

薄肉曲線部材の有限変位場

FINITE DISPLACEMENT FIELD OF THIN-WALLED CURVED AND TWISTED BEAMS

林 正^{*} 岩崎英治^{**} 前田幸雄^{***}

By Masa HAYASHI, Eiji IWASAKI and Yukio MAEDA

A finite displacement field of thin-walled curved and twisted beams is formulated under the both assumptions of the rigid cross section and the shearing strain in a thin-walled beam. The accurate displacement field for thin-walled beams, which is expressed by the four independent components of the displacements on the beam axis, becomes so highly nonlinear and complicated by the finite rotation and the warping of the cross section that the so-called second order theory is used in the formulations.

The present finite displacements are applied for the lateral buckling analysis of a thin-walled curved beam, for which the both effects of the in-plane deformation before buckling and the difference of the initial curvature between each generating line are taken into account.

1. まえがき

薄肉断面部材の有限変位理論では、3次元空間での有限な回転の取り扱いが難しいことや、3次元的な断面のそりを1次元化された棒部材で正確に評価することが困難なことから、薄肉断面部材の厳密な有限変位場は求められていない^{1)~3)}。

薄肉断面部材の有限変位場に関する研究は数多く行われており、西野・倉方・長谷川・奥村⁴⁾はグリーンのひずみの式から薄肉直線部材の変位場を求めている。薄木⁵⁾は薄肉回転シェルのひずみの式を用いて薄肉円弧部材を解析している。これらの報告では、非線形のひずみ-変位関係式を解くことによって変位場を求めているが、非線形方程式は特別な場合を除いて厳密な解が得られないので部材軸方向変位の微係数の2次項を無視するなどの近似がなされており、有限回転は正確に扱われていない。薄木・稔農⁶⁾は薄肉円弧部材のひずみ-変位の非線形連立偏微分方程式の非線形項に仮定の微小なパラメータを乗じて、摂動法により2次の有限変位場を求めている。平嶋・井浦・依田⁷⁾は回転ベクトルを用いて初期曲率・ねじれ率のある薄肉曲線部材の有限変位場を求めており、それに関する項を除けば有限回転は厳密に扱われている。さらに、仮想仕事の原理により2次の非線形項を含んだ平衡方程式を求め、これを線形化して円弧アーチの横倒れ座屈の問題を解いて Vacharajittiphan-Trahair^{1)~3)}の結果に一致した解を求めている。阿井・西野⁸⁾は断面のそりに付随する横断面内の相対的な変位を考慮した初期形状に依存しない薄肉断面部材の基礎方程式を定式化している。

* 工博 長岡技術科学大学 教授 工学部建設系

(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

** 長岡技術科学大学大学院 工学研究科 建設工学専攻

(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

*** 工博 近畿大学 教授 理工学部土木工学科

(〒577 東大阪市小若江3-4-1)

薄肉断面部材ではねじりによるそり変位を考慮する必要があり、一般に部材軸のねじれ率とそり関数の積で表現される。そり変位に着目すると文献5)では、厳密な式で与えられたねじれ率とそり関数の積として非線形項を含んだそり変位が得られている。しかし、そり関数には断面内の任意点での部材軸方向の母線の曲率は考慮されているが、微小変位理論による式が用いられている。また有限変位場は、平面保持の仮定に従う変位にそり変位の項を加えたものとし、そり変位には変位後の部材軸方向の成分のみを用いているので、横断面内でのひずみ成分は零にはならない。文献7)では、部材軸方向のそり成分は通常の表示式で与えられているが、薄肉開断面材では横断面内のひずみが零になるという仮定から断面内の相対変位を求め、ねじれ率の2乗に比例する変位が得られている。

本報告は、平面保持の仮定に従う変位にそり変位を加えた変位場を仮定して初期曲率・ねじれ率のある薄肉曲線材のより精密な有限変位場を求めるものである。本研究では断面剛の仮定を変位後の横断面内の相対変位成分が零と考へ、これに薄板に対するせん断歪みの仮定を用いてそり変位を決定し、1次元化された棒理論を導く。そり変位は横断面の平面的な変位からの相対的变化量と考へて、部材軸上の変位である4つの独立変分量に従属して定められる。このときの平面保持の仮定を満たす変位には、充実曲線材に対する有限回転を考慮した厳密な変位関数⁹⁾を用いるが、本報告ではこれを級数展開して微小ひずみ有限変位問題としての2次の有限変位場を求める。

得られた変位場は従来の理論より精度の高い変位場と考えられるが、2次理論にも関わらずかなり複雑な式になり、そり関数には過去の研究に見られない非線形項が含まれる。一般に、そり関数は断面に固有な量として扱われているが、非線形問題では、変形に依存することが示されている¹⁰⁾。この非線形項による影響は数値的には小さいものと考えられるが、統一のとれた2次理論を展開する上では現れて当然な項といえる。

最後に、本報告で得られた基礎式を母線ごとの初期曲率の違いと座屈前の変位を考慮した円弧ばりの横倒れ座屈解析に適用して、既往の研究結果と比較する。

2. 仮定・座標系と変位前の幾何学量

(1) 仮定・座標系

解析に当たって、次の仮定を設ける。

- ① 部材軸の法平面内の横断面形状は不変である。
- ② 板厚中央面に平行な面内のせん断ひずみは、St. Venant のねじりによるひずみのみを考へる。
- ③ 部材軸に平行で板厚中央面に垂直な面内でのせん断ひずみは、小さいものとして省略する。
- ④ 横断面形状は、部材軸方向に一定とする。

図-1のような初期曲率・ねじれ率を有する薄肉曲線部材を考へる。断面内の任意点Oを通る曲線 x^1 を部材軸とし、 x^1 上の点Oでの接線 x に直交する平面を横断面としてこの断面内に y, z 軸をとって右手系デカルト座標 (x, y, z) を定める。また、横断面内で板厚中心線に沿った x^2 とこれに直交する x^3 から、曲線座標 (x^1, x^2, x^3) を定める。さらに、板厚内の任意点Pに局所デカルト座標 (y^1, y^2, y^3) を定める。ここに、 y^1 は x の方向、 y^2 は x^2 の接線の方向、 y^3 は x^3 の方向に一致させる。

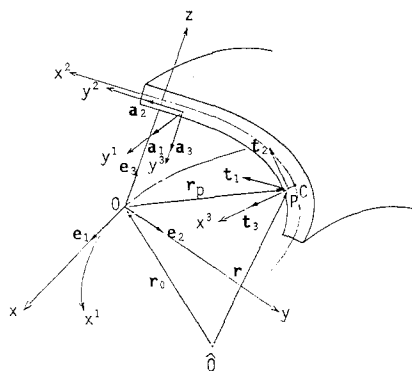


図-1 座標系と基底ベクトル

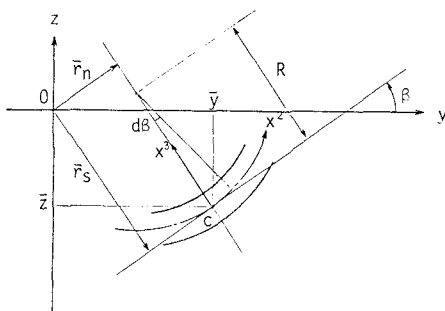


図-2 座標変換

板厚中央面上の諸量に、バーを付けて表すことにすれば、板厚中心線上の任意点C ($x^1, x^2, 0$) での x^2 軸の接線と y 軸のなす角を β として、点Oから点Cの接線と法線までの長さ $\bar{r}_s, \bar{r}_n$ は図-2より、

$$\bar{r}_s = \bar{y} \sin \beta - \bar{z} \cos \beta, \quad \bar{r}_n = \bar{y} \cos \beta + \bar{z} \sin \beta \quad (1)$$

