

剛体棒要素モデルによるアーチの面内座屈解析

IN-PLANE BUCKLING ANALYSIS OF LIB ARCH BY RIGID BAR-ELEMENT MODEL

伊藤 文人* ・野上 邦栄** ・尾崎 浩明***

By Fumihito ITOH, Kuniei NOGAMI and Hiroaki OZAKI

This paper is discussed for the purpose of the development a new discrete model which has combined both merits of a bar element model of FEM and a rigid body-spring model for the limit analysis. As a concrete example the lib arch has been picked up, and the validity of the numerical results by this model has been examined by compared with by other methods.

Consequently, it is made clear that this model can introduced material non-linearity without difficulty in the elasto-plastic problems, also can apply with good accuracy to the elastic finite displacement analysis.

1. まえがき

実際の構造物、特に溶接による残留応力が存在する鋼構造物では材料的性質が除荷を含んだ複雑な非線形履歴型応力-ひずみ曲線となり、その非弾性挙動が部材の耐荷力に影響を及ぼすことが良く知られている。したがって、この部材の最大強度を的確に捉えるにはこの材料的非線形性と、さらに部材の初期曲がりや荷重の偏心などのいわゆる初期不整の外乱を含めた幾何学的非線形性を併せ持つ複合非線形問題として解析する必要がある。この複合非線形問題は、数値解析上かなり面倒な繰り返し計算を必要とし、有限要素法における変位法が最も有力な解析法として世界的に受け入れられている。他の解法にも境界要素法、伝達マトリックス法および差分法など多くの解析法があり、電算機のハードウェアの進歩およびソフトウェア技術の開発に伴ってこの種の問題の解析に利用されている。しかし、現実には精度の面や経済性の点からこれらの数値解析法が最も理想的な解法とは言えない現況にあり、この壁を打破する構造非線形解析法の実用性が求められている。

川井は極限解析の立場からこの問題に取り組んでいる。つまり、途中の経過にとらわれず構造物の崩壊メカニズムを仮定し、その最終荷重を推定する合理的方法を考えたのである。この方法は、塑性設計法の考え方であり特に新しい方法ではないが、数値計算上のモデル化にこの特色がある。川井の考案した新しい離散

* 正会員 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科 (〒158 世田谷区深沢2-1-1)

** 正会員 東京都立大学助手 工学部土木工学科 (〒158 世田谷区深沢2-1-1)

*** 正会員 工修 ㈱横河技術情報 (〒108 港区芝浦 4-3-4 きよたビル8F)

化モデルは「剛体－バネ」モデルと呼ばれ、薄肉構造、地盤・岩石、コンクリート構造および氷など多くの分野において崩壊、すべりおよび亀裂などに関する極限強度問題を中心に次々と良い成果が報告されており、このモデルの有効性が実証されつつある^{1) 2) 3)}。

著者らは、早い時期からこの新しいモデル化に興味を持ち研究を進めている。特に、棒部材に対して柱の塑性座屈を解明するため提案された Shanleyモデルを拡張したいわゆる「拡張Shanley」モデルを提案し、柱⁴⁾、はり－柱⁵⁾等の耐荷力解析を行っている。近藤は、ハイブリッド型はり要素を提案し応力法による骨組構造解析に適用している⁶⁾。吉田・關・梶川は、面内骨組部材の非弾性問題に剛棒要素とピン要素からなる剛体モデルを開発し伝達マトリックス法により解析している⁷⁾。また、深沢・土橋・長谷川は、ねじれ変形を含むより一般的な薄肉断面棒部材に対する定式化を行ない座屈問題に應用している⁸⁾。

本研究は、面内問題において有限要素法のはり要素モデルと極限解析用に開発された剛体－バネモデルの各々の長所を合わせ持つモデルとして既報のモデル^{4) 5)}を発展させた「剛体棒要素モデル」の定式化を行い、弾塑性問題における材料非線形特性を容易に導入できるばかりでなく、弾性有限変位問題にも十分な精度を有して適用できることを明らかにする。ここでは、その具体的適用例として無補剛アーチを採り上げる。また、本モデルを用いて無補剛アーチの耐荷力特性および設計における強度照査について若干の考察を行っている^{9) 10) 11)}。

2. バネ系の理論

(1) 基本仮定

無補剛アーチ部材を一次元バネ系理論として扱うために、次のような基本仮定を導入する。

- i) 断面寸法に比して部材長が十分に長い。
- ii) 軸ひずみは1に比して十分小さい。
- iii) 変形後も断面形状を保持する。
- IV) 無補剛アーチの軸線は直線要素により形成されている。
- V) アーチ軸線に作用する荷重は、変形後もその作用方向を変えない。

(2) 剛体棒要素モデル

剛体－バネモデルは、解析の対象部材を有限個の要素に分割し、その要素自体を剛体と仮定するものであり、隣接要素はその境界面上で互いの相対的な運動に抵抗するバネ系により結合され、しかもこのバネ系に力学的特性を持たせたものである。

棒部材の面内問題は、任意の荷重状態に対して軸方向伸縮、曲げおよびせん断の連成した変形を生じる。そのため、バネ系はこれらの複雑な変形を考慮

できるように選択することが重要になる。棒部材の伸び変形は、主に軸力による平均伸び成分および曲げによる伸び成分から成るが、これらの各伸び成分に見合うバネとして図-1(a)のように軸バネ、x軸まわりの回転バネを「集中バネ」系として配置することが考えられる。また、図-1(b)の軸バネのようにこれらの成分を従属的に考慮できる有限個から成る軸バネを「分布バネ」系として配置したモデルを用いることもでき

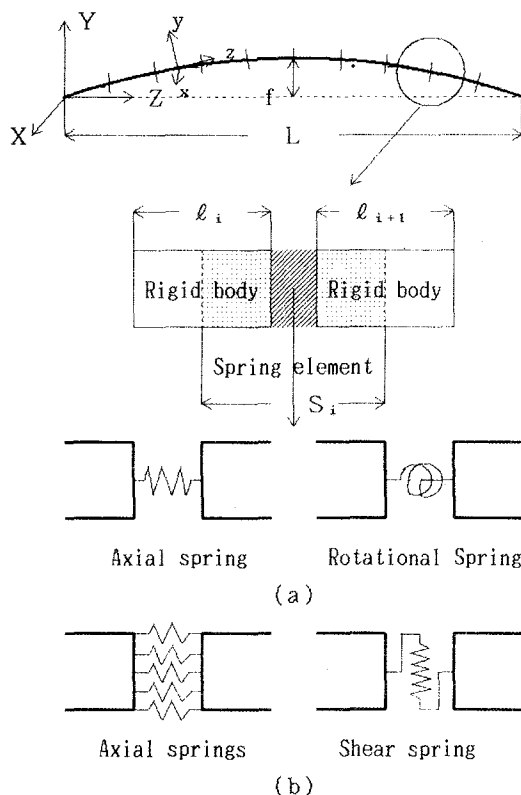


図-1 剛体棒要素モデル

る。曲げに伴うせん断変形を考慮する場合には、同様にせん断バネを集中バネ系あるいは分布バネ系として設けることができる。

本論文では、分布軸バネおよび集中せん断バネから構成された図-1(b)に示すような「剛体棒要素」モデルを用いることにする。なお、せん断バネは重心に一本配置している。

