

コヒーレンスの性質および算定方法に関する一考察

CHARACTERISTICS OF COHERENCE FUNCTION AND ITS MODIFIED COMPUTATION METHOD

川上英二* 佐藤靖彦**

By Hideji KAWAKAMI and Yasuhiko SATO

The difference of seismic waves observed on piers at both ends of the long bridge or at locations along the underground pipe is an important consideration for aseismic design of such structures. Coherence function is one of the methods which represent the difference or dependency of two time series, and it is calculated from the power and the cross spectra. However, in their estimation, they are often smoothed in the frequency domain. In this paper, for simple spectral densities, such as a white noise, the effects of the smoothing on the estimated value of the coherence function are evaluated quantitatively, in the case that the lag time exists between the two time series or that they are mutually independent. Then, a modified computation method of the coherence function is proposed.

1. 序文

近年土木構造物の巨大化、長大化に伴い、地震時、暴風時に構造物に働く外力を、1地点における時刻歴だけでなく多地点における時刻歴として明らかにする必要性が生じてきている。地震波、風速変動、波浪などのランダム変動を一つの時系列として解析するだけでなく、複数の時系列間の相互関係までも考慮して解析する手法が研究されている。^{例えは1)～4)}

耐震工学の分野では、従来得られている地震記録は一地点で観測されたものが多く、土木構造物の耐震設計も一地点での地震動の性質に基づいて行われてきた。しかし、近年では長大構造物が多く建設されており、このような構造物に沿った地形・地盤条件は一樣でないため、これらの変化を考慮した構造物に沿う地震動の性質を正しく取り入れた設計をすることが必要であると考えられている。そのため、地震動の隣接する場所による相違、地震動の伝播特性等を明らかにするために、各研究機関で強震動の1次元、2次元または3次元的なアレー観測が行われている。^{例えは5)～9)}

近接した2地点における波形の違いを示す1例として、東京都⁵⁾が中川水管橋左岸及び右岸において観測した千葉県中部地震の加速度記録波形を図-1に示す。図-1の2つの波形を比較すると、2つの記録の対応するピークの間には絶対時間のずれ(遅れ)が生じていること、また、2つの記録は、互いに良く似ているが、波形が多少異なっており、すなわち波形のゆがみが生じていることがわかる。

* 工博 埼玉大学助手 工学部建設工学科 (〒338 浦和市下大久保255)

** 工修 西松建設 技術研究部 (〒242 大和市下鶴間2570の4)

これらのアレー観測で得られた記録から地震動の最大加速度およびスペクトルの特性と共に波の伝播特性として伝播方向・伝播速度が調べられ、^{例えば10)} さらにはコヒーレンスを用い地震動の空間相関性が解析されている。^{例えば11)～15)}

また、地中埋設構造物の耐震性は2地点間の地盤の相対変位・平均ひずみに大きく影響されるため、^{例えば16)} これらの値の正しい評価が必要である。従来、地盤のひずみ振幅は地震波を同一の波形で伝播するものと仮定して推定されている。しかし、実際には、地表面上の2地点で観測される地震波形は地盤の不均一性などの理由により同一波形ではなく、波形は異なり波形のゆがみが生じている。著者らは、この波形のゆがみの程度をコヒーレンスで表し、この影響を考慮した場合に2地点間の地盤の相対変位・平均ひずみが同一波形で伝播する場合とどの様に異なるかを明らかにしている¹⁷⁾。

以上のように、コヒーレンスの値については、地震動、風速変動^{例えば18)19)}、波浪^{例えば20)}など多くの分野で算定されているが、コヒーレンスの性質または誤差について従来^{例えば1)～4)11)～20)}十分な研究が既に行われているとは言えず、これらについての十分な検討が必要であると考え。本論文では、コヒーレンスの算定値にはどのような因子が影響するのかを明らかにし、コヒーレンスの性質について検討した。そして、2.で示した従来のコヒーレンスの算定方法では

① 2つの波形が全く同一波形であっても時間のずれ(遅れ)が存在する場合にはコヒーレンスは1にならない、

② 2つの波形が独立であってもコヒーレンスは零にならない、

(図-2参照)という問題点を有することを3.4.それぞれで示した。これらの問題点は、コヒーレンスが波形間の相関性を表すという物理的な解釈をあいまいなものにしていると考えた。これらの問題点の①については木村ら²⁰⁾が波浪に対し一部言及している事実であり、②については有限区間のデータからコヒーレンスを推定する際に生ずる誤差という観点から検討が行われ⁴⁾、経験的な結果が導かれている。これに対し、本論文では、幾つかの特定のパワースペクトルの例に対して解析的な検討を加えスペクトルの平滑化に伴いコヒーレンスの値に影響が生ずることを指摘している。さらに、本論文では以上①②の影響について定量的に検討することを目的としている。そして、得られた結果に基づき5.では従来のコヒーレンスの算定方法に改良を加え、1例として図-1の地震動の実測記録のコヒーレンスの算定に適用している。

