \langle \hat{N}_i^N \quad \hat{M}_i^N \rangle_E^T \quad (i, N=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (19)$$

通常用いられている要素剛性方程式の定式化の手法をここでも適用する。仮想仕事の定理より、仮想ひずみによる内力仮想仕事と、仮想節点変位による節点力仮想仕事が等しいと置くと、要素基準座標系 $\mathbf{i}$ に関する要素剛性方程式が、

$$\hat{\mathbf{F}}_E = \hat{\mathbf{K}}_E \hat{\boldsymbol{\delta}}_E + \hat{\mathbf{C}}_E \quad \dots\dots\dots (20)$$

と求まる。ここに、 $\hat{\mathbf{K}}_E = \hat{\mathbf{K}}_E^{\ell} + \hat{\mathbf{K}}_E^{n\ell}$ は要素剛性マトリックスであり、 $\hat{\mathbf{C}}_E^N$ は、節点成分 $\hat{\boldsymbol{\delta}}_E^N$ として変位成分ではなく位置ベクトル成分を用いたために生じる付加外力ベクトルである⁵⁾。

Fig. 1 の点 0_0 で定義した全体座標系の直交単位ベクトル $\mathbf{I}_i$ を要素座標ベクトル $\mathbf{i}_i$ に変換する変換マトリックス $\mathbf{T}_E$ を

$$|\mathbf{i}_i| = \mathbf{T}_E |\mathbf{I}_i| \quad \dots\dots\dots (21)$$

と定義する。

座標ベクトル $\mathbf{i}_i$ に関する要素剛性方程式(20)を $\mathbf{T}_E^T$ で変換すると全体座標系 $\mathbf{I}_i$ に関する要素剛性方程式が、

$$\tilde{\mathbf{F}}_E = \tilde{\mathbf{K}}_E \tilde{\boldsymbol{\delta}}_E + \tilde{\mathbf{C}}_E \quad \dots\dots\dots (22)$$

と求まる。ここに、ベクトル成分 $\tilde{\mathbf{F}}_E$, $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_E$, $\tilde{\mathbf{C}}_E$ および剛性マトリックス $\tilde{\mathbf{K}}_E$ は、

$$\tilde{\mathbf{F}}_E = \hat{\mathbf{T}}_E^T \hat{\mathbf{F}}_E, \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_E = \hat{\mathbf{T}}_E^T \hat{\boldsymbol{\delta}}_E, \quad \tilde{\mathbf{C}}_E = \hat{\mathbf{T}}_E^T \hat{\mathbf{C}}_E, \quad \tilde{\mathbf{K}}_E = \hat{\mathbf{T}}_E^T \hat{\mathbf{K}}_E \hat{\mathbf{T}}_E \quad \dots\dots\dots (23\cdot a\sim d)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_E^N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_E^N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_E^N = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_E \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24\cdot a, b)$$

変形後のつり合い状態における点 $\hat{N}$ の位置は未知であるので、Fig. 1 に示すように、点 $\hat{N}$ の近傍に任意点 $\bar{N}$

を選ぶ。この点に集まる全ての要素に対して、点 $\bar{N}$ を共通の点として扱う。点 $\hat{P}$ で定義された基準ベクトル $\hat{i}_1^P$ と同様に、節点 $\bar{N}$ および $\hat{N}$ において節点基準ベクトル $\langle \hat{i}_1^N, \hat{i}_2^N, \hat{i}_3^N \rangle$ および $\langle \hat{i}_1^{\hat{N}}, \hat{i}_2^{\hat{N}}, \hat{i}_3^{\hat{N}} \rangle$ を定義する。