また、点Cでの法線上の点P (x^1, x^2, x^3) までの長さを r_s, r_n 、点Cでの板厚中心線の曲率半径を R とすると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \bar{y} - x^3 \sin \beta, & z &= \bar{z} + x^3 \cos \beta \\ r_n &= \bar{r}_n, & r_s &= \bar{r}_s - x^3 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\bar{y}_{,2} = \cos \beta, \quad \bar{z}_{,2} = \sin \beta, \quad \beta_{,2} = 1/R \quad (3)$$

ここに、 $()_{,i}$ は x^i に関する微分を表す。

(2) 変位前の幾何学量

点Oでの座標 (x, y, z) の単位基底ベクトルを e_1, e_2, e_3 、部材軸の初期ねじれ率を $\kappa_1, z-x$ と $x-y$ 平面内での初期曲率を κ_2, κ_3 とすれば、Frenet-Serretの公式より次式が得られる。

$$(e_i)_{,1} = \kappa \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

ここに、ベクトル κ は、次式で与えられる。

$$\kappa = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 \quad (5)$$

空間固定点Oに対する点Pの位置ベクトルを r とすると、これは点Oに対する点Oの位置ベクトル r_0 と点Oに対する点Pの位置ベクトル r_p より、

$$r = r_0 + r_p; \quad r_p = y e_2 + z e_3 \quad (6)$$

と表せる。点Pでの座標 (x^1, x^2, x^3) の共変基底ベクトル t_i ($i = 1, 2, 3$) は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= t_0 e_1 - \kappa_1 z e_2 + \kappa_1 y e_3, & t_2 &= (1-x^3/R) \cos \beta e_2 + (1-x^3/R) \sin \beta e_3 \\ t_3 &= -\sin \beta e_2 + \cos \beta e_3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 t_0 は次式の部材軸方向の母線の変化率を表す。

$$t_0 = 1 - \kappa_3 y + \kappa_2 z \quad (8)$$

点Pでの局所デカルト座標系 (y^1, y^2, y^3) の基底ベクトル a_i は次のようになる。

$$a_1 = e_1, \quad a_2 = \cos \beta e_2 + \sin \beta e_3, \quad a_3 = -\sin \beta e_2 + \cos \beta e_3 \quad (9)$$

3. 有限変位場

(1) 部材軸上の諸量

点Oの変位 u_0 の e_i 方向の成分を u_0, v_0, w_0 、 e_1 軸回りの回転角を ϕ で表し、これらの4成分を独立変分量に選ぶ。変位後の諸量を $()^*$ で示すと、変位後の基底ベクトル e_i^* は、ねじりと2軸曲げによる回転行列 R_0 を用いて次のようになる。

$$e_i^* = R_0 e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (10)$$

ここに、回転行列は、2次の有限変位場で表現すると次のようになる(注1)。

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1-1/2\{(t_2)^2+(t_3)^2\} & -(1-t_1)C & -(1-t_1)S \\ t_2(1-t_1) & \cos \phi -1/2t_2C & -\sin \phi -1/2t_2S \\ t_3(1-t_1) & \sin \phi -1/2t_3C & \cos \phi -1/2t_3S \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} C &= t_2 \cos \phi + t_3 \sin \phi, & S &= t_3 \cos \phi - t_2 \sin \phi \\ t_1 &= u_{0,1} - \kappa_3 v_0 + \kappa_2 w_0, & t_2 &= v_{0,1} - \kappa_1 w_0 + \kappa_3 u_0, & t_3 &= w_{0,1} - \kappa_2 u_0 + \kappa_1 v_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

変位後の部材軸の伸び率 ϵ_0 、ねじれ率 κ_1^* 、曲率 κ_2^*, κ_3^* は、2次の変位場では次のように表される。

(注1) ねじれ角は三角関数による表現の方が物理的意味が明確なため、この章では展開しない。

<

<

<

<

して次式のように表す (注3)。

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + x^3 \tilde{u}_1 \quad (22)$$

上式の $\tilde{u}_0$ は仮定②から、 $\tilde{u}_1$ は $\tilde{u}_0$ と仮定③から決定される。

この $\tilde{u}$ は横断面のそり変形のみによる相対変位量としているので、他の独立変位成分に比べて微小である。また、断面剛の仮定の解釈の違いによりひずみ成分に $\tilde{u}$ の2乗の差異が生じるので (5. (1) 参照)、式 (21) において $\tilde{u}$ の2乗項のみを省略する。

〔開断面区間での $\tilde{u}_0$ 〕

仮定②より、中央面上では $\bar{e}_{12}$ が零であるから、式 (21. b) は次のようになる。

$$(\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)^2 \{\tilde{u}_0 / (\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)\}_{,2} + \hat{\alpha}_1 \bar{r}_s = 0 \quad (23)$$

$\bar{\epsilon}_0$ が $\bar{t}_0$ に比べて微小であることを考慮して上式を展開し、積分すると次式が得られる。

$$\tilde{u}_0 / (\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0) = \tilde{u}_s / (\bar{t}_s + \bar{\epsilon}_s) - \hat{\alpha}_1 (\Omega_{co} - 2\Omega_{cx} \bar{\epsilon}_0 + 2\Omega_{cy} \hat{\alpha}_3 - 2\Omega_{cz} \hat{\alpha}_2) \quad (24)$$

ここに、 $\tilde{u}_s, \bar{t}_s, \bar{\epsilon}_s$ は各々 $x^2 = s$ での $\tilde{u}_0, \bar{t}_0, \bar{\epsilon}_0$ である。 $\bar{\epsilon}_0$ は式 (19) の $\hat{\epsilon}_0$ の板厚中心線上の量である。また、 $\Omega_{co}, \Omega_{cx}, \Omega_{cy}, \Omega_{cz}$ は、

$$\Omega_{co} = \int_S \frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^2} dx^2, \quad \Omega_{cx} = \int_S \frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^3} dx^2, \quad \Omega_{cy} = \int_S \frac{\bar{r}_s \bar{y}}{\bar{t}_0^3} dx^2, \quad \Omega_{cz} = \int_S \frac{\bar{r}_s \bar{z}}{\bar{t}_0^3} dx^2 \quad (25)$$

〔閉断面区間での $\tilde{u}_0$ 〕

式 (21. b) を板厚方向に積分すると、薄肉断面の仮定から中央面上のひずみと板厚 t の積で表される。

$$2t \bar{e}_{12} = t [(\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)^2 \{\tilde{u}_0 / (\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)\}_{,2} + \hat{\alpha}_1 \bar{r}_s] \quad (26)$$

また、〔付録〕の式 (A-7) より断面内の微小要素 $t_0 dx^1 dx^2$ での力のつり合いから求められたひずみ

$$2t \bar{e}_{12} = \bar{t}_0 \tilde{q} / (\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)^2 \quad (27)$$