2. コヒーレンスの算定方法

(1) 定義

波形のゆがみの程度を表わす尺度として従来より式(1)で定義されるコヒーレンス $\text{coh}^2(\omega)$ が用いられている。以後、「コヒーレンス」という言葉を $\text{coh}(\omega)$ 、 $\text{coh}^2(\omega)$ 等の何れを指すかを区別せずに使用している。しかし、区別が必要な箇所では $\text{coh}(\omega)$ 、 $\text{coh}^2(\omega)$ 等、式で示してある。

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)} \quad (1)$$

ただし、 $S_x(\omega)$ 、 $S_y(\omega)$ は2地点の時系列データ $x(t)$ 、 $y(t)$ それぞれのパワースペクトル、 $S_{xy}(\omega)$ はクロススペクトル、 ω は角振動数である。そして、『 $x(t)$ および $y(t)$ が完全相関を有するとき $\text{coh}^2(\omega)=1$ 、また相関性を有さないとき $\text{coh}^2(\omega)=0$ となる。』とされている²⁾。

これまでに提案されているスペクトルの推定法としてはBlackman-Tukey法、FFT法、最大エントロピー法(MEM)あるいは自己回帰式法等がある^{1)～3)}が、本論文では、FFT法のような直接フーリエ変換法によってスペクトルを算定し、算定されたパワースペクトル、クロススペクトルからコヒーレンスを算定する方法について考察を試みる。平滑化を行わない場合のパワースペクトルおよびクロススペクトルの算定値は、

$$S_x(\omega) = \frac{2\pi}{T} X^*(\omega)X(\omega) \quad (2)$$

$$S_y(\omega) = \frac{2\pi}{T} Y^*(\omega)Y(\omega) \quad (3)$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{2\pi}{T} X^*(\omega)Y(\omega) \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $X(\omega)$ および $Y(\omega)$ はそれぞれ $x(t)$ および $y(t)$ の記録長 T にわたってのフーリエ変換結果

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-i\omega t} dt \quad (6)$$

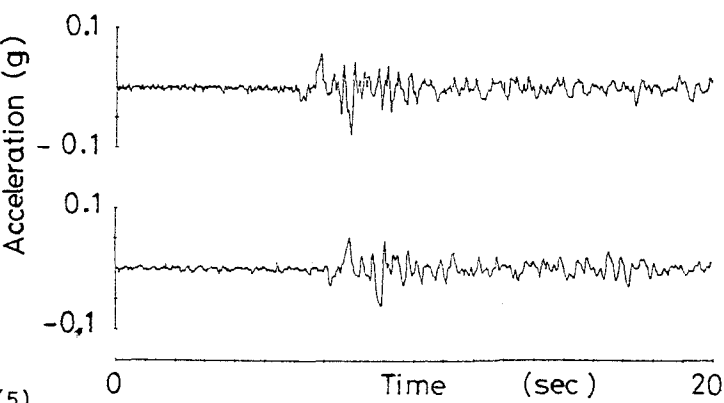


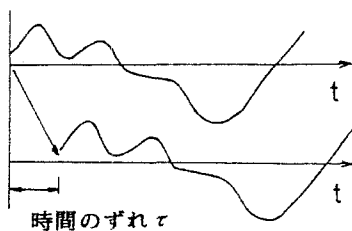
図-1 近接した2地点における加速度波形の違いを示す
1例(東京都による, 参考文献5より引用)

であり、*は共役複素数を表す。コヒーレンスの算定値は式(1)より

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{S_{xy}^*(\omega)S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)S_y(\omega)} = \frac{[\frac{2\pi}{T} X^*Y][\frac{2\pi}{T} X^*Y]}{[\frac{2\pi}{T} X^*X][\frac{2\pi}{T} Y^*Y]} = 1 \quad (7)$$

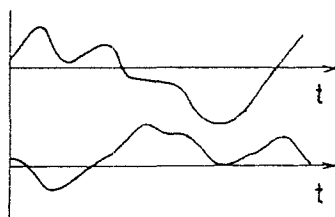
となる。したがって、2つの波形 $x(t)$ 、 $y(t)$ が全く異なっているにもかかわらずコヒーレンスは常に1と求められてしまい⁴⁾、算定されたコヒーレンスは相関性を表わしていない。このため、実際には幾つかの地震記録をそれぞれ同一母集団に属する標本と考えてスペクトルのアンサンブル平均をとるか、またはスペクトルの振動数領域でウィンドーを用いて平滑化を行なうことによって、コヒーレンスが算定されている。しかし、この両方法による算定結果の違いへの影響は十分に検討されていないというのが現状である。本研究では1つの地震データからコヒーレンスが算定可能であるウィンドーを用いた平滑化による方法に着目した。