Fig. 1 に示すように、点 $\hat{O}$ から点 $\bar{N}$ に至る位置ベクトルを $\bar{x}^N$ 、点 $\hat{O}$ における基準ベクトル $\hat{i}_i$ から、点 $\bar{N}$ における曲面の方向を表わす節点基準ベクトル $\hat{i}_i^N$ までの回転ベクトルを $\bar{\theta}^N$ と表わす。さらに、点 $\bar{N}$ から点 $\hat{N}$ に至る位置ベクトルを $\Delta \bar{x}^N$ 、ベクトル $\hat{i}_i^N$ から節点 $\hat{N}$ における曲面の方向ベクトル $\hat{i}_i^{\hat{N}}$ までの回転ベクトルを $\Delta \bar{\theta}^N$ と表わすと、ベクトル $\Delta \bar{x}^N$ と $\Delta \bar{\theta}^N$ は、

$$\Delta \bar{x}^N = \bar{x}^N - \bar{x}^{\hat{N}}, \quad \Delta \bar{\theta}^N = \bar{\theta}^N - \bar{\theta}^{\hat{N}} \quad (25 \cdot a, b)$$

と表わされる。式 (25・a, b) に現われるベクトルをベクトル I_i の成分で表わすと、

$$\Delta \bar{x}^N = \Delta \bar{x}_i^N I_i, \quad \bar{x}^N = x_i^N I_i, \quad \Delta \bar{\theta}^N = \Delta \bar{\theta}_i^N I_i, \quad \bar{\theta}^N = \theta_i^N I_i \quad (26 \cdot a \sim d)$$

式 (25) のベクトル成分を式 (17) と同様の形式で $\Delta \bar{\delta}_E$ および $\bar{\delta}_E$ で表わすと、

$$\Delta \bar{\delta}_E \equiv \langle \Delta \bar{x}_i^N, \Delta \bar{\theta}_i^N \rangle_E^T, \quad \bar{\delta}_E \equiv \langle x_i^N, \theta_i^N \rangle_E^T \quad (27 \cdot a, d)$$

式 (25・a, b) の関係をベクトル I_i の成分で表わすと、式 (23・b), (27) を用いて、

$$\Delta \bar{\delta}_E = \hat{\delta}_E - \bar{\delta}_E \quad (28)$$

と表わされる。式 (28) の $\bar{\delta}_E$ を式 (22) に代入すると、

$$\bar{F}_E = \bar{K}_E \Delta \bar{\delta}_E + \bar{F}_{E0} \quad (29 \cdot a)$$

ここに、

$$\bar{F}_{E0} = \bar{K}_E \bar{\delta}_E + \bar{C}_E \quad (29 \cdot b)$$

式 (29・a) は全体座標ベクトル I_i 系で定式化した要素剛性方程式である。

節点 $\hat{N}$ に作用する外力の、ベクトル I_i 成分を $\tilde{F}^N$ と表わし、同じ点の節点応力成分を $\tilde{P}_E^N$ と表わすと、節点 $\hat{N}$ におけるつりあい条件より、

$$\tilde{F}^N = \Sigma \tilde{F}_E^N, \quad (N=1, 2 \text{ or } 3) \quad (30 \cdot a, b)$$

と表わされる。ここに、記号 Σ は節点 $\hat{N}$ に集まる全ての要素の点 $\hat{N}$ における合計を表わす。

式 (29・a) に現われる要素の節点 $\hat{N}$ の変形量成分 $\Delta \bar{\delta}_E^N$ に対応する全体構造物におけるその点の変形量成分を $\Delta \tilde{\delta}^N$ と表わすと、節点における変形の連続条件より

$$\Delta \tilde{\delta}^N = \Delta \bar{\delta}_E^N \quad (31)$$

と関係付けられる。

式 (29・a) の要素剛性方程式における $\tilde{P}_E$ 、 $\Delta \bar{\delta}_E$ および $\bar{F}_{E0}$ に対応する、構造物全体の節点ベクトル成分をそれぞれ $\tilde{P}$ 、 $\tilde{F}_0$ および $\Delta \tilde{\delta}$ と表わす。さらに、要素剛性マトリックス $\hat{K}_E$ に対応する全体剛性マトリックスを $\tilde{K}$ と表わすと、式 (29・a) に対応する全体剛性方程式は、

$$\tilde{F} = \tilde{K} \Delta \tilde{\delta} + \tilde{F}_0 \quad (32)$$

と求まる。

式 (32) における $\Delta \tilde{\delta}$ を未知量とし、くり返し演算の $\nu+1$ 回目の $\bar{\delta}_{\nu+1}$ を ν 回目の $\bar{\delta}_\nu$ と $\nu+1$ 回目の Δ