を、式 (26) に代入すると

$$\left(\frac{\tilde{u}_0}{\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0} \right)_{,2} = -\hat{\alpha}_1 \frac{\bar{r}_s}{(\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)^2} + \tilde{q} \frac{\bar{t}_0}{t(\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0)^4} \quad (28)$$

上式を、点 S から一周積分したときにそり変位は等しくなければならないので、次の条件が得られる。

$$\oint \left(\frac{\tilde{u}_0}{\bar{t}_0 + \bar{\epsilon}_0} \right)_{,2} dx^2 = 0 \quad (29)$$

これより、 $\tilde{q}$ が次式のように決定される。

$$\tilde{q} = \hat{\alpha}_1 K_0 (1 - 2K_x \bar{\epsilon}_0 + 2K_y \hat{\alpha}_3 - 2K_z \hat{\alpha}_2) \quad (30)$$

ここに、 K_0, K_x, K_y, K_z は次式のとおりでである。

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= H_0/L_0, & K_x &= H_x/H_0 - 2L_x/L_0, & K_y &= H_y/H_0 - 2L_y/L_0, & K_z &= H_z/H_0 - 2L_z/L_0 \\ L_0 &= \oint \frac{dx^2}{\bar{t}_0^3 t}, & L_x &= \oint \frac{dx^2}{\bar{t}_0^4 t}, & L_y &= \oint \frac{\bar{y} dx^2}{\bar{t}_0^4 t}, & L_z &= \oint \frac{\bar{z} dx^2}{\bar{t}_0^4 t} \\ H_0 &= \oint \frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^2} dx^2, & H_x &= \oint \frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^3} dx^2, & H_y &= \oint \frac{\bar{r}_s \bar{y}}{\bar{t}_0^3} dx^2, & H_z &= \oint \frac{\bar{r}_s \bar{z}}{\bar{t}_0^3} dx^2 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式 (28) に式 (30) を代入して積分すると式 (24) と同様の式が得られる。ただし、式 (25) は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{co} &= \int_S \left[\frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^2} - \frac{K_0}{\bar{t}_0^3 t} \right] dx^2, & \Omega_{cx} &= \int_S \left[\frac{\bar{r}_s}{\bar{t}_0^3} - \frac{K_0}{\bar{t}_0^3 t} \left(K_x + \frac{2}{t_0} \right) \right] dx^2 \\ \Omega_{cy} &= \int_S \left[\frac{\bar{r}_s \bar{y}}{\bar{t}_0^3} - \frac{K_0}{\bar{t}_0^3 t} \left(K_y + \frac{2\bar{y}}{t_0} \right) \right] dx^2, & \Omega_{cz} &= \int_S \left[\frac{\bar{r}_s \bar{z}}{\bar{t}_0^3} - \frac{K_0}{\bar{t}_0^3 t} \left(K_z + \frac{2\bar{z}}{t_0} \right) \right] dx^2 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上式を式 (25) と比較すると、開断面区間でのそり変位は、上式で $K_0 = 0$ と置いたものに等しいことが分かる。したがって、これ以後開断面と閉断面を区別しない。

(注3) $\tilde{u}$ を x^3 の2次以上の項まで採用しても仮定③を用いると、2次以上の項は零となる。

〔板厚方向変化率 $\tilde{u}_1$ 〕

仮定③を式 (21. c) に適用すると、次式のようになる。

$$(t_0 + \hat{\epsilon}_0)^2 \{ \tilde{u} / (t_0 + \hat{\epsilon}_0) \}_{,3} + \hat{\kappa}_1 r_n = 0 \quad (33)$$

これに、式 (22) を適用して式を変形すると次のようになる。

$$\tilde{u}_1 = \frac{\tilde{u}_0}{t_0 + \hat{\epsilon}_0} (\kappa_2^* \cos \beta + \kappa_3^* \sin \beta) - \hat{\kappa}_1 \frac{r_n}{t_0 + \hat{\epsilon}_0} \quad (34)$$

〔任意点のそり変位 $\tilde{u}$ 〕

式 (24), (34) から、そり変位 $\tilde{u}$ は次のようになる。

$$\frac{\tilde{u}}{t_0 + \hat{\epsilon}_0} = \frac{\tilde{u}_s}{t_s + \hat{\epsilon}_s} - \hat{\kappa}_1 \left\{ (\Omega_{c0} + \frac{r_n}{t_0^2} x^3) - 2(\Omega_{cx} + \frac{r_n}{t_0^3} x^3) \epsilon_0 + 2(\Omega_{cy} + \frac{r_n}{t_0^3} x^3) \hat{\kappa}_3 - 2(\Omega_{cz} + \frac{r_n}{t_0^3} x^3) \hat{\kappa}_2 \right\} \quad (35)$$

点 S のそり変位 $\tilde{u}$ は一般に未知量であるが、部材軸が板厚中心線上にあるならば、この軸上では u_0 と u_s が等しいので式 (15) より $\tilde{u}_s$ は零であることが分かる。したがって、部材軸上の点 O と点 S を一致させることにより式 (35) の $\tilde{u}_s$ の項を消去できる。

(4) 変位場

変位前の基底ベクトルで表現されたそり変位は式 (10), (16) より、高次の微小項を省略して、

$$\tilde{u}_p = \tilde{u}, \quad \tilde{v}_p = \tilde{u} t_2, \quad \tilde{w}_p = \tilde{u} t_3 \quad (36. a \sim c)$$

これを、式 (15) に代入して成分表示すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u_0 - (1-t_1)(y^* t_2 + z^* t_3) + \tilde{u} \\ v_p &= v_0 + y^* - y - t_2/2(y^* t_2 + z^* t_3) + \tilde{u} t_2 \\ w_p &= w_0 + z^* - z - t_3/2(y^* t_2 + z^* t_3) + \tilde{u} t_3 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここに、

$$y^* = y \cos \phi - z \sin \phi, \quad z^* = y \sin \phi + z \cos \phi \quad (38)$$

ひずみの式 (21) にそり変位の式を代入すると、式 (21. a, b) の 2 つの式だけが残る。しかしこれらのひずみは、曲線座標 (x^1, x^2, x^3) で表されており、式 (7) より $\mathbf{e}_1$ が他の基底ベクトルと直交していないので局所デカルト座標 (y^1, y^2, y^3) へ変換する。局所デカルト座標系でのひずみテンソルを ϵ_{ij} とすると、

$$\epsilon_{ij} = e_{k1} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} \quad (39)$$

となる。ここに、右辺の添字 k, l には、Einstein の総和規約を用いている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} &= \frac{1}{t_0}, & \frac{\partial x^2}{\partial y^1} &= -\frac{\kappa_1 r_s}{t_0 (1-x^3/R)}, & \frac{\partial x^3}{\partial y^1} &= -\frac{\kappa_1 r_n}{t_0}, & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{1-x^3/R} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^3} &= 1, & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} &= \frac{\partial x^3}{\partial y^2} = \frac{\partial x^1}{\partial y^3} = \frac{\partial x^2}{\partial y^3} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