①



同一波形であっても
コヒーレンスは
1にならない

②



独立な波形であっても
コヒーレンスは
零にならない

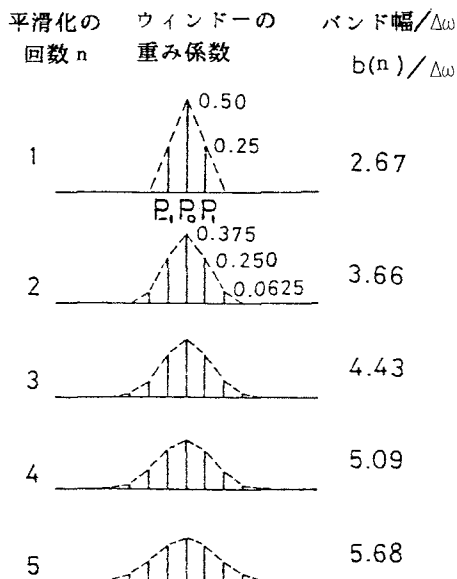


図-2 ウィンドーを用いた平滑化による
コヒーレンスの算定方法の問題点

図-3 Hanningウィンドーの
重み係数とバンド幅

(2) ウィンドーを用いた平滑化による方法

平滑化操作の方法として、生のスペクトル算定値 $S(\omega)$ にスペクトルウィンドー（平滑化ウィンドー）をかけて平滑化を行う方法がある。

離散型のスペクトルウィンドーには Hanning, Hamming, 赤池のウィンドーなどが提案されている^{1)~3)}。ここでは次式に示す Hanning のウィンドーを使用した。

$$\hat{S}(\omega_k) = 0.25 S(\omega_{k-1}) + 0.5 S(\omega_k) + 0.25 S(\omega_{k+1}) \quad (8)$$

上式の標準的なウィンドーに対し、平滑化のウィンドーのバンド幅を広げた具体的な一例として式(8)による平滑化を繰り返す方法を採用した。一般に n 回の平滑化の繰り返しに対するウィンドーの重み係数を P_k と書くと、

$$\sum_{k=-n}^n P_k = 1 \quad (9)$$

$$P_k = P_{-k} \quad (10)$$

が成り立ち、すなわち面積不変性と対称性が保たれている。Hanning のウィンドーに対してバンド幅 $b(n)$ を

$$b(n) = \frac{1}{\sum_{k=-n}^n P_k^2} \Delta\omega \quad (11)$$

で定義する^{2) 3)}。ただし、 $\Delta\omega$ は角振動数の分割間隔 $\omega_{k+1} - \omega_k$ であり、FFT を使用した場合には $2\pi/T$ (T : データ長) に等しい。図-3 には平滑化の各回数 n に対するウィンドーの重み係数 P_k とそのバンド幅 $b(n)$ を示している。そして、図-4 には横軸に平滑化の回数 n をとり、縦軸に平滑化 n 回のバンド幅 $b(n)$ と平滑化 1 回のバンド幅 $b(1)$ との比 $b(n)/b(1)$ をとって、平滑化の回数の増加に伴うウィンドーのバンド幅の増加を示している。

ウィンドーを用いたスペクトルの平滑化を行なって得られるコヒーレンスは次式で算定される。

$$\text{coh}^2(\omega_k) = \frac{|\hat{S}_{xy}(\omega_k)|^2}{\hat{S}_x(\omega_k)\hat{S}_y(\omega_k)} \quad (12)$$

ただし、記号 $\hat{}$ はウィンドーによる平滑化を行なった結果の値であることを表わす。

3. コヒーレンスの算定値に及ぼす 2 つの波形の時間のずれの影響

コヒーレンスの算定値に影響を及ぼし誤差を与える可能性のある因子として、第一に 2 つの波形の時間のずれを考えた。そして、解析に用いる 2 つの波形は全く同一のものであるが、時間のずれがある場合には、ウィンドーを用いた平滑化によって算定されるコヒーレンスにどの程度の誤差が生ずるかを検討した。ただし、本論文では、たとえ 2 つの波形の間に時間のずれが有っても、全く同一の波形の場合には、コヒーレンスが 1 となる方が、波形の相関性を表わすというコヒーレンスの物理的な意味付けをより明確にするものと考えている。

(1) 単一矩形波の場合

同一波形が伝播する場合の 1 例として、高さ 1、幅 T_0 の単一の矩形波が図-5 に示すように時間 τ だけずれて伝わる場合の 2 つの波形 $x(t)$ 、 $y(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & (t_0 < t < t_0 + T_0) \\ 0 & (t < t_0, t_0 + T_0 < t) \end{cases} \quad (13)$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 & (t_0 + \tau < t < t_0 + \tau + T_0) \\ 0 & (t < t_0 + \tau, t_0 + \tau + T_0 < t) \end{cases} \quad (14)$$