このバネ系を考える場合、その「要素」には2通りの捉え方がある。つまり、

- a) 剛体そのものを要素と考え、バネは要素境界断面に配置する。
- b) バネが力学的変形特性を代表している領域を要素と考える。その意味で、バネは要素の内部に配置されることになる。

である。a) は川井がこのモデルを提案する根拠とした塑性ヒンジやすべりを物理的に取り扱う時に有効な捉え方であるが、そのバネ常数は実験的にあるいは経験的に決定する必要がある。一方、b) は、a) に比べて有限要素法に近い考え方であり、この捉え方は、1次元棒要素や軸対称要素等の場合理論的にバネ常数を決定することが可能である。ここでは、b) の捉え方に立ち、この要素を「バネ要素」と呼ぶことにする。

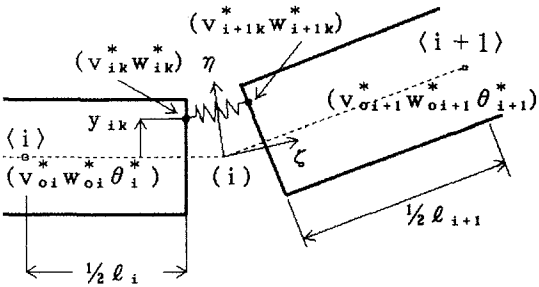


図-2 軸バネ取付点の相対変位

(3) 相対変位

用いる座標系は、図-1に示すように空間に固定した全体座標系 (XYZ)、剛体要素断面に固定した局所座標系 (xyz) および図-2に示すようにバネ取付境界面に固定した局所座標系 ($\xi\eta\zeta$) であり、z軸を重心軸に、 ζ 軸を軸バネ取付方向にそれぞれ一致させている。これら3組の座標系は、すべて右手系直交デカルト座標とする。また、全体座標系のY、Z軸方向の変位およびx軸に関する回転角としてそれぞれ v 、 w および θ を定義する。

いま、変形に伴い、剛体要素 $\langle i \rangle$ および剛体要素 $\langle i+1 \rangle$ の節点（一般に重心点）が $(v_{oi}^*, w_{oi}^*, \theta_i^*)$ $(v_{oi+1}^*, w_{oi+1}^*, \theta_{oi+1}^*)$ なる増分変位を生じる時、これらの剛体要素境界面上における第 k 番目の軸バネの対応する取付点の変位 (v_{ik}^*, w_{ik}^*) および $(v_{i+1,k}^*, w_{i+1,k}^*)$ は、図-2から明らかなように各剛体要素の境界面上の座標 $(y_{ik}, \frac{1}{2}l_i)$ および $(y_{i+1,k}, -\frac{1}{2}l_{i+1})$ を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} v_{ik}^* &= v_{oi}^* + (\cos \theta_i - \cos \theta_i^0) y_{ik} + \frac{1}{2} (\sin \theta_i - \sin \theta_i^0) l_i \\ w_{ik}^* &= w_{oi}^* + (\sin \theta_i^0 - \sin \theta_i) y_{ik} + \frac{1}{2} (\cos \theta_i - \cos \theta_i^0) l_i \\ v_{i+1,k}^* &= v_{oi+1}^* + (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_{i+1}^0) y_{i+1,k} - \frac{1}{2} (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_{i+1}^0) l_{i+1} \\ w_{i+1,k}^* &= w_{oi+1}^* + (\sin \theta_{i+1}^0 - \sin \theta_{i+1}) y_{i+1,k} - \frac{1}{2} (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_{i+1}^0) l_{i+1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

と与えられる。ここに、 l_i, l_{i+1} は剛体要素 $\langle i \rangle$ および $\langle i+1 \rangle$ の要素長さである。また、 θ_i は $\theta_i = \theta_i^0 + \theta_i^*$ で与えられる変形前の状態からの回転角であり、 θ_i^0 は初期曲がりを意味する。

したがって、このバネ取付点のYおよびZ軸方向の相対変位 (V_{ik}, W_{ik}) は、

$$\left. \begin{aligned} V_{ik} &= v_{i+1,k}^* - v_{ik}^* = \alpha_{vi} + 2 y_{ik} \beta_{vi} \\ W_{ik} &= w_{i+1,k}^* - w_{ik}^* = \alpha_{wi} + 2 y_{ik} \beta_{wi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

となる。ここに

$$\alpha_{vi} = v_{oi+1}^* - v_{oi}^* + \frac{1}{2} (l_{i+1} \sin \theta_{i+1}^0 + l_i \sin \theta_i^0) - \frac{1}{2} (l_{i+1} \sin \theta_{i+1} + l_i \sin \theta_i)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{vi} &= \sin \phi_i^0 \sin \phi_i^0 - \sin \phi_i \sin \phi_i \\ \alpha_{wi} &= w_{oi+1}^* - w_{oi}^* + \frac{1}{2}(\ell_{i+1} \cos \theta_{i+1}^0 + \ell_i \cos \theta_i^0) - \frac{1}{2}(\ell_{i+1} \cos \theta_{i+1} + \ell_i \cos \theta_i) \\ \beta_{wi} &= \sin \phi_i^0 \cos \phi_i^0 - \sin \phi_i \cos \phi_i \\ \phi_i^0 &= (\theta_{i+1}^0 - \theta_i^0)/2, \quad \phi_i = (\theta_{i+1} - \theta_i)/2 \\ \phi_i^0 &= (\theta_{i+1}^0 + \theta_i^0)/2, \quad \phi_i = (\theta_{i+1} + \theta_i)/2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (3)$$

を表す。

このようにして与えられた相対変位は、図-2に示すように、境界面上に採られた局所座標系（ $\eta \zeta$ ）に関する相対変位（ $\bar{V}_{ik}$, $\bar{W}_{ik}$ ）との間に

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{V}_{ik} \\ \bar{W}_{ik} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \cos \phi_i & \sin \phi_i \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_{ik} \\ W_{ik} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

の関係が成り立つ。ここに、 $[\quad]$ は全体座標系（ YZ ）と局所座標系（ $\eta \zeta$ ）の間の座標変換行列である。

したがって、第 k 番目の軸バネの相対変位 $\bar{W}_{ik}$ は、上式に式(2) を代入すると

$$\bar{W}_{ik} = C_{oi} + C_{1i} y_{ik} \quad \dots \dots \dots (5)$$

のように書き換えることができる。ここに

$$\left. \begin{aligned} C_{oi} &= -\alpha_{vi} \sin \phi_i + \alpha_{wi} \cos \phi_i \\ C_{1i} &= -2 \beta_{vi} \sin \phi_i + 2 \beta_{wi} \cos \phi_i \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

を表す。また、せん断バネ取付点（ $y_{ik} = 0$ ）における相対変位 $\bar{V}_{si}$ は

$$\bar{V}_{si} = \bar{V}_{ik} (y_{ik} = 0) = \alpha_{vi} \cos \phi_i + \alpha_{wi} \sin \phi_i \quad \dots \dots \dots (7)$$