したがって、両座標系でのひずみの間に次の関係が成り立つ。

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{t_0^2} e_{11} - \frac{2\kappa_1 r_s}{t_0^2 (1-x^3/R)} e_{12}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{t_0 (1-x^3/R)} e_{12} \quad (41)$$

ひずみの式 (21) にそり変位 (35) を代入すると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\hat{\epsilon}_0}{t_0} (1 + \frac{\hat{\epsilon}_0}{2t_0}) + \frac{\hat{\kappa}_1^2}{2t_0^2} (y^2 + z^2) - \frac{\hat{\kappa}_{1,1}}{t_0} \hat{\omega}_0 - \frac{\hat{\kappa}_1}{t_0} \hat{\omega}_1 \\ 2\epsilon_{12} &= -\frac{\hat{\kappa}_1}{t_0} (x_0 - 2\chi_x \epsilon_0 + 2\chi_y \hat{\kappa}_3 - 2\chi_z \hat{\kappa}_2) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_0 &= \frac{1}{t_0} [(t_0 + \hat{\varepsilon}_0) \{ (t_0 + \hat{\varepsilon}_0) \Omega_0 - 2t_0 (\Omega_x \varepsilon_0 - \Omega_y \hat{x}_3 + \Omega_z \hat{x}_2) \}] \\ \hat{\omega}_1 &= \frac{1}{t_0} [(t_0 + \hat{\varepsilon}_0) \{ (t_0 + \hat{\varepsilon}_0) \Omega_0 - 2t_0 (\Omega_x \varepsilon_0 - \Omega_y \hat{x}_3 + \Omega_z \hat{x}_2) \},_1 \\ &\quad - x_1^* (\hat{x}_2^* y + \hat{x}_3^* z) \{ (t_0 + \hat{\varepsilon}_0) \Omega_0 - 2t_0 (\Omega_x \varepsilon_0 - \Omega_y \hat{x}_3 + \Omega_z \hat{x}_2) \} \\ &\quad - x_1 r_s (\chi_0 - 2\chi_x \varepsilon_0 + 2\chi_y \hat{x}_3 - 2\chi_z \hat{x}_2) - x_1 (y^2 + z^2)] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_0 &= \frac{2x^3}{t_0^2} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0}{t_0 t} \\ \chi_x &= \frac{x^3}{t_0^2} (1 - \bar{t}_0) - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0}{t_0^2 t} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0 K_x}{t_0 t} \\ \chi_y &= \frac{x^3}{t_0^2} \bar{y} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0 \bar{y}}{t_0^2 t} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0 K_y}{t_0 t} - \frac{K_0}{t_0^2 t} x^3 \sin \beta \\ \chi_z &= \frac{x^3}{t_0^2} \bar{z} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0 \bar{z}}{t_0^2 t} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{R} + \frac{2\chi_s}{t_0} \right) x^3 \right\} \frac{K_0 K_z}{t_0 t} + \frac{K_0}{t_0^2 t} x^3 \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega_{00} + x^3 r_n / \bar{t}_0^2, & \Omega_x &= \Omega_{0x} + x^3 r_n / \bar{t}_0^3 \\ \Omega_y &= \Omega_{0y} + x^3 r_n \bar{y} / \bar{t}_0^3, & \Omega_z &= \Omega_{0z} + x^3 r_n \bar{z} / \bar{t}_0^3 \\ \chi_s &= \chi_2 \cos \beta + \chi_3 \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

なお、2次の有限変位場の観点から、以上の式を展開したときに現れる独立変分量に関する3次以上の項は省略するものとする。

4. 円弧ばりの横倒れ座屈

(1) 仮定

両端に等曲げモーメントを受ける円弧ばりの横倒れ座屈を考える。はりの初期ねじれ率・曲率は $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$, κ_2 は一定とする。曲率面内の境界条件は一端ヒンジ、他端ローラ、面外は両端ヒンジとする。

解析上の仮定は、

- a) 座屈前の変形は線形挙動とする。
- b) 母線ごとの初期曲率の変化を考慮する。
- c) 座屈前の変位を考慮する。

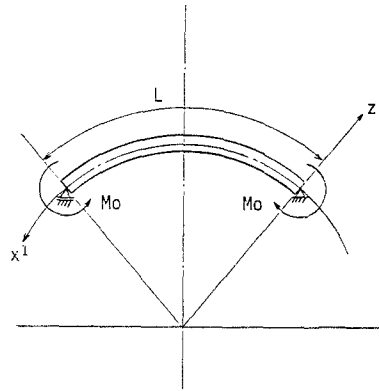
ひずみには、式(42)でその関数の非線形を省略した次式を用いる。

図-4 円弧ばり

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \left(1 + \frac{\varepsilon_{01}}{2t_0} \right) \frac{\varepsilon_{01}}{t_0} + \frac{\varepsilon_{02}}{t_0} - y \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{01}}{t_0} \right) \frac{\hat{x}_{31}}{t_0} + \frac{\hat{x}_{32}}{t_0} \right] + z \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{01}}{t_0} \right) \frac{\hat{x}_{21}}{t_0} + \frac{\hat{x}_{22}}{t_0} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(y \frac{\hat{x}_{31}}{t_0} - z \frac{\hat{x}_{21}}{t_0} \right)^2 + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \left(\frac{\hat{x}_{11}}{t_0} \right)^2 - \Omega_0 (\hat{x}_{11,1} + \hat{x}_{12,1}) \\ 2\varepsilon_{12} &= - \frac{\chi_0}{t_0} (\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

ここに、 ε_{01} , $\hat{x}_{11}$, $\hat{x}_{21}$, $\hat{x}_{31}$ は変位に関する1次の項、 ε_{02} , $\hat{x}_{12}$, $\hat{x}_{22}$, $\hat{x}_{32}$ は2次の項を表す。

断面は、Z軸に対して1軸対称なものを考える。



(2) 座屈前の諸量

座屈前の諸量には、右肩に $^{\circ}$ を付けて表す。座屈前には変位の面内成分 $u_{o}^{\circ}, w_{o}^{\circ}$ が発生して、面外成分 $v_{o}^{\circ}, \phi^{\circ}$ は零である。このときの断面力は $N^{\circ} = 0, My^{\circ} = M_o$ となる。

仮定 a) より座屈前のひずみは、

$$\varepsilon_{11}^{\circ} = \frac{\varepsilon_{o1}^{\circ}}{t_o} + z \frac{\hat{\kappa}_{21}^{\circ}}{t_o}, \quad 2\varepsilon_{12}^{\circ} = 0 \quad (47)$$

ここに、

$$\varepsilon_{o1}^{\circ} = t_{11}^{\circ} = u_{o,1}^{\circ} + \kappa_2 w_{o,1}^{\circ}, \quad \hat{\kappa}_{21}^{\circ} = -t_{3,1}^{\circ} = -w_{o,11}^{\circ} + \kappa_2 u_{o,1}^{\circ} \quad (48)$$

したがって、断面力と変位の関係は、

$$N^{\circ} = E A_1 \varepsilon_{o1}^{\circ} + E G_{z1} \hat{\kappa}_{21}^{\circ}, \quad My^{\circ} = E G_{z1} \varepsilon_{o1}^{\circ} + E I_{zz1} \hat{\kappa}_{21}^{\circ} \quad (49)$$