$\tilde{\delta}_{v+1}$ によって $\bar{\delta}_{v+1}=\bar{\delta}_v+\Delta\tilde{\delta}_{v+1}$ と修正してこの式を解き、 $\Delta\tilde{\delta}$ が零となる解が得られたとき、節点 $\bar{N}$ が $\hat{N}$ に一致した解が得られる。このときの $\bar{\theta}_3^N$ を用いると、点 $\bar{N}$ の位置ベクトル $\hat{X}^N$ は、式(3・b)および(26・b)のベクトル $\hat{X}^0$ および $\hat{x}^N$ を用いて、

$$\hat{X}^N=\hat{X}^0+\hat{x}^N \dots\dots\dots (33)$$

と求まる。ここに、ベクトル $\hat{X}^0$ は要素の原点 $\hat{O}$ の位置ベクトルであり、定数として扱える値である。変形後の点 $\hat{N}$ の曲面の方向ベクトル $\hat{i}^N$ は式(21)および式(27・b)の微小回転ベクトル成分 $\bar{\theta}_3^N$ を用いて、

$$\{\hat{i}^N\}=\tilde{T}^N\{I_i\} \dots\dots\dots (34\cdot a)$$

と求まる。ここに、

$$\tilde{T}^N=T_E\bar{T}^N \dots\dots\dots (34\cdot b)$$

ここに T_E は式(21)で定義した変換マトリックスで、 T^N は全体座標ベクトル I_i のそれぞれの軸の回りに微小角 $\bar{\theta}_3^N$ だけ回転させることによって I_i を変換するマトリックスで

$$\bar{T}^N=\begin{bmatrix} 1 & \bar{\theta}_3^N & -\bar{\theta}_2^N \\ -\bar{\theta}_3^N & 1 & \bar{\theta}_1^N \\ \bar{\theta}_2^N & -\bar{\theta}_1^N & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34\cdot c)$$

と表わされる。

もし、変形後の要素Eの各々の節点における曲面の回転角が必要であれば、式(34・b)の変換マトリックス $\tilde{T}^N$ を用いて、ベクトル $\hat{i}^N$ と I_i との方向余弦を求めることにより、これらのベクトルの成す角を求めることができる。

くり返し演算において、初期値は重要な役割がある。つまり、あるつり合い状態における解が既知である場合は、その解から少し異なる条件の解を得るのに、この既知の解を初期値として用いると、効率よく解が得られる。

要素内の原点O(従って $\hat{O}$)は任意に選ぶことができ、通常は3角形要素の重心に選ぶ。

全体剛性マトリックスを定式化するのに節点 $\bar{N}$ で選んだ共通の座標ベクトルは全体座標ベクトル I_i に選ぶ必要はなく、必要に応じて任意の方向の直交単位ベクトルに選ぶことができる。

次に、境界条件について述べる。全体剛性方程式(32)の外力ベクトル成分 $\tilde{F}$ のうち、節点 $\hat{N}$ に作用する力に関するベクトルおよびモーメントに関するベクトルをそれぞれ $\tilde{N}^N$ および $\tilde{M}^N$ と表わし、これらを座標ベクトル I_i の成分で表わすと、

$$\tilde{N}^N=\tilde{N}_i^N I_i, \quad \tilde{M}^N=\tilde{M}_i^N I_i \dots\dots\dots (35\cdot a, b)$$

式(27・a, b)および式(35)のベクトル成分を用いて、幾何学的境界条件とそれらに対応する力学的境界条件は、

$$\Delta\tilde{x}_j^N=0 \quad \text{または} \quad \tilde{N}_j^N=\tilde{N}_j^{N*} \quad \text{および} \quad \Delta\tilde{\theta}_j^N=0 \quad \text{または} \quad \tilde{M}_j^N=\tilde{M}_j^{N*} \dots\dots\dots (36\cdot a, b)$$