と与えられる。

(4) 釣り合い方程式

第2節で提案した剛体棒要素モデルのバネ系において、バネ要素（ i ）の第 k 番目の軸バネのバネ力およびそのバネ常数を F_{ik}^a , K_{ik}^a と置くと、式(5) の相対変位と第 k 番目の軸バネ力との間には

$$F_{ik}^a = K_{ik}^a \bar{W}_{ik} \quad \dots \dots \dots (8)$$

の関係が成り立つ。

さらに、せん断バネ力およびバネ常数を F_{yi}^s および K_{yi}^s と置くならば

$$F_{yi}^s = K_{yi}^s \bar{V}_{si} \quad \dots \dots \dots (9)$$

となる。

いま、バネ要素（ i ）に関する変位を

$$\Delta^e = \{ w_{oi}^*; v_{oi}^*; \theta_i^*; w_{oi+1}^*; v_{oi+1}^*; \theta_{i+1}^* \} \quad \dots \dots \dots (10)$$

と置くならば、この仮想変位 $\delta \Delta^e$ に対する軸バネ力およびせん断バネ力による内部仕事 $\delta \Pi_{in}$ は、式(5), 式(7), 式(8) および式(9) を考慮すると

$$\delta \Pi_{in} = \sum_k F_{ik}^a \delta \bar{W}_{ik} + F_{yi}^s \delta \bar{V}_{si} \quad \dots \dots \dots (11)$$

と表すことができる。

また、無補剛アーチに作用する初期状態の外力は、求心方向あるいは鉛直方向の分布荷重とし仮定 (V) が成り立つものとする。この時、基本荷重を q 、この Y および Z 軸方向成分係数を e_{vi} 、 e_{wi} として与えられる等価節点力を P^e と置くならば、

$$P^e = \{e_{wi}q; e_{vi}q; 0; e_{wi+1}q; e_{vi+1}q; 0\} \dots\dots\dots (12)$$

となるので、仮想変位 $\delta \Delta^e$ による等価節点力 P^e の成す外部仕事 $\delta \Pi_{out}$ は

$$\delta \Pi_{out} = P^e \delta \Delta^e \dots\dots\dots (13)$$

と与えられる。

したがって、仮想仕事の原理である次式

$$\delta \Pi_{in} = \delta \Pi_{out} \dots\dots\dots (14)$$

に式(11)および式(13)を代入することにより、バネ要素 (i) に関する 6 本の釣り合い方程式 B^e が

$$B^e(\alpha^e) = 0 \dots\dots\dots (15)$$

のように与えられる。ここに、

$$\alpha^e = \{\Delta^e; q\} \dots\dots\dots (16)$$

を表し、 α^e は 6 個の変位成分と 1 個の荷重成分からなるバネ要素 (i) の変数ベクトルを意味する。

したがって、全バネ系の釣り合い方程式 B は、式(15)の重ね合わせとして次式

$$B(\alpha) = \sum_e B^e(\alpha^e) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

を得る。ここに、バネ要素数を n とするならば、 α は $(3n+4)$ 個から成る全バネ系の変数ベクトルを表す。

(5) バネ常数

剛体棒要素モデルが精度の良い結果を与えるための重要な要因は、バネ系のバネ常数の選定にある。このバネ常数の決定は、厳密にはエネルギー原理を用いて行われるべきであり、連続体としての内部仕事 δU_{in} と式(11)で与えられるバネ系のバネによる内部仕事 $\delta \Pi_{in}$ が、同一の変形状態に対して

$$\delta U_{in} = \delta \Pi_{in} \dots\dots\dots (18)$$

になるように選ぶのが良い。

一般に、有限変位理論における連続体としての要素 (i) の一般化ひずみは、

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{oi} + \rho_i y \dots\dots\dots (19)$$

の関係式で与えられる軸ひずみ ε_i と曲げにより生じるせん断ひずみ γ_i から成り立つ。ここに、 ε_{oi} は平均軸ひずみ、 ρ_i は曲率を意味する。

また、剛体棒要素モデルにおけるバネ要素 (i) の第 k 番目の軸バネ取付点の軸ひずみおよびせん断バネ取付点のせん断ひずみをそれぞれ ε_{ik} 、 γ_{si} と表す時、これらのひずみは式(5) および式(7) で与えられる各相対変位を用いて

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ik} &\equiv \bar{W}_{ik} / S_i \\ \gamma_{si} &\equiv \bar{V}_{si} / S_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

と定義できるものとする。ここに、 S_i はバネ要素長である。

この時、上式は連続体としての一般化ひずみである式(19)および r_i との間に

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{oi} &= C_{oi}/S_i \\ \rho_i &= C_{ii}/S_i \\ r_i &= r_{si} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

の関係が成り立つ。特に、微小変位状態において、上式は式(6) を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{oi} &= (w_{oi+1}^* - w_{oi}^*)/S_i \\ \rho_i &= -(\theta_{i+1}^* - \theta_i^*)/S_i \\ r_i &= \left\{ -(v_{oi+1}^* - v_{oi}^*) + \frac{1}{2}(\ell_{i+1}\theta_{i+1}^* + \ell_i\theta_i^*) \right\}/S_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

と与えられ、各々差分近似によるひずみ成分に対応した物理量を意味していることがわかる。

したがって、式(18)を満足する条件は、式(21)の関係を考慮すると次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (EA)_i/S_i &= \sum_k K_{ik}^a \\ (EI_y)_i/S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik} \\ (EI_{yy})_i/S_i &= \sum_k K_{ik}^a y_{ik}^2 \\ (GA)_i/S_i &= K_{yi}^s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 A_i は断面積、 E 、 G はそれぞれヤング率およびせん断弾性係数を意味し、さらに I_y および I_{yy} はそれぞれ x 軸に関する断面 1 次モーメントおよび断面 2 次モーメントを表す。

(a) 弾性バネ常数

いま、バネ要素 (i) の第 k 番目の軸バネはその境界面の部分断面積 A_{ik} を受け持ち [$A_i = \sum_k A_{ik}$]、しかもその取付点 (x_{ik} , y_{ik}) は、この断面要素の重心点に取付けるものとする。この時、軸バネ常数を

$$K_{ik}^a = EA_{ik}/S_i \dots\dots\dots (24)$$

と置くならば、式(23)の第 1 式を満足する。さらに、式(23)の第 2 式および第 3 式を満足するように軸バネ本数を決めれば良い。また、せん断バネのバネ常数は式(23)の第 4 式で与えられる。

特に、2 軸対称断面部材の場合は

$$K_{ik}^a = EA_i/(2S_i) \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる軸バネ常数を持つ 2 本の軸バネを中立軸に関して対称に

$$y_{ik}^2 = I_{yy}/A_i \dots\dots\dots (26)$$

の距離つまり断面 2 次半径の位置に配置するのが良い。この時、式(23)の第 1 式～第 3 式を全て満足する。

(b) 非弾性バネ常数

非弾性域の剛体棒要素モデルの取り扱いにおいて次の仮定を導入する。

- ① 材料の降伏は、軸方向応力のみにより決まるものとし、せん断応力は無視する。
- ② 応力-ひずみの関係は、図-3 の履歴型完全弾塑性体のものを用いる。
- ③ 残留応力は、図-4 のような溶接型断面の理想化した残留応力分布を用いる。
- ④ 非弾性領域における剛性は弾性領域のみを有効とする接線係数理論によるものとする。