のコヒーレンスを定式化し、時間のずれがコヒーレンスの算定値に及ぼす影響を考察した。はじめに、式 (13)、(14) のフーリエ変換を行なうと次式が得られる。

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t_0} - e^{-i\omega(t_0+T_0)}] \quad (15)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0+\tau}^{t_0+\tau+T_0} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega(t_0+\tau)} - e^{-i\omega(t_0+\tau+T_0)}] \quad (16)$$

$x(t)$ 、 $y(t)$ のパワースペクトルおよびクロススペクトルは式 (2) ~ (4)、(15) (16) より

$$S_x(\omega) = S_y(\omega) = \frac{2}{T\omega^2} [1 - \cos(\omega T_0)] \quad (17)$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{2}{T\omega^2} [1 - \cos(\omega T_0)] e^{-i\omega\tau} \quad (18)$$

となる。さらに、式 (17) に式 (8) のウィンドーをかけ平滑化を行なう。

$$\begin{aligned} \hat{S}_x(\omega_k) = \hat{S}_y(\omega_k) &= 0.25 \times \frac{2}{T\omega_{k-1}^2} [1 - \cos(\omega_{k-1} T_0)] + 0.5 \times \frac{2}{T\omega_k^2} [1 - \cos(\omega_k T_0)] \\ &\quad + 0.25 \times \frac{2}{T\omega_{k+1}^2} [1 - \cos(\omega_{k+1} T_0)] \end{aligned} \quad (19)$$

式 (18) のクロススペクトルは複素関数であるため、実数部、虚数部それぞれにウィンドーをかける。さらに、これらの 2 乗和を求める。

$$\begin{aligned} |\hat{S}_{xy}(\omega_k)|^2 &= \text{Re}^2\{\hat{S}_{xy}(\omega_k)\} + \text{Im}^2\{\hat{S}_{xy}(\omega_k)\} = 0.25^2 \left(\frac{2}{T\omega_{k-1}^2}\right)^2 [1 - \cos(\omega_{k-1} T_0)]^2 \\ &\quad + 0.5^2 \left(\frac{2}{T\omega_k^2}\right)^2 [1 - \cos(\omega_k T_0)]^2 + 0.25^2 \left(\frac{2}{T\omega_{k+1}^2}\right)^2 [1 - \cos(\omega_{k+1} T_0)]^2 \\ &\quad + 0.25 \left(\frac{2}{T\omega_{k-1}\omega_k}\right)^2 [1 - \cos(\omega_{k-1} T_0)][1 - \cos(\omega_k T_0)] \cos(\Delta\omega\tau) \\ &\quad + 0.25 \left(\frac{2}{T\omega_k\omega_{k+1}}\right)^2 [1 - \cos(\omega_k T_0)][1 - \cos(\omega_{k+1} T_0)] \cos(\Delta\omega\tau) \\ &\quad + 0.125 \left(\frac{2}{T\omega_{k-1}\omega_{k+1}}\right)^2 [1 - \cos(\omega_{k-1} T_0)][1 - \cos(\omega_{k+1} T_0)] \cos(2\Delta\omega\tau) \end{aligned} \quad (20)$$

ただし、 $\Delta\omega$ は角振動数の分割間隔であり、FFT を使用した場合には

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T} \quad (21)$$

であり、データ長 T によって決定される。式 (20) を式 (19) で割りコヒーレンスが式 (12) より求まる。式 (20) をみると右辺第 4、5、6 項は $\Delta\omega\tau$ (FFT を使用した場合には $2\pi(\tau/T)$ に等しい) の関数になっていることが注目される。 $\Delta\omega\tau = 0$ ならば、 $\cos(\Delta\omega\tau) = 1$ であるから、これより求められるコヒーレンスは 1 になり、コヒーレンスは波形の相関性と一致している。しかし、 $\Delta\omega\tau$ が零以外のある値をもつと $\cos(\Delta\omega\tau) \neq 1$ であり、波形は全く同一であるにも拘らず、コヒーレンスが 1 にならない。よって、 $\Delta\omega\tau$ の値がコヒーレン스에誤差を与える因子になっている。

図-6 (a) (b) (c) には式 (12)、(19)、(20) から求めたコヒーレンスを示しており、それぞれ $\Delta\omega\tau = 0.5, 1.0, 2.0$ の場合を示し、また各場合に対し矩形幅 $T_0 = 0.1, 1, 10$ について示している。図-6 (a) (b) (c) のそれぞれから、矩形波の幅 T_0 が大きくなるとコヒーレンスのばらつきが大きくなるが、コヒーレンスの平均値は T_0 によらずほぼ不変であり、さらに角振動数によらず一定であることが認められる。また、 $\Delta\omega\tau$ の増加と共にコヒーレンスの値は減少し、 $\Delta\omega\tau = 0.5, 1.0, 2.0$ それぞれに対し、約 0.9、0.8、