と表わされる。ここに、記号(*)は既知の定数を表わす。式(36)の幾何学的境界条件 $\Delta\tilde{x}_j^N=0$ および $\Delta\tilde{\theta}_j^N=0$ はこれらに対応する既知の節点位置 $\tilde{X}_j^N$ および、局面の方向 $e_{ji}\hat{i}^N$ ($j \neq i$)が変化しない条件となる。ここに、 e_{ji} は交代記号を表わす。既知量 $\tilde{X}_j^N$ および $\hat{i}^N$ は任意の値を選ぶことができる。

4. 数値解析例

シェルの有限変位解析を行うに当っては、曲面を三角形の板要素の集合として表わし、有限要素法⁶⁾を用い、文献5)の逐次代入法によって解いた。

薄板要素の剛性マトリックスを求めるのに用いた形状関数は、弾性剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E^l$ に対しては、1次多項式で表わされる1節点2自由度の膜要素と、3次多項式で表わされ、3つのサブエレメントを含む1節点3自由度の板曲げ要素から成る適合変位関数を用いた。一方、幾何剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E^g$ に対しては、定式化を容易にするため、板曲げ要素に対してサブエレメントを用いない3次元多項式から成る非適合変位関数を用いた。従って、板面内の座標系に関する要素剛性マトリックスは $\hat{\mathbf{K}}_E^l$ と $\hat{\mathbf{K}}_E^g$ の和で表わされる1節点5自由度のマトリックスとなる。弾性関係式においては、板面の法線回りの回転角は考慮されていないが、この点を研究対象とした研究⁷⁾も見られる。本報告では、1節点5自由度のマトリックスを空間座標系に変換することにより、1節点6自由度の要素剛性マトリックスを定式化した。

つり合い経路を求める条件として、節点荷重、節点位置または曲面の方向およびつりあい経路長を与える場合がある⁵⁾。本報告では前者2つを用いた。解の収束の判定は式(32)の未知量 $\Delta \tilde{\boldsymbol{\delta}}$ が零となることに対して行う。この $\Delta \tilde{\boldsymbol{\delta}}$ はベクトル $\Delta \tilde{\mathbf{x}}^N$ 、 $\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^N$ の全ての節点 N の $\mathbf{i}_i$ 成分であることを考慮して収束判定係数を K とすると、

$$K = \frac{1}{M} \sum_{(N)} \left(k_x \frac{|\Delta \tilde{\mathbf{x}}^N|}{|\tilde{\mathbf{x}}^N - \mathbf{x}^N|} + k_\theta \frac{|\Delta \tilde{\boldsymbol{\theta}}^N|}{|\tilde{\boldsymbol{\theta}}^N|} \right) < \epsilon \quad (37)$$

と表わされる。ここに、 M は全節点数を、 $\sum_{(N)}$ は全節点について合計することを表わす。 k_x 、 k_θ はそれぞれ位置ベクトルと回転ベクトルに対して任意に選ぶことができる重み係数である。 $\tilde{\mathbf{x}}^N - \mathbf{x}^N$ および $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^N$ はそれぞれ変位ベクトルおよび $\mathbf{i}_{0i}$ と $\mathbf{i}_i^N$ との間の回転ベクトルである。 ϵ は判定の精度を与える定数である。

剛体変位後の座標系 $\mathbf{i}_i$ に関する要素剛性方程式(20)の定式化において、線形化有限変位解析における同様の手法で式(15c～e)のひずみテンソルを用いて定式化すると、要素剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E$ は、

$$\hat{\mathbf{K}}_E = \hat{\mathbf{K}}_E^l + \hat{\mathbf{K}}_E^g \quad (38)$$

と求まる。ここに、剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E^l$ および $\hat{\mathbf{K}}_E^g$ はそれぞれ式(15)の線形項 $\kappa_{\alpha\beta}^l$ 、 $\kappa_{\alpha\beta}^g$ および非線形項 $\kappa_{\alpha\beta}^g$ に対応するマトリックスで、それぞれ微小変位の弾性剛性マトリックスおよび幾何剛性マトリックスと呼ばれている。数値解析においては、 $\hat{\mathbf{K}}_E$ として