この仮定の基、バネ要素 (i) における第 k 番目の軸バネのバネ力およびバネ常数は次のようにまとめられる。

$$\left. \begin{aligned}
 & -\varepsilon_{yik} < \varepsilon_{ik} < \varepsilon_{yik} \text{ において} \\
 & F_{ik}^a = E \varepsilon_{ik} A_{ik} \\
 & K_{ik}^a = E A_{ik} / S_i \\
 \\
 & |\varepsilon_{ik}| \geq \varepsilon_{yik} \text{ において} \\
 & F_{ik}^a = E \varepsilon_{yik} A_{ik} \\
 & K_{ik}^a = 0 \\
 \\
 & |\varepsilon_{ik}| \geq \bar{\varepsilon}_{ik} \text{ において} \\
 & F_{ik}^a = \bar{F}_{ik}^a - E (\bar{\varepsilon}_{ik} - \varepsilon_{ik}) A_{ik} \\
 & K_{ik}^a = E A_{ik} / S_i
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

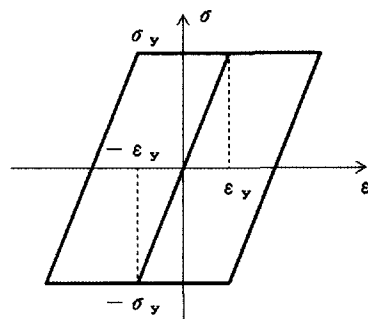


図-3 応力-ひずみ関係

式中、 $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^* + \varepsilon_{rik}$ である。ここに、 ε_{ik}^* および ε_{rik} は各々バネ要素 (i) における外力により生ずる軸ひずみおよび残留ひずみである。また、 ε_{yik} は降伏ひずみ、さらに $\bar{F}_{ik}^a$ 、 $\bar{\varepsilon}_{ik}$ は最大軸バネ力およびその時の軸ひずみを意味する。

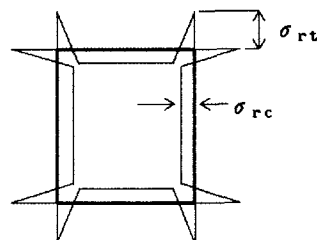


図-4 残留応力分布

(6) 非線形計算手法

構造物の非線形釣り合い方程式の解法において、一般に限界状態付近で解の収束が悪くなることが良く知られている。これを改善するため本論文では、Newton-Raphson 法 (主に Modified Newton-Raphson 法を用いている。) に対して弧長増分法¹²⁾ を併用することにより、制御変数パラメータの自動選択を行い急変する釣り合い径路の追跡計算を可能にしている。

弧長増分法における制約条件として球状探索面を導入する時

$$(\alpha - \alpha_1)^T (\alpha - \alpha_1) - \rho^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

なる条件式を得る。ここに、 α_1 は第 I ステップにおける釣り合い点の既知変数、 ρ は弧長を意味する。

いま、式(17)の第 (I + 1) ステップの近似解として $\alpha^{(k)}$ を選ぶ時、

$$\left. \begin{aligned}
 & B(\alpha^{(k)}) = \Phi \\
 & (\alpha^{(k)} - \alpha_1)^T (\alpha^{(k)} - \alpha_1) - \rho^2 = \Psi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

とし、Newton-Raphson法を用いるものとするれば

$$\left. \begin{aligned}
 & K_t(\alpha^{(k)}) d\alpha = -\Phi \\
 & 2(\alpha^{(k)} - \alpha_1)^T d\alpha = -\Psi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

の連立式によって次の近似解への修正ベクトル $d\alpha$ を求め、解が収束するまで繰り返し計算を行えば良い。ここに、 Φ および Ψ は不平衡量であり、 K_t は $K_t = \Sigma_e K_t^e = \Sigma_e \partial B^e / \partial \alpha^e$ で与えられる全体系の接線剛性行列を意味する。

なお、微小変位状態におけるバネ要素 (i) の荷重列を除いた接線剛性行列 K_t^e は、バネ要素を等分割とし $\ell_i = \ell_{i+1} = S_i = \ell$ と置けば、表-1 のように与えられる。この剛性行列は、式(23)の関係が成り立つならば Timoshenko はり要素の 1-Point reduced integration 法による剛性行列と全く同形になる。なお、都井は回転バネと剪断バネからなる剛体-バネモデルと reduced integration 法によるはりの曲げ要素の剛性行列が等価になることを報告している¹³⁾。

表-1 バネ要素の剛性行列

$\sum_k K_{ik}^a$	0	$-\sum_k K_{ik}^a y_{ik}$	$-\sum_k K_{ik}^a$	0	$\sum_k K_{ik}^a y_{ik}$
K_{yi}^s	$\frac{1}{2} \ell K_{yi}^s$		0	$-K_{yi}^s$	$\frac{1}{2} \ell K_{yi}^s$
$\sum_k K_{ik}^a y_{ik}^2 + \frac{1}{4} \ell^2 K_{yi}^s$	$\sum_k K_{ik}^a y_{ik}$	$-\frac{1}{2} \ell K_{yi}^s$	$-\sum_k K_{ik}^a y_{ik}^2 + \frac{1}{4} \ell^2 K_{yi}^s$		
	$\sum_k K_{ik}^a$	0	$-\sum_k K_{ik}^a y_{ik}$		
SYM.		K_{yi}^s		$\frac{1}{2} \ell K_{yi}^s$	
					$\sum_k K_{ik}^a y_{ik}^2 + \frac{1}{4} \ell^2 K_{yi}^s$

3. 無補剛アーチの面内座屈解析

ここでは、数値計算例として無補剛アーチを採り上げて、弾性座屈解析、等断面および変断面アーチの耐荷力解析から得られる解と既報の数値解や実験値との比較を行うことにより第2章で提案した剛体棒要素モデルの妥当性を検証する。さらに、放物線アーチの耐荷力に及ぼす諸要因について数値計算を試みる。

(1) 弾性座屈解析

本モデルを用いた解析法による弾性解の精度を照査するため、偏平円弧アーチの理論解および放物線アーチの実験値との比較を行った。まず、偏平円弧固定アーチにおいてバネ要素数が解の精度に及ぼす影響についての計算結果を表しているのが図-5である。縦軸には求心満載荷重の無次元量、横軸には支点の水平反力の無次元量を取っている。実線は理論解¹⁴⁾であるが本モデルによる解曲線は、 $n=18$ でほぼ良い一致を示している。なお、断面内の軸バネ本数は $k=2$ 本用いた。

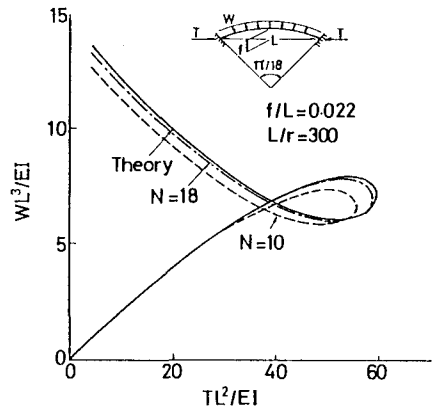


図-5 弾性解の精度に及ぼすバネ要素数

次に、細長比 $L/r=2080$ の長方形断面を有する放物線アーチに等分布満載鉛直荷重を載荷した場合の実験値¹⁵⁾と本解析解との比較を行った。固定および2ヒンジアーチの比較結果が図-6である。縦軸は限界水平反力の無次元量、横軸はスパン・ライズ比を取っている。解析を行うに当たってはアーチが非常に細長くライズ比が高いためバネ要素数は $n=30$ を用いた。本モデルの計算値は実験結果と非常に良い一致を示している。