ここに断面定数は、 $dA = dx^2 dx^3$, A を断面積とすると、

$$A_1 = \int_A \frac{dA}{t_o}, \quad G_{z1} = \int_A \frac{z}{t_o} dA, \quad I_{zz1} = \int_A \frac{z^2}{t_o} dA \quad (50)$$

これより座屈前の伸び率と曲率は

$$\varepsilon_{o1}^{\circ} = -\frac{M_o}{EI_{zz1}} f_o, \quad \hat{\kappa}_{21}^{\circ} = \frac{M_o}{EI_{zz1}} f_1 \quad (51)$$

ここに、

$$f_o = \frac{G_{z1}}{A_1} f_1, \quad f_1 = 1 / \left\{ 1 - \frac{(G_{z1})^2}{A_1 I_{zz1}} \right\} \quad (52)$$

(3) 座屈時の諸量

座屈前の諸量からの増分量には一般に添記号 Δ を付けて表すが、ここでは Δ を省略する。座屈時の変位の増分は、面外成分 v_o, ϕ だけである。これより伸び率・ねじれ率・曲率の増分は変位増分量の 2 次項までを用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{o1} &= 0, & \varepsilon_{o2} &= 1/2(t_2)^2 \\ \hat{\kappa}_{11} &= \phi_{,1} + \kappa_2 t_2, & \hat{\kappa}_{12} &= -\kappa_2 t_{11}^{\circ} t_2 + 1/2(t_3^{\circ} t_{2,1} - t_{3,1}^{\circ} t_2) \\ \hat{\kappa}_{21} &= 0, & \hat{\kappa}_{22} &= \phi_{,2} - 1/2\kappa \{\phi^2 + (t_2)^2\} \\ \hat{\kappa}_{31} &= t_{2,1} - \kappa_2 \phi, & \hat{\kappa}_{32} &= -t_{11}^{\circ} t_{2,1} + t_{3,1}^{\circ} \phi - 1/2\kappa_2 t_3^{\circ} t_2 \\ t_2 &= v_{o,1} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ここに、仮定 a) より座屈前の変位の 2 次以上の項は省略している。なお、 $\hat{\kappa}_{12}, \hat{\kappa}_{32}$ は増分量の 1 次式になる。

ひずみの増分量は式 (46) より、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\varepsilon_{o2}}{t_o} - y \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{o1}^{\circ}}{t_o} \right) \frac{\hat{\kappa}_{31}}{t_o} + \frac{\hat{\kappa}_{32}}{t_o} \right] + z \frac{\hat{\kappa}_{22}}{t_o} \\ &\quad + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\hat{\kappa}_{31}}{t_o} \right)^2 - yz \frac{\hat{\kappa}_{21}^{\circ} \hat{\kappa}_{31}}{t_o} + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \left(\frac{\hat{\kappa}_{11}}{t_o} \right)^2 - \Omega_o (\hat{\kappa}_{11,1} + \hat{\kappa}_{12,1}) \\ 2\varepsilon_{12} &= -\frac{\chi_o}{t_o} (\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

次に、応力の増分は増分理論による線形化の手法により式 (54) から次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= -E \cdot y \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_{o1}^{\circ}}{t_o} \right) \frac{\hat{\kappa}_{31}}{t_o} + \frac{\hat{\kappa}_{32}}{t_o} \right] - E \cdot yz \frac{\hat{\kappa}_{21}^{\circ} \hat{\kappa}_{31}}{t_o} - E \cdot \Omega_o (\hat{\kappa}_{11,1} + \hat{\kappa}_{12,1}) \\ \sigma_{12} &= -G \frac{\chi_o}{t_o} (\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12}) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

(4) 座屈の支配方程式

増分量による仮想ひずみエネルギーは

$$\delta U_e = \int_V \{ (\sigma^{110} + \sigma^{11}) \delta \varepsilon_{11} + 2 \sigma^{12} \delta \varepsilon_{12} \} t_0 d x^1 d A \quad (56)$$

ここに、 σ^{110} は座屈前の応力で、Hookeの法則により式(47)に式(51)を用いて次のように表す。

$$\sigma^{110} = \frac{M_0}{I_{ZZ1}} \left(-\frac{1}{t_0} f_0 + \frac{z}{t_0} f_1 \right) \quad (57)$$

M_0 は、分岐座屈時の増分量に対しては仕事をしない。したがって、式(56)に式(54)、(55)を代入し、 t_{30} が x^1 の関数であることに注意して部分積分すると、次の座屈時のつり合い式が求められる。

$$\begin{aligned} (\delta v_0): & [(EI_{yy1} + \kappa_2 EI_{wy}) (\hat{x}_{31} + \hat{x}_{32}),_{,1} - \kappa_2 GJ_1 (\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12}) + (EI_{wy} + \kappa_2 EI_{ww}) (\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12}),_{,11} \\ & + M_0 (1 + \kappa_2 \frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} f_0 - \kappa_2 \frac{I_{rrz2}}{I_{ZZ1}} f_1) \hat{x}_{11} + M_0 (-\frac{I_{yy2}}{I_{ZZ1}} f_0 + \frac{I_{yyz2}}{I_{ZZ1}} f_1) \hat{x}_{31,1} \\ & + E \{ (2I_{yy2} - I_{yy1} + \kappa_2 I_{wy1} - \kappa_2 I_{wy}) \varepsilon_{010} + (2I_{yyz2} + \kappa_2 I_{wyz1} + I_{wy}) \hat{x}_{210} \} \hat{x}_{31,1} \\ & + E \{ (I_{wy1} - I_{wy} - \kappa_2 I_{ww}) \varepsilon_{010} + (I_{wyz1} + I_{ww}) \hat{x}_{210} \} \hat{x}_{11,11} \\ & + GJ_1 (\kappa_2 \varepsilon_{010} - \hat{x}_{210}) \hat{x}_{11} \\ & + 1/2 t_{30} \{ \kappa_2 EI_{yy1} \hat{x}_{31} + (GJ_1 + \kappa_2 EI_{wy}) \hat{x}_{11,1} - EI_{wy} \hat{x}_{31,11} - EI_{ww} \hat{x}_{11,111} \}]_{,1} = 0 \end{aligned} \quad (58.a)$$

$$\begin{aligned} (\delta \phi): & -\kappa_2 EI_{yy1} (\hat{x}_{31} + \hat{x}_{32}) - (GJ_1 + \kappa_2 EI_{wy}) (\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12}),_{,1} \\ & + EI_{wy} (\hat{x}_{31} + \hat{x}_{32}),_{,11} + EI_{ww} (\hat{x}_{11} + \hat{x}_{12}),_{,111} \\ & + M_0 (1 + \kappa_2 \frac{I_{yy2}}{I_{ZZ1}} f_0 - \kappa_2 \frac{I_{yyz2}}{I_{ZZ1}} f_1) \hat{x}_{31} + M_0 (-\frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} f_0 - \frac{I_{rrz2}}{I_{ZZ1}} f_1) \hat{x}_{11,1} \\ & - E \{ 2\kappa_2 I_{yy2} \varepsilon_{010} + (I_{yy1} + 2\kappa_2 I_{yyz2}) \hat{x}_{210} \} \hat{x}_{31} \\ & + E \{ I_{wy1} \varepsilon_{010} + I_{wyz1} \hat{x}_{210} \} \hat{x}_{31,11} \\ & - E \{ \kappa_2 I_{wy1} \varepsilon_{010} + (I_{wy} + \kappa_2 I_{wyz1}) \hat{x}_{210} \} \hat{x}_{11,1} = 0 \end{aligned} \quad (58.b)$$