$$\hat{\mathbf{K}}_E = \hat{\mathbf{K}}_E^l \quad (39)$$

としても、逐次代入の解が収束する場合は式(38)の $\hat{\mathbf{K}}_E$ を用いた場合と同じ解が得られる⁵⁾。

Fig. 2は2辺が単純支持で、他の2辺が自由端である折板構造物について、その中心に集中荷重が作用する場合を、2軸対称を考慮して4分の1の構造について計算した結果である。折板の諸元はFig. 2に示すとおりである。剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E$ として、式(38)を用いた場合と式(39)を用いた場合の解を、要素数を変化させつつ比較した。式(37)の判定条件は、位置ベクトルに関する判定条件の中に剛体回転も含まれていることを考慮して、 $k_x = 1$ 、 $k_\theta = 0$ 、 $\epsilon = 0.01$ とした。Fig. 2の中の右上に示した $P - \delta$ curve は集中荷重値 P と折板中央点における鉛直下方

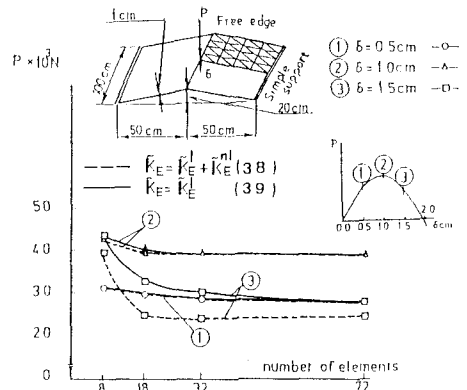


Fig. 2. Convergence of Solutions versus Stiffness Matrix and Number of Elements.

向変位 δ との関係を示したものである。Fig. 2 はこの曲線で、 δ がそれぞれ 0.5cm, 1cm, 1.5cm の位置（それぞれ ①, ②, ③）について要素数に対応する解の収束状況を示す。要素数が 72 個で $\hat{\mathbf{K}}_E$ として式 (38) を用いた場合が正確に最も近似していると考えられるので、この解とそれぞれの場合の解を比較すると、要素数の増加に従って解が正確に収束していくことがわかる。この結果は（はり一柱について文献 1）で証明されている結果と一致している。板も本質的にははりと大きな差のない構造物と考えることができ、さらに $\hat{\mathbf{K}}_E$ として式 (38) の方が式 (39) より力学的性状をより正確に表わしていることと合わせて、妥当な結果である。

先に、式 (38) について述べたごとく、この式における幾何学剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E^{\delta}$ は剛体変位後の要素基準座標系 $\hat{\mathbf{i}}$ に関する板の線形座屈解析の式と同じである。従って、式 (38) の剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}_E$ は接線剛性マトリックスでもある⁵⁾。直接 Lagrange 法による厳密な定式化においては、接線剛性マトリックスは微小変位の線形剛性マトリックス、初期変位剛性マトリックスおよび初期応力剛性マトリックスの和で表わされる。一方、変形後の座標系に基づいてこれを定式化する場合、初期変位剛性マトリックスが無視できる。式 (38) の定式化はこれに対応するものであり、初期変位剛性マトリックスが無視された接線剛性マトリックスとなっている。ただし、剛体変位させたい変形後の曲率線に沿った座標系を選ぶことにより曲率の変化を考慮すれば、厳密な接線剛性マトリックスとなっているのに対し、ここでは剛体変位のみを考慮して平板内に直線座標系をとっているため式 (38) は近似的な接線剛性マトリックスとなっている。

式 (38) と同様にして、全体剛性方程式 (32) における全体剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}$ も、微小変位の剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}^{\delta}$ と幾何剛性マトリックス $\hat{\mathbf{K}}^{n\delta}$ を用いて、

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}^{\delta} + \tilde{\mathbf{K}}^{n\delta} \quad \dots\dots\dots (40)$$