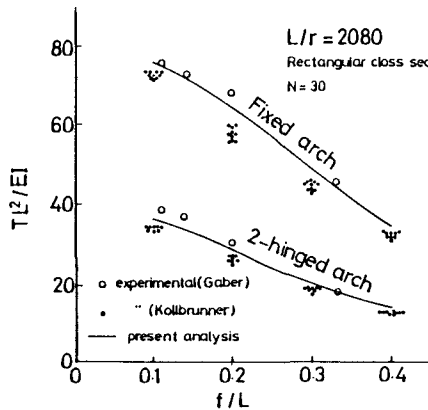


図-6 本モデルによる弾性解と実験値の比較

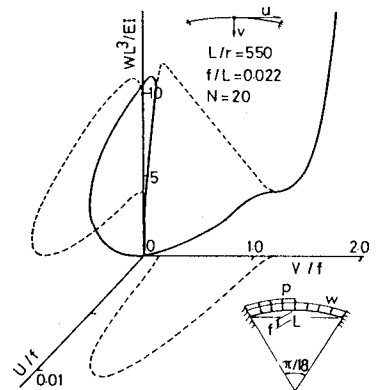


図-7 偏平円弧固定アーチの後座屈

釣り合い径路に分岐点を持つ偏平円弧固定アーチの後座屈挙動の追跡計算を行った。等分布求心荷重満載時のクラウンの変形挙動を表したのが図-7である。図中の縦軸は等分布求心荷重の無次元量、横軸はそれぞれクラウンの水平変位および鉛直変位とライズの比で

表-2 解析データの基本値

構造形式	放物線、固定・2ヒンジ
断面形式	箱型
鋼材	$\sigma_y = 240 \text{ N/mm}^2$
	$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$
細長比	$L/r = 150$
スパン・ライズ比	$f/L = 0.15$
初期曲がり	$e/L = 1/1000$
残留応力	$\sigma_{rc}/\sigma_y = 0.4$
	$\sigma_{rt}/\sigma_y = 1.0$
死活荷重比	$p/w = 0.4$
活荷重長比	$L_1/L = 0.5$

ある。破線は各面への投影曲線を表す。分岐点を含む釣り合い径路を十分な精度で追跡しており、本モデルは弾性有限変位解析に充分適用できることが明らかになった。なお、この解析では極めて微小な荷重不整 ($p/w = 0.001$) を与えた不完全系として非線形解析を行っている。

(2) 耐荷力解析

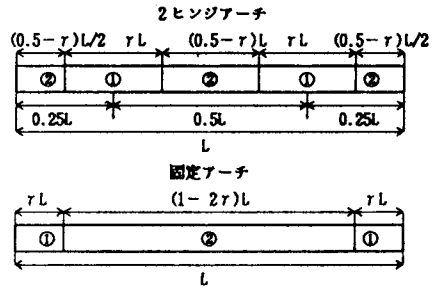
無補剛アーチの耐荷力を支配する基本的要因としては、スパン・ライズ比、細長比、鋼種、荷重形状、初期曲がり、残留応力および死活荷重比などが上げられるが、本解析では表-2に示す値を基本値として用いることにする。なお、変断面アーチでは、さらに断面形状変化およびその変化区間などが加わる。そこで、表-3に示すように2ヒンジアーチの場合 $L/4$ 点を、固定アーチの場合端部を基準断面にとり、この基準断面に対してフランジの板厚変化のパラメータ α (断面の高さおよび幅は一定) および部材区間パラメータ τ を導入して変化させることにする。

(a) 等断面アーチ

本モデルの解の精度を検討するため新家らの長方形断面を有する放物線アーチの解析結果¹⁶⁾ および実験結果¹⁷⁾ との比較を行った。その結果が図-8 および図-9 である。図-8 における縦軸は限界荷重の無次元量を、横軸はバネ要素数を採っている。バネ要素数が $n=20$ でほぼ新家らの解析値と一致している。なお、軸バネ本数は $k=20$ を用いた。

さらに、箱型断面放物線アーチの耐荷力に及ぼす軸バネ本数についても検討しており、その結果ではフランジおよびウェブに対して各々 $k=8$ 本以上の軸バネを配置すれば充分な精度の解が得られることが明らかになった。したがって、変断面アーチ、残留応力分布および降伏領域の進展等を考慮して以後の解析ではバネ要素数を $n=30$ および断

表-3 断面変化とその基本値



- ① 基準断面: $t_r = t_r^0, t_w = t_w^0$
 ② $t_r = \alpha t_r^0, t_w = t_w^0$

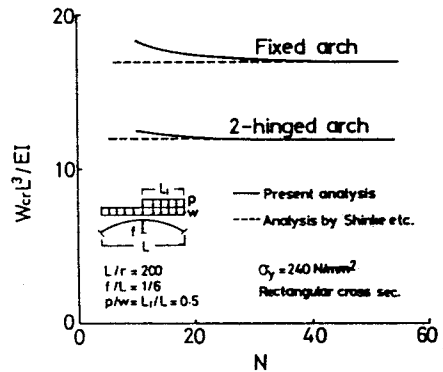
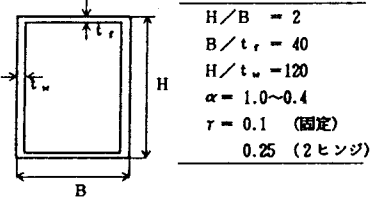


図-8 耐荷力の精度に及ぼすバネ要素数

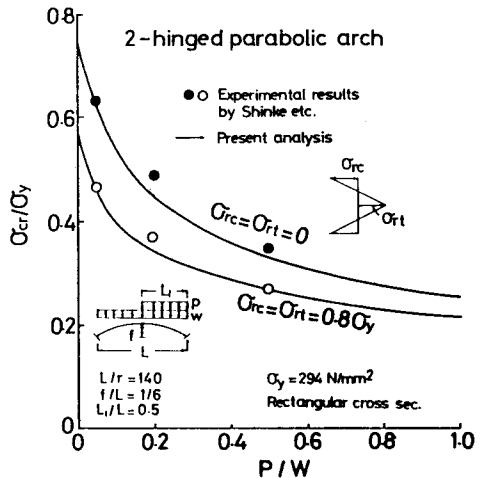


図-9 数値解と実験値の比較

面構成板に対する軸バネ本数をそれぞれ $k=20$ 用いることにする。

また、図-9は、新家らの実験による死活荷重比と耐荷力の関係を示している。縦軸は限界水平反力の応力表示 σ_{cr} と降伏応力 σ_y の比、横軸は死活荷重比を採っている固定および2ヒンジアーチ共に新家らの実験値に比べ本モデルの解析値はやや低めの値ではあるが全体的に良い傾向を示している。