ここに、断面定数は

$$\left. \begin{aligned} I_{yy1} &= \int_A \frac{y^2}{t_0} dA, & I_{yy2} &= \int_A \frac{y^2}{t_0^2} dA, & I_{yyz2} &= \int_A \frac{y^2 z}{t_0^2} dA, & I_{rr2} &= \int_A \frac{y^2 + z^2}{t_0^2} dA \\ I_{rrz2} &= \int_A \frac{(y^2 + z^2) z}{t_0^2} dA, & I_{wy} &= \int_A \Omega_0 y dA, & I_{wy1} &= \int_A \Omega_0 \frac{y}{t_0} dA \\ I_{wyz1} &= \int_A \Omega_0 \frac{yz}{t_0} dA, & I_{ww} &= \int_A \Omega_0^2 t_0 dA, & J_1 &= \int_A \frac{\chi_0^2}{t_0} dA \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

式(58.a)の下線の部分に式(58.b)を代入すると、座屈前の諸量の2次項になるのでこれを省略する。座屈後の変位関数(座屈モード)を境界条件を満足する次式で仮定する。

$$v_0 = \sum_{n=1}^N A_n \sin \lambda_n x^1, \quad \phi = \sum_{n=1}^N B_n \sin \lambda_n x^1; \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad (60)$$

ここに、 A_n, B_n は定数で L は弧長である。

式(58)に式(53)、(60)を代入するとGalerkinの方法により座屈モーメント M_{ocr} が求められる。このとき、式(58)の各項と座屈前の変位 t_{30} の積の項が直交しないため M_{ocr} を解析的に求めることが困難になる。そこで式(58)で座屈前の変位と増分量との積からなる $\hat{x}_{12}, \hat{x}_{32}$ の項を省略すると、 n 次モードの座屈条件式が次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \kappa_2 \beta_n + \lambda_n^2 EI_{wy} - M_0 K_{11} & \lambda_n^2 (EI_{yy1} + \kappa_2 EI_{wy}) - M_0 K_{12} \\ \beta_n + \kappa_2 EI_{wy} - M_0 K_{21} & \kappa_2 EI_{yy1} + \lambda_n^2 EI_{wy} - M_0 K_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (61)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= 1 - f_0 \left(\kappa_2 \frac{\beta_n}{EI_{ZZ1}} - \kappa_2 \frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} - \lambda_n^2 \frac{I_{wy1} - I_{wy}}{I_{ZZ1}} \right) - f_1 \left(\frac{\beta_n}{EI_{ZZ1}} + \kappa_2 \frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} + \lambda_n^2 \frac{I_{wy21}}{I_{ZZ1}} \right) \\ K_{12} &= f_0 \lambda_n^2 \left(\frac{3I_{yy2} - I_{yy1}}{I_{ZZ1}} + \kappa_2 \frac{I_{wy1} - I_{wy}}{I_{ZZ1}} \right) - f_1 \lambda_n^2 \left(3 \frac{I_{yy2}}{I_{ZZ1}} + \kappa_2 \frac{I_{wy21}}{I_{ZZ1}} + \frac{I_{wy}}{I_{ZZ1}} \right) \\ K_{21} &= f_0 \left(\frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} + \kappa_2 \frac{I_{wy1}}{I_{ZZ1}} \right) - f_1 \left(\frac{I_{rr2}}{I_{ZZ1}} + \kappa_2 \frac{I_{wy21}}{I_{ZZ1}} + \frac{I_{wy}}{I_{ZZ1}} \right) \\ K_{22} &= 1 + f_0 \left(3 \kappa_2 \frac{I_{yy2}}{I_{ZZ1}} + \lambda_n^2 \frac{I_{wy1}}{I_{ZZ1}} \right) - f_1 \left(\frac{I_{yy1}}{I_{ZZ1}} + 3 \kappa_2 \frac{I_{yy2}}{I_{ZZ1}} + \lambda_n^2 \frac{I_{wy21}}{I_{ZZ1}} \right) \\ \beta_n &= GJ_1 + \lambda_n^2 EI_{ww} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

5. 考 察

(1) 断面剛の仮定とそり変位

一般に断面剛の仮定の解釈には、横断面内の諸量について次の3つの場合が考えられる。

- a) ひずみの面内成分が零 b) 相対変位の面内成分が零 c) 応力の面内成分が零

平面保持の仮定が成り立つ充実断面部材や、薄肉断面部材の微小変位場では a) と b) の解釈は等価である。c) の解釈については、文献 11) に述べられている。ここでは、a) と b) の解釈の違いについて考察する。

a) ひずみ成分が零

一般的なひずみ成分の式は、式 (20) で表され、その面内成分を零とすることにより $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ の関係が求められる。つまり、a) の解釈の場合には、面内ひずみ成分を消去するために、そり成分として3方向の成分を考慮しなければならない。式 (20. d~f) の右辺を零とすると、そり変位の面内成分 $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ は、 e_1 方向成分 $\tilde{u}$ の2乗のオーダーであることが解る。

b) 相対変位成分が零

これは、変位後の部材軸の法平面に投影した横断面形状が変位前の形状と同一であること (仮定①) を意味するので、式 (16) に対応するそり変位 $\tilde{u}_0$ は次式のように表現される。

$$\tilde{u}_0 = \tilde{u} e_1^* = \tilde{u}_0 e_1 + \tilde{v}_0 e_2 + \tilde{w}_0 e_3 \quad (63)$$

このときのひずみの面内成分は式 (21. d~f) で与えられるので、b) の仮定を用いるとひずみの面内成分は零にならず、そり変位 $\tilde{u}$ の2乗のオーダーのひずみが発生することになる。

以上より、断面剛の仮定の解釈 a) と b) のどちらがより妥当であるかは断定できないが、定式化においては式 (20) と (21) を比較すれば明かなように、通常用いられている仮定 a) よりも仮定 b) を用いる方が有利である。しかし、a), b) の差異はそりの成分 $\tilde{u}$ の2乗のオーダーである。

したがって、そり変位は式 (21. b, c) の右辺最後の項を省略して仮定②, ③より求めた。これら2式の右辺第1項に注目すると各母線の初期曲率の影響と共に、変形後の各母線の伸び率も考慮された式になっている。この結果、求められたそり変位は式 (35) のように部材軸上の伸び率・曲率とねじれ率の連成項を含んだ式になっている。連成項を省略した式は文献5) で微小変位理論により求められた初期曲率とねじれ率を考慮した式に一致する。また、そり変位における連成項により、そり関数には式 (43) のように非線形項が含まれ、式 (42) のせん断ひずみには伸び率・曲率とねじれ率の連成項を含んだ式が得られた。