と表わされる。いま、比例載荷を考慮して、式 (32) の節点力成分 $\tilde{\mathbf{F}}$ を定節点力成分 $\tilde{\mathbf{f}}$ と荷重烈度 f との積で、

$$\tilde{\mathbf{F}} = f\tilde{\mathbf{f}} \quad \dots\dots\dots (41)$$

と表わす。式 (38) の $\hat{\mathbf{K}}_E$ と同様、式 (40) の $\tilde{\mathbf{K}}$ も線形化有限変異解析における接線剛性マトリックスでもあるので、座屈荷重を λ と表わすと、式 (40) より一般固有値解析

$$[\tilde{\mathbf{K}}^t + (\lambda/f)\tilde{\mathbf{K}}^n]\Delta\tilde{\delta} = 0 \quad \dots\dots\dots (42)$$

によって、それぞれの変形状態に応じた座屈荷重 λ が求まる。

Fig. 3 は図に示すような部分円筒殻の頂点に集中荷重が作用する場合のつり合い経路を示したものである。

数値計算は 2 軸対称の場合を対象として、シェルの 4 分の 1 について 18 要素に分割して行った。図の縦軸には集中荷重値を、横軸にはシェルの頂点の鉛直下方向変位をとり、修正ハイブリッド応力法を用いて定式化された剛性マトリックスを用い、50 個の三角形要素に分割して計算されている P. G. Bergan 等の結果⁸⁾と比較した。本報告の結果とこれらの結果とはほぼ一致している。なお、つり合い経路を計算すると同時に、式 (40) に従ってそれぞれのつり合い経路上の変形状態に応じた座屈荷重を求め、その結果も示す。この座屈荷重曲線 ($P_{cr} - \delta$ curve) は変形に応じて座屈荷

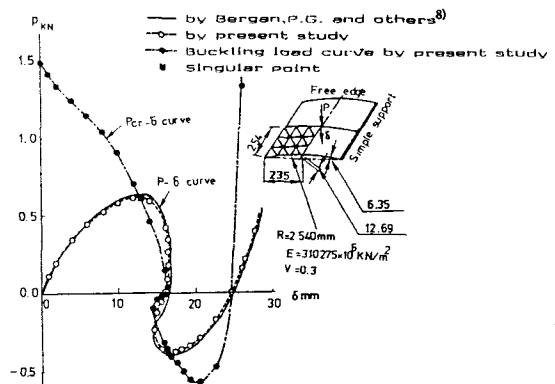


Fig. 3. Equilibrium Paths and Buckling Load Curve.

重がかなり減少していくことを示している。荷重の極限点では座屈荷重とつり合い径路上の荷重の値が1%程度の誤差で一致している。

Fig. 4に示してある、曲面に垂直な等分布荷重が作用し、周辺が固定されている部分球殻について、計算と実験を行いその結果を比較する。実験に用いた供試体はアルミ製で、その諸元はFig. 4に、計算に用いた要素分割の状態も含めて示す。材料試験の結果、シェルの材料のヤング係数 E は $7.22 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ (70.6GN/m²)、ポアソン比 ν は0.33である。

Fig. 5にこれらの弾性係数を用いて、供試体と同じ諸元でその形状に不整のない完全部分球殻について、2軸対称を考慮して計算した結果を示す。図の縦軸は外圧 q を古典理論値による座屈荷重値 q_{cl} で割った値を取り、横座標は部分球殻の頂点の鉛直下方向変位を板厚で割った値を取っている。図中に示した値 n は変形後の球殻の同心円上の波数を表わす。つりあい径路上の点A、Bにおける座屈荷重値とそれらに対応する波形はHuang⁹⁾の結果と一致している。

Fig. 6(a)および(b)にFig. 5のつり合い径路上の点C($n=4$)およびD($n=0$)における曲面の変形形状を示す。ただし、これらの図において解析の対象は曲面の部分のみである。

実験による球殻の座屈荷重値は、初期不整の影響により、古典理論値のその1/4から3/4程度にまで小さくなることが知られており、山田らは実験的にこれらを確認した¹⁰⁾。

本報告においては、Fig. 8に示す5体の供試体について、油圧式圧力装置と自動デジタル変位計を用いて実験を行った。

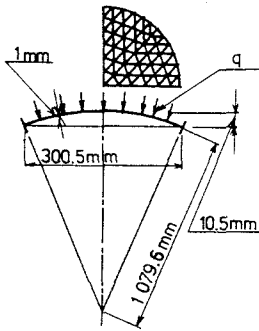


Fig. 4. Spherical Shell.