次に、アーチの耐荷力に影響を与える主な要因について検討した。図-10は、対称分布荷重と偏載分布荷重の荷重形状において活荷重長 L_1 が耐荷力に与える影響について解析した結果である。活荷重長比が $L_1/L=0.5$ よりやや低めの値の時に最小耐荷力を与えており、固定および2ヒンジアーチの耐荷力にと

て満載等分布死荷重と半載等分布活荷重が偏載荷されている時がもっとも不利な荷重状態であると見做すことができる。

図-11は、死活荷重比が耐荷力に与える影響について示している。耐荷力は、半載等分布活荷重状態において死活荷重比 p/w が大きくなるに従って減少しており、固定および2ヒンジアーチ共に $p/w=1.0$ の時の耐荷力は $p/w=0$ のそれと比較して40%以上も減少している。

図-12および図-13は、2ヒンジアーチに対して細長比と耐荷力の関係を初期曲がりおよび残留応力をパラメータにして表したものである。図-12から明らかなように初期曲がりがすべての細長比に対する耐荷力に与える影響は少ないと言える。これは、 $p/w=0.4$ の半載等分布活荷重が初期曲がりよりも耐荷力に与える影響が大きいためであり、実際のアーチ系橋に対する死活荷重

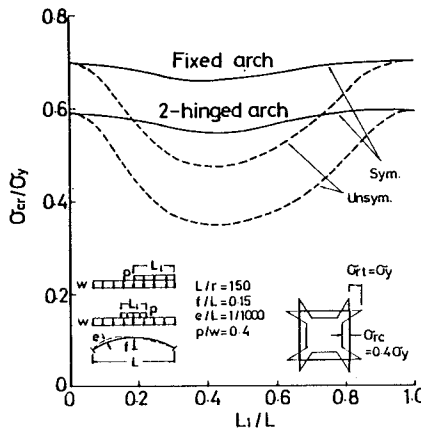


図-10 荷重形状と耐荷力の関係

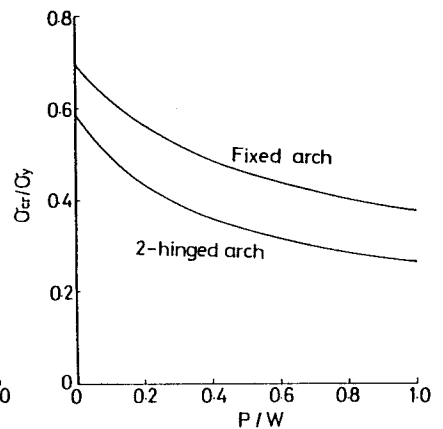


図-11 死活荷重比と耐荷力の関係

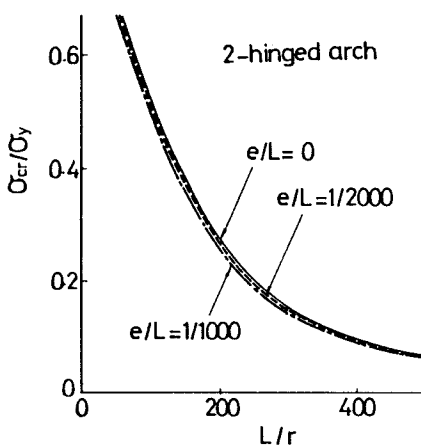


図-12 細長比と耐荷力の関係
(初期曲がりの影響)

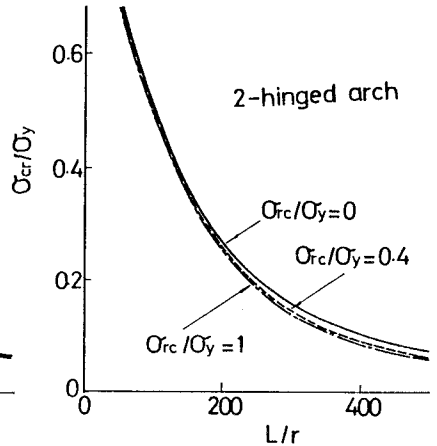


図-13 細長比と耐荷力の関係
(残留応力の影響)

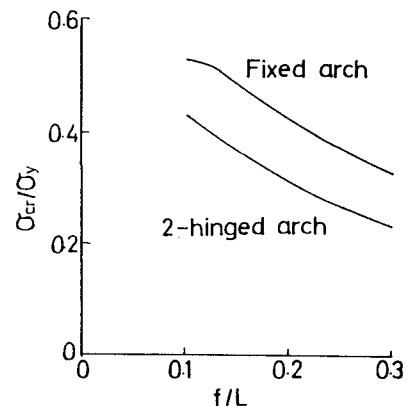


図-14 スパン・ライズ比と耐荷力の関係

比が 0.2~0.4 程度の範囲にあることを考えると、初期曲がりの影響は無視できるものと考えられる。また、図-13において、細長比が $L/r=150$ までは殆ど残留応力の影響はないが、この値を越えるとその影響が現れる。この傾向は固定アーチについても同様の結果を得た。この解析結果および死活荷重比と耐荷力の関係を残留応力をパラメータにして解析した結果から判断すると、実際に残留応力が耐荷力に与える影響は、 $L/r < 200$ および $p/w > 0.2$ であればあまり考慮する必要はないと言える。さらに、初期曲がりおよび残留応力の有無に関わらず細長比が大きくなるにしたがって耐荷力は著しく低下しており、細長比が耐荷力に与える影響は大きい。

最後にスパン・ライズ比が耐荷力に及ぼす影響について検討した。固定および2ヒンジアーチについて解析した結果が図-14である。スパン・ライズ比の増加とともに耐荷力は減少しており、スパン・ライズ比がアーチの耐荷力に及ぼす影響は大きい。

(b) 変断面アーチ

小松ら¹⁸⁾の変断面アーチの耐荷力解析結果と本モデルによる解析結果との比較を行なった。その結果が図-15である。縦軸は限界水平反力をアーチの長さに沿って平均した断面積で除した応力度と降伏応力度の比であり、横軸は細長比である。図中の実線は本解析解を、一点破線は小松らが伝達マトリックス法により得た解析値を示している。本モデルによる解析結果は小松らの計算値と良い一致を示していることがわかる。

次に、断面形状の変化およびその部材区間の変化による放物線アーチの耐荷力に及ぼす影響を検討した。図-16は、固定アーチにおいて基準断面の区間パラメータ γ と耐荷力の関係を板厚変化の割合 α をパラメータにして表したものである。

$\gamma = 0.4 \sim 0.5$ では板厚を変化させても等断面アーチの耐荷力との差はなく、 $\gamma = 0.4 \sim 0.3$ にかけて漸減し、 $\gamma = 0.3 \sim 0.05$ まではほぼ一定に成っている。2ヒンジアーチについても同様な傾向があり、 $\gamma > 0.3$ の範囲では等断面アーチの耐荷力と等しく、それ以下では減少傾向を示した。本解析における断面変化は一段階であるので、この結果により一般の変断面アーチについて結論づけることはできないが、一般的傾向として固定アーチでは $\gamma = 0.1$ 、2ヒンジアーチでは $\gamma = 0.25 \sim 0.3$ あたりにすると最も経済的な設計ができ、逆に基準断面の部材をさらに増やしてもアーチ全体の強度アップにはつながらない。