(2) 円弧ばりの横倒れ座屈

4. で得られた座屈時のつり合い式と座屈条件式をフランジが $x-z$ 平面内にある2軸対称I型断面に適用し、既往の研究結果と比較する。式 (50), (59) で定義した断面定数には t_0 が含まれているために他の文献と比較できないので直線部材の断面定数で表す。通常は $\kappa_2 Z < 1$ であるので、近似的に次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= A + \kappa_2^2 I_z, & G_{21} &= -\kappa_2 I_z, & I_{zz1} &= I_z \\ I_{yy1} &= I_y + \kappa_2^2 I_w, & I_{yy2} &= I_y + 3\kappa_2^2 I_w, & I_{yyz2} &= -2\kappa_2 I_w \\ I_{rr2} &= I_r + 3\kappa_2^2 I_w, & I_{rrz2} &= -2\kappa_2 I_w, & I_{wy} &= -\kappa_2 I_w \\ I_{wy1} &= -2\kappa_2 I_w, & I_{wz1} &= I_w, & I_{ww} &= I_w, & J_1 &= J_s \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

ここに、 A は断面積、 I_w 、 J_s は通常のI型断面のそり2次モーメント、St. Venantのねじれ定数で

$$I_y = \int_A y^2 dA, \quad I_z = \int_A z^2 dA, \quad I_r = I_y + I_z, \quad I_w = \int_A (yz)^2 dA, \quad J_s = \int_A (2x^3)^2 dA$$

上式を式(52)に代入すると、

$$f_0 = -\kappa_2 \frac{I_z}{A}, \quad f_1 = 1 + \kappa_2^2 \frac{I_z}{A} \quad (66)$$

これらを式(58)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} (\delta v_0): & [EI_y(\hat{\kappa}_{31} + \hat{\kappa}_{32})_{,1} - \kappa_2 GJ_s(\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12}) \\ & + Mo \left((1 + 2\kappa_2^2 \frac{I_w}{I_z} - \kappa_2^2 \frac{I_r}{A} - \kappa_2^4 \frac{I_w}{A}) \hat{\kappa}_{11} + \kappa_2 Mo \left(-2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{I_y}{A} + \kappa_2^2 \frac{I_w}{A} \right) \hat{\kappa}_{31,1} \right. \\ & + \frac{EI_y \varepsilon_{01} \circ \hat{\kappa}_{31,1}}{(\kappa_2 \varepsilon_{01} \circ - \hat{\kappa}_{21} \circ) GJ_s \hat{\kappa}_{11} + 2EI_w(2\kappa_2 \hat{\kappa}_{31,1} - \hat{\kappa}_{11,11})} \left. \right]_{,1} = 0 \end{aligned} \quad (67.a)$$

$$\begin{aligned} (\delta \phi): & -\kappa_2 EI_y(\hat{\kappa}_{31} + \hat{\kappa}_{32}) - GJ_s(\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12})_{,1} \\ & + EI_w \{ (\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12})_{,11} - \kappa_2 (\hat{\kappa}_{31} + \hat{\kappa}_{32})_{,11} + \kappa_2^2 (\hat{\kappa}_{11} + \hat{\kappa}_{12})_{,1} - \kappa_2^3 (\hat{\kappa}_{31} + \hat{\kappa}_{32}) \} \\ & + Mo \left((1 + 2\kappa_2^2 \frac{I_w}{I_z} - \kappa_2^2 \frac{I_y}{A} - \kappa_2^4 \frac{I_w}{A}) \hat{\kappa}_{31} - \kappa_2 Mo \left(-2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{I_r}{A} + \kappa_2^2 \frac{I_w}{A} \right) \hat{\kappa}_{11,1} \right. \\ & - \frac{EI_y(2\kappa_2 \varepsilon_{01} \circ + \hat{\kappa}_{21} \circ) \hat{\kappa}_{31}}{(3\kappa_2^2 \hat{\kappa}_{31} + \hat{\kappa}_{31,11}) - 2\kappa_2^2 \varepsilon_{01} \circ \hat{\kappa}_{11,1}} \left. \right) = 0 \end{aligned} \quad (67.b)$$

上式で実線を引いた項は座屈前の変位による項である。

Yang¹⁴⁾は、母線ごとの初期曲率の影響を考慮した円筒座標で表示されたグリーンのひずみを用いて、座屈前の変位を省略した座屈時のつり合い式と座屈条件式を求めている。Yangのつり合い式を本報告で用いている記号で以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} (\delta v_0): & EI_y \hat{\kappa}_{31,11} - \kappa_2 GJ_s \hat{\kappa}_{11,1} + Mo(1 - \kappa_2^2 I_r/A) \hat{\kappa}_{11,1} = 0 \\ (\delta \phi): & -\kappa_2 EI_y \hat{\kappa}_{31} - GJ_s \hat{\kappa}_{11,1} + EI_w \{ \hat{\kappa}_{11,111} - \kappa_2 \hat{\kappa}_{31,11} + \kappa_2^2 \hat{\kappa}_{11,1} - \kappa_2^3 \hat{\kappa}_{31} \} \\ & + Mo(\underline{v_{0,11}} - \kappa_2 \hat{\kappa}_{11,1} I_r/A) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

上式と式(67)で実線の部分を省略した式を比較すると、上式には式(67)の破線の部分が欠落している。これは、Yangらはひずみの式で部材軸方向変位の2乗項を省略していることによる。また、2重下線の部分はひずみの式に線形の変位場を用いているために曲率 $\hat{\kappa}_{31}$ のねじれ角 ϕ の項が欠落して変位 v が単独に Mo に掛かっている。

次に、母線ごとの初期曲率の影響を省略して座屈前の変位を考慮したTrahairらの報告¹³⁾と比較する。母線ごとの初期曲率の影響は $t_0 = 1$ とおくことにより無視される。この場合式(50)、(59)の断面定数は式(64)で κ_2 の項を省略したものになる。したがって、この断面定数を式(61)、(62)に代入すると座屈条件式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} \kappa_2 \beta_n - MoK_{11} & \lambda_n^2 EI_y - MoK_{12} \\ \beta_n - MoK_{21} & \kappa_2 EI_y - MoK_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= 1 - \frac{\beta_n}{EIz} - \frac{\lambda_n^2 I_w}{I_z}, & K_{12} &= -\alpha_2 \lambda_n^2 \frac{I_w}{I_z} \\ K_{21} &= -\alpha_2 \frac{I_w}{I_z}, & K_{22} &= 1 - \frac{I_y}{I_z} - \lambda_n^2 \frac{I_w}{I_z} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

上式で下線の項を除くとTrahairらの結果と一致する。この項は、微小ひずみの仮定の基では通常省略される式(46)の下線の項から得られる項である。また、上式で面内の断面2次モーメント I_z を無限大におくと座屈前の変位を省略したことになり、これはVlasov¹⁵⁾の式に一致する。さらに、曲げねじり剛性 $E I_w$ の項を省略するとTimoshenko¹⁶⁾の式に一致する。

6. 結 語

本報告では、初期曲率・ねじれ率のある薄肉曲線部材の有限変位場を、横断面内の相対変位が生じないとした仮定から求めた。そり変位を無視した場合の厳密な変位関数はすでに求めているので、この平面保持の仮定に従う変位にそり変形による部材軸方向の変位成分を加えた変位場を仮定して、部材軸上の4つの変位成分を独立変分量とした変位場を定式化した。