Fig. 8の中の表に、実験による座屈荷重値を q_{cr} として、それを q_{cl}/q_{cl} の値で示す。供試体No.5についてはその初期不整の測定を行った。測定は3次元測定機(精度0.01mm)を用い、測定点は曲面上で12個の同心円上に全部で162点とり、その結果を同心円上で平均して球殻の形状を求めた。球殻の頂点近傍の同心円の高さに関する標準偏差は0.1mm程度であり、固定端周辺では0.2mm程度である。Fig. 7に実測した初期形状を示す。Fig. 8に、Fig. 7に印“●”で示す実測形状を初期形状として計算を行い、その結果と実験値を比較した結果を示す。実験およびそれに対応する計算による変形形状はいずれも $n=0$ の波形である。実験による座屈荷重値は計算によるそれより約15%大きくなっている。この差は実験装置の設定状態に生じる機械的誤差およびシェルの形状を、測定値の平均値で表わしたことによって生じる誤差および初期不整の測定誤差などによる誤差と考えられ

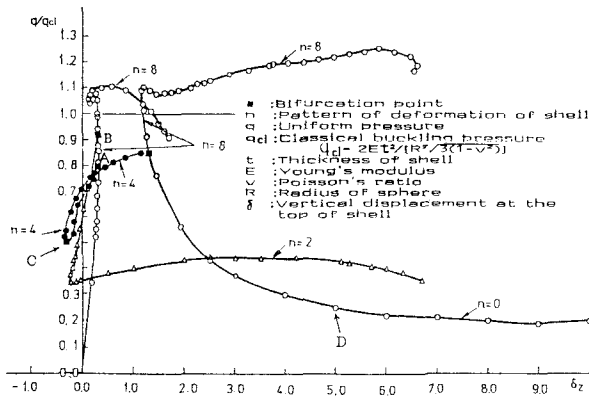


Fig. 5. Initial Imperfection of Shell.

る。しかし、マクロ的に見れば、初期不整のない座屈荷重比 q_{cr}/q_{crl} の計算値が0.8であるのに対し、実験結果のそれが0.34となっている原因が初期不整であることを、この計算結果はよく説明している。

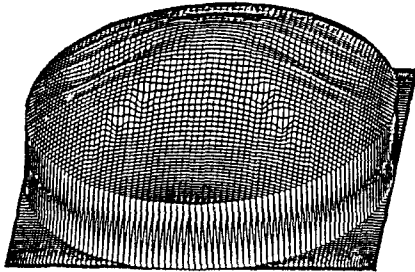


Fig. 6. (a) Deformed Shape at Point C ($n=4$)

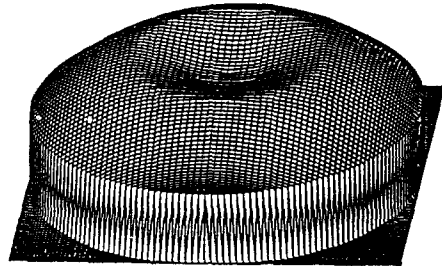


Fig. 6. (b) Deformed Shape at Point D ($n=0$)

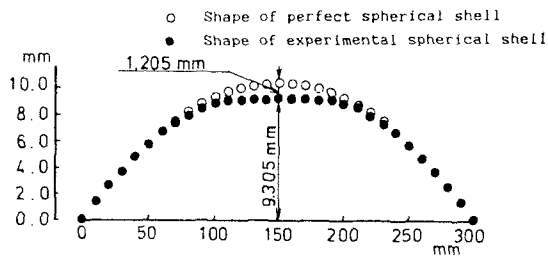


Fig. 7. Initial Imperfection of Shell.