0.3 である。図-6 (a) (b) (c) から同一波形でも時間ずれのある場合のコヒーレンスは1にならず、1よりも小さい値となり、この値は角振動数 ω には無関係であり、角振動数の分割間隔 $\Delta\omega$ と時間のずれ τ との積 $\Delta\omega\tau$ によって決まる値であることがわかる。

(2) スペクトル $S(\omega)$ の場合

2つの波形とも同一のパワースペクトル

$$S_x(\omega) = S_y(\omega) = S(\omega) \tag{22}$$

を有し、時間 τ だけずれて、同一波形を保って伝播する場合のクロススペクトルは式(2)～(6)より次式で

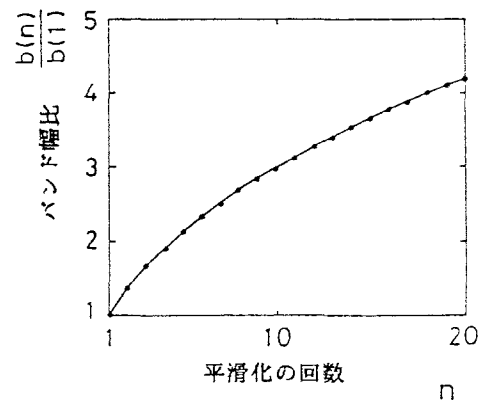


図-4 平滑化の回数 n とウィンドーのバンド幅比 $b(n)/b(1)$ との関係

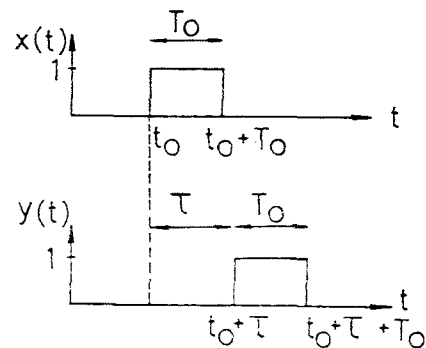


図-5 時間のずれのある矩形波

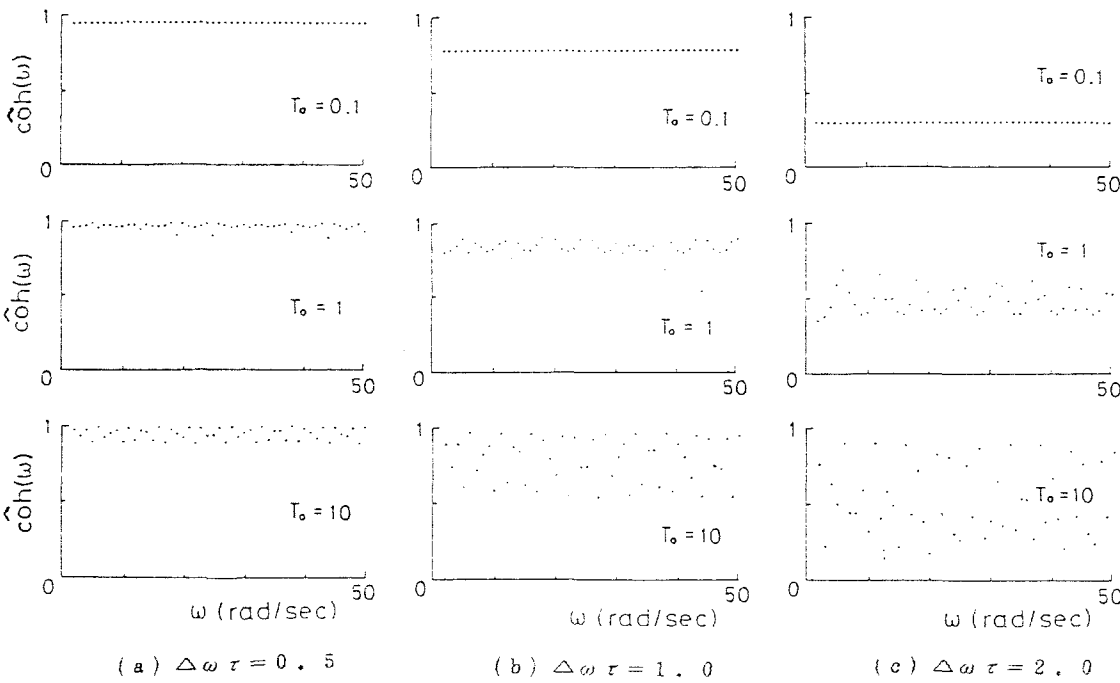


図-6 時間のずれのある矩形波のコヒーレンス

表わされる。

$$S_{xy}(\omega) = S(\omega)e^{-i\omega\tau} \quad (23)$$

重み係数 P_k ($k=-n, \dots, 0, \dots, n$) の離散型ウィンドーを用いた場合、平滑化したパワースペクトルおよびクロススペクトルの実数部、虚数部はそれぞれ、