そり変位を考慮した場合には閉じた形の厳密解を求めることは困難なことから2次の有限変位場を求めたが、定式化においては独立変分量に関する2次項を仮定に対して忠実に採用した。さらに、母線ごとの伸び率を考慮した結果、そり変位にはねじれ率と伸び率・曲率との連成項が現れるので、この連成効果による非線形項がせん断ひずみに含まれ、そり関数は断面に固有な式ではなく変形に依存することを示した。

この変位場を円弧ばりの横倒れ座屈解析に適用した結果では、線形化有限変位理論としては厳密と考えられていた解にも一部の非線形項が欠落していることが分かった。変位場において新しく求められた非線形項を省略すると既往の変位場に一致し、また円弧ばりの座屈条件式は過去の式に一致することから、本報告で求めた変位場は薄肉曲線部材の有限変位場として妥当なものであると考えられる。

以上のことから、本報告で定式化した変位場は既往の研究よりも精密なものであると考えられるが、新たに求められた非線形項の実用的な意味は少ないかも知れない。しかし、上述の線形化有限変位理論による解にもこれらの項が現れることから、種々の非線形問題について数値的に検討する価値があると考えられる。

【付録】微小要素の力のつり合い

薄肉断面の仮定により、中央面から離れた点の諸量は板厚方向に直線的に変化するものとして、中央面上の任意点での力のつり合いを考え、次式ようになる。

$$\begin{aligned} &(\bar{\sigma}^1 \bar{\tau}_0 t dx^2)_{,1} dx^1 \\ &+ (\bar{\sigma}^2 \bar{\tau}_0 t dx^1)_{,2} dx^2 = 0 \end{aligned} \quad (A-1)$$

ここに、 $\bar{\sigma}^1, \bar{\sigma}^2$ は応力ベクトルであり、座標 (x^1, x^2) で表された第2種のPiola-Kirchhoffの応力テンソル $\bar{\tau}^{12}$ より、

$$\bar{\sigma}^1 = \bar{\tau}^{11} \bar{\tau}_1^* + \bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_2^*, \quad \bar{\sigma}^2 = \bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_1^* \quad (A-2)$$

これを式(A-1)に代入すると次のようになる。

$$(\bar{\tau}^{11} \bar{\tau}_0 t)_{,1} \bar{\tau}_1^* + (\bar{\tau}^{11} \bar{\tau}_0 t \bar{\tau}_1^*)_{,1} + (\bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_0 t)_{,1} \bar{\tau}_2^* + (\bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_0 t)_{,2} \bar{\tau}_1^* + 2 \bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_0 t \bar{\tau}_{1,2}^* = 0 \quad (A-3)$$

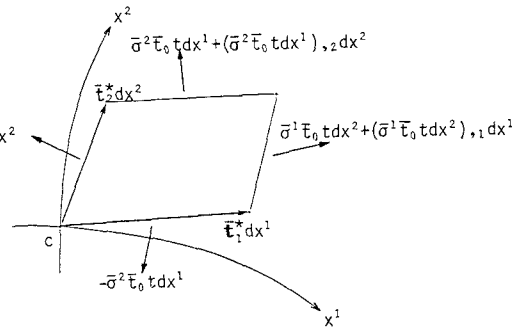


図-A 微小要素のつり合い

上式の部材軸方向のつり合いは、

$$(\bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_0 t (\bar{\mathbf{t}}_1^* \cdot \mathbf{e}_1)^2)_{,2} / (\bar{\mathbf{t}}_1^* \cdot \mathbf{e}_1) + (\bar{\tau}^{11} \bar{\tau}_0 t)_{,1} (\bar{\mathbf{t}}_1^* \cdot \mathbf{e}_1) + \bar{\tau}^{11} \bar{\tau}_0 t (\bar{\mathbf{t}}_{1,1}^* \cdot \mathbf{e}_1) + (\bar{\tau}^{12} \bar{\tau}_0 t)_{,1} (\bar{\mathbf{t}}_2^* \cdot \mathbf{e}_1) = 0 \quad (\text{A-4})$$

仮定②から第2項目以降を省略すると、せん断応力 $\bar{\tau}^{12}$ が次式ようになる。

$$\bar{\tau}^{12} = \frac{q(x^1)}{\bar{\tau}_0 t (\bar{\mathbf{t}}_1^* \cdot \mathbf{e}_1)^2} \quad (\text{A-5})$$

ここに、 $q(x^1)$ は積分定数である。

Hookeの法則を、曲線座標 (x^1, x^2) へ変換すると、

$$\kappa_1 \bar{\tau}_0 \bar{\tau}^{11} + \bar{\tau}_0 \bar{\tau}^{12} = 2G / \bar{\tau}_0 \bar{e}_{12} \quad (\text{A-6})$$

ここで、ねじりによる応力 $\bar{\tau}^{11}$ は $\bar{\tau}^{12}$ より微小であるとし、上式の最初の項を省略すると、せん断ひずみ $\bar{e}_{12}$ は次のように表される。

$$2t \bar{e}_{12} = \frac{\bar{\tau}_0 \tilde{q}}{(\bar{\tau}_0 + \bar{e}_0)^2} \quad (\text{A-7})$$

ここに、 $\tilde{q}$ は q/G であり、 x^1 のみの関数である。また、 $(\bar{\mathbf{t}}_1^* \cdot \mathbf{e}_1)$ は初期ねじれ率による項を省略して、 $(\bar{\tau}_0 + \bar{e}_0)$ とおいている。

参 考 文 献

- 1) 西野文雄：薄肉断面部材の基礎理論、鋼構造の研究、奥村敏恵教授還暦記念、技法堂出版、1977.
- 2) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材、土木学会論文報告集、No. 225, 1974.
- 3) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈、土木学会論文報告集、No. 263, 1977.
- 4) 薄木征三・穆農知徳：曲線薄肉ばりの有限変位問題における非線形偏微分方程式の解析、第25回構造工学シンポジウム、1979.
- 5) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論、土木学会論文報告集、No. 292, 1979.
- 6) 高畠秀雄：空間曲線をもつ薄肉開断面材の解析、日本建築学会論文報告集、No. 267, 1978.
- 7) 阿井正博・西野文雄：薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化、土木学会論文報告集 No. 318, 1982.
- 8) 林 正・前田幸雄：薄肉断面部材の有限変位場、土木学会第40回年次学術講演会概要集、第I部、I-57 1985.
- 9) 前田幸雄・林 正：充実曲線材の有限変位理論、構造工学論文集、Vol. 32A, 1986.
- 10) 馬場俊介・山本俊哉：ねじり変形を受けるはりのそり関数の評価に関する研究、土木学会論文報告集、No. 334, 1983.
- 11) 川井忠彦・藤谷義信：梁理論の精密化に関する二、三の試み（その1）、生産研究、25, 211-220, 1973.
- 12) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd Ed. Pergamon Press, 1980.
- 13) Vacharajittiphan, P. and N. S. Trahair: Flexural-Torsional Buckling of Curved Members, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. ST6, June, 1975.
- 14) Yang, Y. B. and S. R. Kuo: Static Stability of Curved Thin-Walled Beams, ASCE, Jour. of Eng. Mech., Vol. 112, No. 8, August, 1986.

15) Vlasov, V. Z. : Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, 1961

(奥村敏恵ほか共訳：薄肉弾性ばりの理論、技報堂出版、1967) .

16) Timoshenko, S. P. and J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.

(1986年10月17日 受付)