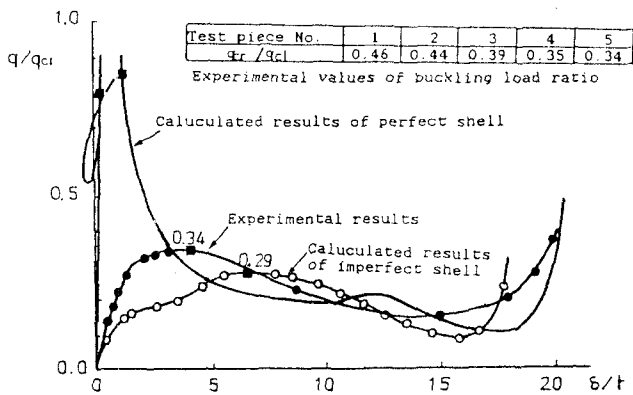


Fig. 8. Experiments versus Calculated Values.

5. おわりに

以上の結果をまとめると、

- (1) 変形後の曲面の形状は節点の位置ベクトルおよびその節点の接平面ベクトルと法線ベクトル（節点基準ベクトル）で与えられるように定式化した。変形の大きい形状を表わすには、通常多く用いられている節点の変位および回転角を用いるよりも、本報告で示した方法で表わす方が、変形前の形状に無関係に変形後の形状を表わすことができる点で有利である。
- (2) 非線形支配方程式は剛体変位除去の手法で定式化し、大きな変形量や大きな回転角は未知数として用いなかった。このことにより、ベクトルとして扱えない有限回転角を用いることなく、有限回転を含む変形問題が厳密に扱える支配方程式が定式化できた。
- (3) 式(38)の剛性マトリックスは真の接線剛性マトリックスとわずかな誤差で近似している。それゆえ、つり合い経路上の特異点は、これらの剛性マトリックスを用いた固有値解析により容易にかつ正確に、得ることができる。

数値計算は名古屋大学大型計算機センターのFACOM-M - 382を用いて行った。

謝辞：本研究を進めるに当り、実験に際しては、名城大学清水泰弘講師の多大な御援助を頂きました。さらに、論文作成に当り、名古屋工業大学後藤芳願助教授には適切な御指摘を頂きました。理論および計算プログラムの作成には、東京大学長谷川彰夫助教授、堀井秀之助教授および同大学院生松尾哲彦氏（現、熊谷組）の御援助を得ました。さらに、第1、2の著者は名古屋工業大学荒井利一郎名誉教授に有益な御指導を贈りました。ここに心より感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 後藤芳願・長谷川彰夫・西野文雄・平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察，土木学会論文報告集第331号，PP.33-44，1983年3月
- 2) 前田幸雄・林正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，第253号，PP. 13-27，1976年9月
- 3) Sakurai, T, Chu, K. and Nishino, F., A Numerical Analysis of Finite Displacement Problems of Elastic Shell Structures, Proc. of JSCE, Structural Eng. / Earthquake Eng., No.368, pp. 13-22, April 1986.
- 4) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造物の弾塑性・大変位離散化要素解法，土木学会論文報告集，第288号，pp. 41-55，1979年8月
- 5) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A. Total Lagrangian Nonlinear Analysis of Elastic Trusses, Proc. of JSCE, No. 344 / I-I(Structural Eng. / Earthquake Eng.), pp. 39-53, April 1984
- 6) Bathe, K. J., Wilson, E. L. and Peterson, F. E. : SAPIV A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems, A report to the National Science Foundation, Report No EERC 73-11, June 1973.
- 7) 鈴木敏郎・金子洋文：有限要素法による部材構成要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析，日本建築学会論文報告集第316号 pp. 9-17, 1982年6月
- 8) Bergan, P. G., Horrignoe, G., Krakelard, B and Soreide, T. H. : Solution Techniques for Nonlinear Finite Element Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 12, PP. 1677-1696, 1978.
- 9) Hung N. : Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shell : Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, No. 3. pp. 447-457, September 1964.
- 10) Yamada, S., Uchiyama, K and Yamada, M: Experimental Investigation of the Buckling of Shallow Spherical Shells, Int. J. Non-Linear Mech. Vol. 18, No. 1, pp. 37-54, 1983

(1986年10月17日受付)