$$\hat{S}_x(\omega) = \hat{S}_y(\omega) = \sum_{k=-n}^n P_k S(\omega+k\Delta\omega) \quad (24)$$

$$\text{Re}\{\hat{S}_{xy}(\omega)\} = \sum_{k=-n}^n P_k S(\omega+k\Delta\omega) \cos\{(\omega+k\Delta\omega)\tau\} \quad (25)$$

$$\text{Im}\{\hat{S}_{xy}(\omega)\} = - \sum_{k=-n}^n P_k S(\omega+k\Delta\omega) \sin\{(\omega+k\Delta\omega)\tau\} \quad (26)$$

と求まる。ここで、 $\Delta\omega$ は角振動数の分割間隔であり式(21)で述べたとおりである。式(12), (24), (25), (26), よりコヒーレンスを求めると、

$$\text{coh}(\omega) = \frac{\sqrt{\sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n P_k P_\ell S(\omega+k\Delta\omega) S(\omega+\ell\Delta\omega) \cos\{(k-\ell)\Delta\omega\tau\}}}{\sum_{k=-n}^n P_k S(\omega+k\Delta\omega)} \quad (27)$$

である。同一波形で時間のずれがある場合のコヒーレンスは1にならず1よりも小さな値となり、この値は角振動数の分割間隔 $\Delta\omega$ と時間のずれ τ との積 $\Delta\omega\tau$ の他にスペクトル $S(\omega)$ の形状も影響することがわかる。しかし、これについては、本論文では扱わないことにする。

(3) ホワイトノイズの場合

特に、パワースペクトルがホワイトノイズ(平滑化する領域内ではスペクトルが一定)

$$S(\omega) = a \quad (28)$$

でありHanningのウィンドーを用いて平滑化を1回行なった場合、式(27)は

$$\text{coh}(\omega) = \sqrt{0.375 + 0.5 \cos(\Delta\omega\tau) + 0.125 \cos(2\Delta\omega\tau)} \quad (29)$$

となる。式(27), (29)で求められたコヒーレンスは、 $\Delta\omega\tau$ の関数であり $\Delta\omega\tau=0$ の場合には $\text{coh}(\omega)=1$ であるが、 $\Delta\omega\tau \neq 0$ の場合には1より小さい。

式(27)より $\Delta\omega\tau$ の値がコヒーレンスの値にどの程度影響するかを算定した。図-7にはホワイトノイズに対して $\Delta\omega=1.0$ rad/sec, $\tau=0.5$ sec の場合のコヒーレンスを ω の関数として平滑化の回数をパラメータにとり示してある。コヒーレンスが角振動数 ω によらず一定であることにより、図-8には $\Delta\omega\tau$ とコヒーレンスとの関係を平滑化の回数 n をパラメータとして示している。各場合とも、 $\Delta\omega\tau=0$ では $\text{coh}(\omega)=1$ であるが、 $\Delta\omega\tau$ の増大と共に $\text{coh}(\omega)$ は減少しており、また、平滑化の回数 n が多い程 $\text{coh}(\omega)$ の減少の程度が著しい。 $\Delta\omega\tau=1.0$ の場合のコヒーレンスの値を比較すると、平滑化の回数 $n=1, 2, 4, 8$ でそれぞれ $\text{coh}(\omega)=0.77, 0.59, 0.34, 0.12$ である。平滑化の回数および $\Delta\omega$ の増加に伴いウィンドーのバンド幅は増加するため(図-4, 式(11)参照), 図-8はウィンドーのバンド幅が広い程、また、時間のずれ τ が大きい程コヒーレンスは小さく求まることを示している。

(4) ウィンドーのバンド幅の影響

次にウィンドーのバンド幅の影響を解析的に検討するため、平滑化のためのウィンドーとして連続型ウィンドーを用いた場合について考えた。2つの波形のパワースペクトルが共に $S(\omega)$ (式(22)参照)であり、同一波形のまま時間のずれ τ で伝播する場合にはクロススペクトル $S_{xy}(\omega)$ は式(23)で表わされる。ここでは簡単化のため、パワースペクトル $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ が共にホワイトノイズの場合を考えると

$$S_x(\omega) = S_y(\omega) = S(\omega) = a \quad (30)$$

であり、またウィンドー $Q(\omega)$ にはバンド幅 B の箱形ウィンドー

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1/B & (|\omega| \leq B/2) \\ 0 & (|\omega| > B/2) \end{cases} \quad (31)$$