なお、紙面の都合で示すことができなかったが細長比、死活荷重比およびスパン・ライズ比が変断面アーチの耐荷力に及ぼす影響についても解析しており、それらの結果によると全体的に等断面アーチの特性と良い類似が見られた。

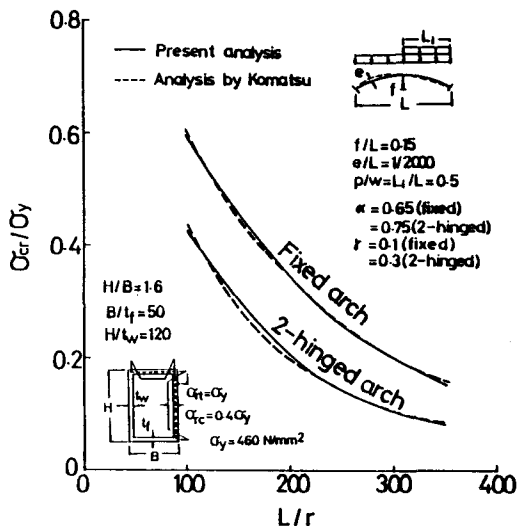


図-15 変断面アーチの耐荷力の精度

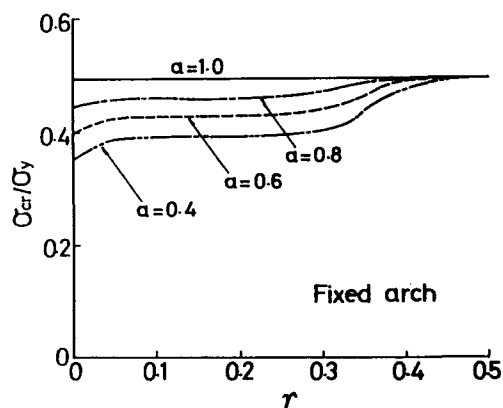


図-16 断面形状およびその区間変化による耐荷力に及ぼす影響

4. アーチの設計における終局強度照査について

アーチ橋の設計に対して現道路橋示方書¹⁹⁾は、幾何学的非線形性を考慮に入れた真の断面力を計算しなければ成らない場合の目安として「変位の影響」を、終局強度に対して一定の安全率を確保することを主旨として弾性有限変位解析による応力度照査の形をとった「終局強度の照査」を規程として設けている。

しかし、変位の影響の判定式は、固定アーチでの精度が不明確であること、死活荷重比の影響を直接的な形で捉えることができないこと、さらに軸方向力と曲げモーメントによる応力度比をかなり狭い範囲に限定していることなどの問題点を含んでいる。また、終局強度の照査ではこの適用範囲について不明確になっている²⁰⁾。

そこで、これらの疑問点について本モデルを用いた数値解析により考察を加えることにする。死活荷重比に着目して変位の影響について検討したのが図-17および図-18である。両図は、最大縁応力度が生じた断面での軸応力度 σ_a と曲げ応力度 σ_b の比 σ_b/σ_a （示方書の応力度比の逆数）および弾性有限変位解析により得られた最大縁応力度 σ_f と微小変位解析により得られた最大縁応力度 σ_m の比 σ_m/σ_f と死活荷重比の関係を示している。なお、荷重は、規程に従う最大荷重と弾性有限変位解析により得られる応力度が許容圧縮応力度（局部座屈は考慮していない。）に達した時の荷重のうち小さい方の値を採用している。

図-17の放物線固定アーチは、微小変位解析による解と弾性有限変位解析によるそれは $p/w < 0.7$ の範囲において良い一致を示しており、縁応力度比の最大低下率は数%に過ぎなかった。また、図-18の2ヒンジアーチの場合微小変位解析による解はすべての p/w に対して弾性有限変位解析による解より低めの値を与えており、あまり解の精度が良くない。また、縁応力度比の最大低下率は約20%に達し $p/w = 0.2 \sim 0.4$ の範囲では数%の減少となった。

さらに、スパン・ライズ比および細長比による変位の影響について解析しており、これらの結果を総合すると、実際の死活荷重比 $p/w = 0.2 \sim 0.4$ および規程の応力度比 $\sigma_a/\sigma_b = 0.7 \sim 1.3$ （ $\sigma_b/\sigma_a = 0.77 \sim 1.43$ ）の範囲にある固定および2ヒンジアーチは、微小変位解析による断面力算定を行えば充分であるとまとめることができる。また、固定アーチは微小変位解析に従う場合の応力度比をさらに広い範囲に適用できる。

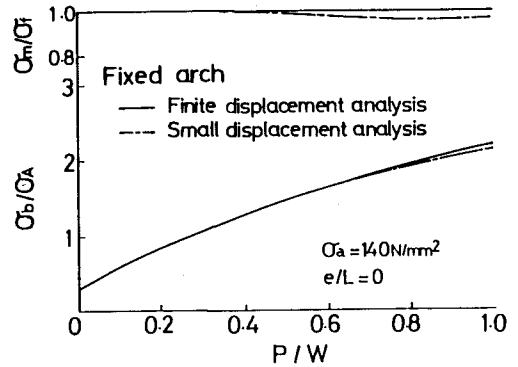


図-17 変位の影響（固定アーチ）

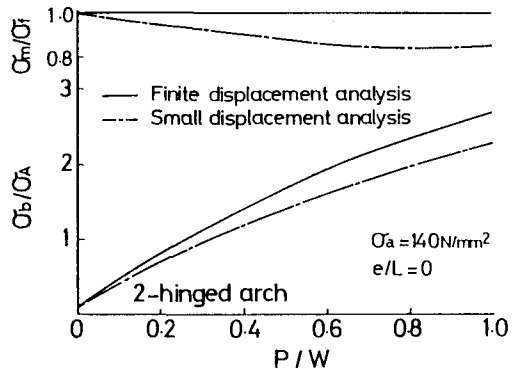


図-18 変位の影響（2ヒンジアーチ）

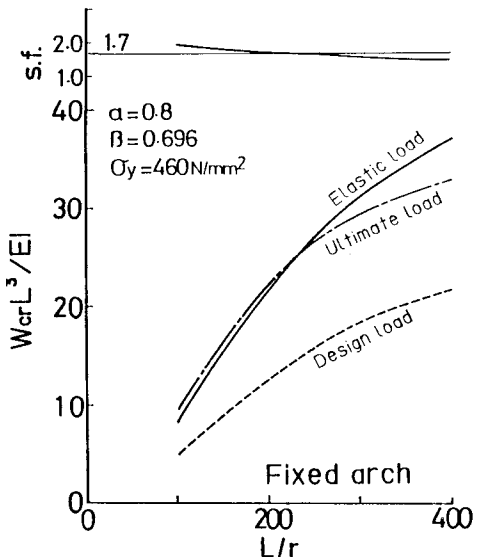


図-19 終局強度の比較（固定アーチ）

次に、終局強度の照査についてハイブリッドアーチを用いて検討を行った。ここで用いたデータは表-3を基本値とし、新たに基準断面の降伏応力 ($\sigma_y = 460\text{N/mm}^2$) と他の変更断面の降伏応力度の比で与えられる強度低減係数 β を導入している。図-19および図-20はそれぞれ固定および2ヒンジアーチの場合について細長比と限界荷重の関係を示したものである。両図中の実線および破線はそれぞれ弾性荷重、最大設計荷重であり、一点破線は耐荷力解析による限界荷重を表している。ここでの弾性荷重は弾性有限変位解析により得られた応力度が照査式の応力度に達した時の値であり、この弾性荷重を1.7で除した荷重を最大設計荷重として与えた。また、限界荷重に対する最大設計荷重の比で表した安全率 $s.f.$ と細長比の関係を付図してある。固定および2ヒンジアーチともに細長比が大きくなるにしたがって弾性荷重が限界荷重より高い値を示しており、 $L/r > 200$ の領域になると1.7の安全率を確保出来なくなる。