を考えた。平滑化されたパワースペクトルおよびクロススペクトルは次のように求まる。

$$\hat{S}_x(\omega) = \hat{S}_y(\omega) = a \quad (32)$$

$$\hat{S}_{xy}(\omega) = \int_{-B/2}^{B/2} \frac{1}{B} a \exp\{-i(\omega + \omega')\tau\} d\omega' = a \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \exp(-i\omega\tau) \quad (33)$$

式 (32), (33) より求められるコヒーレンス $\hat{c}oh(\omega)$ は

$$\hat{c}oh(\omega) = \left| \frac{\sin(B\tau/2)}{B\tau/2} \right| \quad (34)$$

となる。上式より、時間のずれ τ とウィンドーのバンド幅 B との積 $B\tau$ が $B\tau \ll 1$ の場合には $\hat{c}oh(\omega) \approx 1$ となるが、 B と τ の積が大きい場合には 2 つの波形が同一波形であってもコヒーレンスは 1 よりも小さくなる事がわかる。

以上により、2 つの波形に時間のずれがある場合には同一波形であってもコヒーレンスは 1 にならず、角振動数の分割間隔 $\Delta\omega$ と時間のずれ τ との積 $\Delta\omega\tau$ (FFT を使用した場合には $2\pi(\tau/T)$ に等しい)、および平滑化の回数 n が大きい程、すなわち言い換えれば時間のずれ τ およびウィンドーの幅 B が大きい程、コヒーレンスの減少の程度が著しく、これらの因子がコヒーレンスの算定値に誤差を与える因子であることが明らかになった。

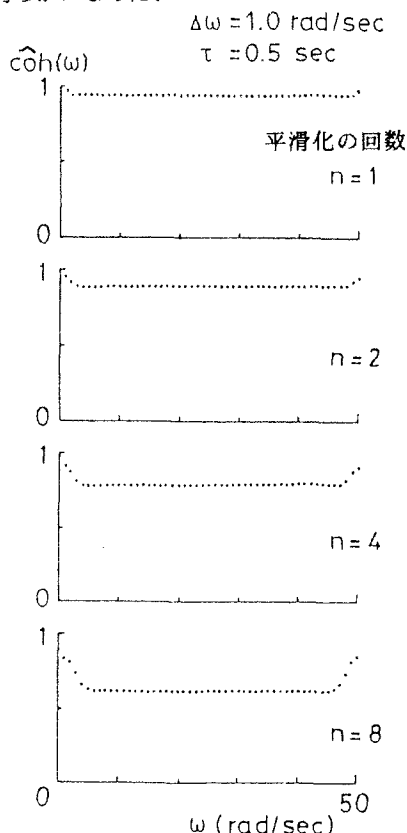


図-7 時間のずれがあるホワイトノイズのコヒーレンス

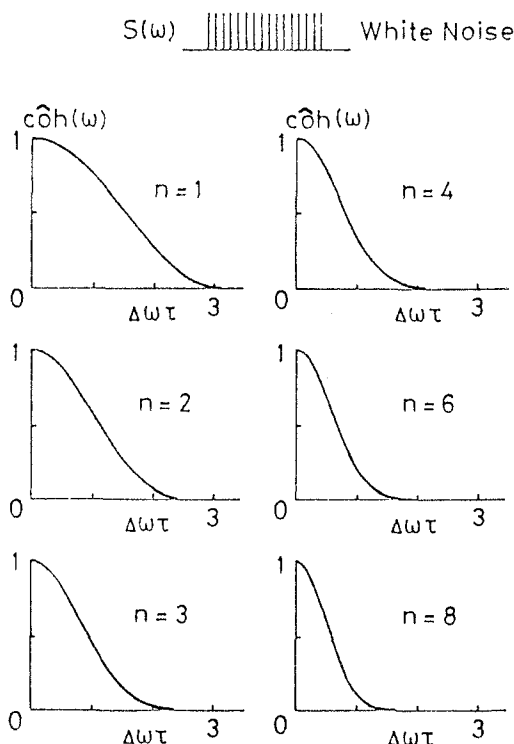


図-8 コヒーレンスに及ぼす時間のずれ $\Delta\omega\tau$ の影響

4. 独立な波形のコヒーレンスの算定値に及ぼす平滑化の回数の影響

コヒーレンスが2つの波形の相関の程度を表わすならば、2つの波形が同一波形の場合にはコヒーレンスが1、独立な波形の場合にはコヒーレンスが零になると都合が良い。しかし、2つの波形が独立の場合でもコヒーレンスは零にならない。ただし、本論文では、独立な2つの波形を、パワースペクトルは与えられたもの（特に(3)では2つの波形で同一のパワースペクトル $S(\omega)$ を仮定）であるが、位相が2つの波形で独立な波形であると定義する。これらの独立な波形のコヒーレンスがどの程度の大ききで求められるのか、また平滑化に用いたウィンドーとどのような関係があるのかを検討し考察した。