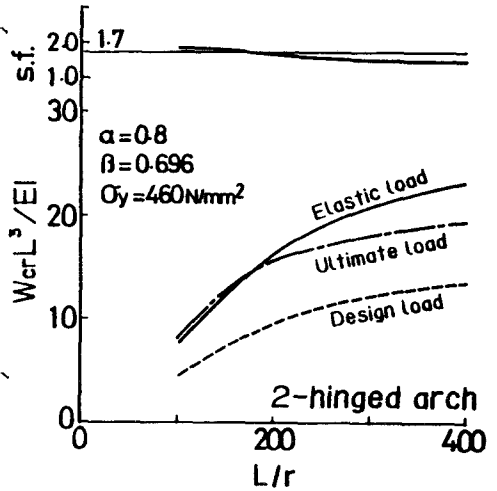


図-20 終局強度の比較
(2ヒンジアーチ)

5. 結論

本論文は、弾性変形の段階から塑性崩壊までを一貫して追跡できる新しい「剛体棒要素」モデルを提案し、無補剛アーチの有限変位解析および耐荷力解析によりその妥当性を検証した。さらに、無補剛アーチの耐荷力に及ぼす諸要因およびアーチの設計における強度照査について考察を加えた訳であるが、その特徴をまとめると次のようになる。

- (1) 有限要素法では要素内の変位状態を決定するのに形状関数が重要になるが、剛体棒要素モデルは、隣接剛体境界面上の対応点の相対変位によりバネ要素内の変位状態を決定しており、隣接剛体の境界面において変位の連続性の条件を満足しない、いわゆる非適合要素モデルと考えることができる。これは、表-1で与えられるせん断変形を考慮した剛性行列が1-point reduced integration法を用いたTimoshenkoはり要素と等価になることから明らかである。
- (2) 本モデルは、式(24)のバネ常数を用いる限り弾性解の精度が保証でき、幾何学的非線形問題に対して十分な精度で数値解が得られる。さらに、耐荷力問題の場合断面内の塑性領域の進展などを容易にしかも精度よく追跡でき、得られた解は過去の解析解および実験値と良い一致を見た。一連の解析における収束判定は修正ベクトル d $\|d\| < 10^{-3}$ を満足するように行い、非弾性領域が生じている場合の各ステップの解は平均4～5回で収束した。なお、解析における構造全体の総自由度数は従来の有限要素法に比較して必ずしも少なくなるとは言えない。
- (3) 等断面および変断面アーチの耐荷力に及ぼす影響は、細長比、スパン・ライズ比および死活荷重比等の要因に支配されることが従来から知られているが、本モデルの耐荷力解析からも同様な結果を得た。また道路橋示方書のアーチに関する規程において、変位の影響の判定式は死活荷重比および応力度比が所定の範囲にあるならば充分満足できる。さらに固定アーチの場合応力度比を従来の範囲よりもより広い領域に適用できる。また、一段階の断面変化による簡単なハイブリッドアーチの解析結果から一般のアーチについて結論づけることはできないが、一般的傾向として細長比が大きな範囲さらに2ヒンジアーチでは死活荷重比が小さな範囲においても終局強度の照査における所定の安全率を確保できない状態が生じるのでその適用範囲には注意を要する。

参考文献

- 1) 川井忠彦編：離散化極限解析法に関する最近の話題，生研セミナーテキスト，コース116，生産技術研究奨励会，1986
- 2) 川井忠彦・都井裕・竹内則雄：不連続体力学のすすめ（その1～その7），生産研究，1980～1984
- 3) 都井裕・川井忠彦：薄肉構造の離散化極限解析（その2～その5），日本造船学会論文集，No.151～No.154，1982～1983
- 4) Nogami,K and Itoh,F : Analysis of ultimate strength of column using FREM, Faculty of Technology Tokyo Metropolitan University, No. 31, pp.53～61, 1981
- 5) 浦辺信一・野上邦栄・伊藤文人：有限剛体要素モデルによる梁－柱の耐荷力解析，応用力学連合講演会第30回，pp.215-216, 1980
- 6) 近藤一夫：骨組構造解析における一離散化手法（その1～その3），日本建築学会論文報告集，No.304, pp.33-42, No.312, pp.36-46, No.326, pp.25-35, 1981～1983
- 7) 吉田博・關謙二・梶川康男：剛体モデルを用いた伝達マトリックスによる平面骨組の大変形弾塑性解析，土木学会論文集，No.356/I-3, pp.507-515, 1985
- 8) 深沢泰晴・土橋浩・長谷川彰夫：有限剛体モデルによる薄肉材の座屈問題の一定式化，構造工学論文集 pp.183～191, 1986
- 9) 尾崎浩明・野上邦栄・伊藤文人：有限剛体要素モデルによるアーチの弾性座屈解析，土木学会年次学術講演会，第38回，1983
- 10) 尾崎浩明・野上邦栄・伊藤文人：有限剛体要素モデルによるアーチの面内耐荷力解析，土木学会年次学術講演会，第39回，1984
- 11) 尾崎浩明・野上邦栄・伊藤文人：有限剛体要素モデルによる無補剛アーチの面内耐荷力解析，土木学会年次学術講演会，第40回，1985
- 12) Itoh,F and Nogami,K : On the tracing calculation of the equilibrium path for imperfect systems , Proceed. of JSCE , No.368/I-5 , pp.354-363 , 1986
- 13) 都井裕：骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析，日本造船学会論文集，第147号，pp.329～336, 1980
- 14) Clive L.Dym : Stability theory and its application to structural mechanics, Noordhoff International Publishing, 1974
- 15) 平井 敦：鋼橋Ⅲ，技報堂，1967
- 16) 新家徹・頭井洋・波田凱夫：アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析，土木学会論文報告集，No.244, pp.57～69, 1975
- 17) 新家徹・頭井洋・波田凱夫：アーチの面内耐荷力解析と模型実験，土木学会論文報告集，No.263, pp.11～23, 1977
- 18) 小松定夫・新家徹：アーチの面内耐荷力の实用算定式について，土木学会論文報告集，No.267, pp.39～52, 1977
- 19) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（Ⅰ共通編 Ⅱ鋼橋編），1980
- 20) 大森邦雄：道路橋示方書Ⅱ鋼橋編改訂の背景と運用，第6回第11章アーチ，橋梁と基礎，pp.10～14, 1981

(1986年10月18日受付)