(1) スペクトル $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ の場合

2つの独立な波形のクロススペクトル $S_{xy}(\omega)$ は式(2)～(6)より次式で表わすことができる。

$$S_{xy}(\omega) = \sqrt{S_x(\omega)S_y(\omega)} \exp[i\{\psi(\omega) - \phi(\omega)\}] \quad (35)$$

ただし、 $\psi(\omega)$, $\phi(\omega)$ はそれぞれの波形の角振動数 ω における位相を表わし、各々の ω に対して独立な乱数である。式(35)のクロススペクトルはアンサンブル平均をとると零になる。

しかし、パワースペクトル $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ およびクロススペクトル $S_{xy}(\omega)$ (式(35)) を平滑化し、コヒーレンスを求めると

$$\hat{S}_x(\omega) = \sum_{k=-n}^n P_k S_x(\omega + k\Delta\omega) \quad (36)$$

$$\hat{S}_y(\omega) = \sum_{k=-n}^n P_k S_y(\omega + k\Delta\omega) \quad (37)$$

$$\text{Re}[\hat{S}_{xy}(\omega)] = \sum_{k=-n}^n P_k \sqrt{S_x(\omega + k\Delta\omega)S_y(\omega + k\Delta\omega)} \cos\{\psi(\omega + k\Delta\omega) - \phi(\omega + k\Delta\omega)\} \quad (38)$$

$$\text{Im}[\hat{S}_{xy}(\omega)] = \sum_{k=-n}^n P_k \sqrt{S_x(\omega + k\Delta\omega)S_y(\omega + k\Delta\omega)} \sin\{\psi(\omega + k\Delta\omega) - \phi(\omega + k\Delta\omega)\} \quad (39)$$

$$\hat{\text{coh}}^2(\omega) = \frac{\sum_{k=-n}^n \sum_{\ell=-n}^n [P_k P_\ell \sqrt{S_x(\omega + k\Delta\omega)S_y(\omega + k\Delta\omega)S_x(\omega + \ell\Delta\omega)S_y(\omega + \ell\Delta\omega)} \cdot \cos\{\psi(\omega + k\Delta\omega) - \psi(\omega + \ell\Delta\omega) - \phi(\omega + k\Delta\omega) + \phi(\omega + \ell\Delta\omega)\}]}{\left\{ \sum_{k=-n}^n P_k S_x(\omega + k\Delta\omega) \right\} \left\{ \sum_{k=-n}^n P_k S_y(\omega + k\Delta\omega) \right\}} \quad (40)$$

となる。 $\psi(\omega)$, $\phi(\omega)$ が独立である場合には、次式が成り立つ。

$$E[\cos\{\psi(\omega + k\Delta\omega) - \psi(\omega + \ell\Delta\omega) - \phi(\omega + k\Delta\omega) + \phi(\omega + \ell\Delta\omega)\}] = \begin{cases} 0 & (k \neq \ell \text{ の場合}) \\ 1 & (k = \ell \text{ の場合}) \end{cases} \quad (41)$$

ただし、 $E[\]$ はアンサンブル平均を表わす。従って、式(40)のコヒーレンスのアンサンブル平均値は

$$E[\hat{\text{coh}}^2(\omega)] = \frac{\sum_{k=-n}^n P_k^2 S_x(\omega + k\Delta\omega) S_y(\omega + k\Delta\omega)}{\left\{ \sum_{k=-n}^n P_k S_x(\omega + k\Delta\omega) \right\} \left\{ \sum_{k=-n}^n P_k S_y(\omega + k\Delta\omega) \right\}} \quad (42)$$

となる。したがって、式(42)から算定される値は2つの波形が独立であるにも拘らず零にならず、この値はウィンドーおよびスペクトルの形によって決まる値である。

(2) ホワイトノイズの場合

特にスペクトルがホワイトノイズの場合には式(42)は式(9)より次式で表わされる。

$$E[\hat{c}oh^2(\omega)] = \sum_{k=-n}^n P_k^2 \quad (43)$$

ホワイトノイズの場合のコヒーレンスのアンサンブル平均値はウィンドーの形のみによって決まる。図-3に示されるHanningのウィンドーを用いた場合の式(43)より求められる $\hat{c}oh^2(\omega)$ のアンサンブル平均値を図-9に実線で示している。平滑化が1回の場合には $E[\hat{c}oh^2(\omega)] = 0.375$ 、2回の場合には $E[\hat{c}oh^2(\omega)] = 0.273$ とかなり大きな値となるが、 n の増加と共にアンサンブル平均値は減少し零に近づく。

独立な2つの波形の1例として、位相 $\phi(\omega)$ 、 $\phi(\omega)$ に互いに独立な $0 \sim 2\pi$ の一樣な乱数を与え、2つの独立なホワイトノイズの波形をシミュレートし、コヒーレンス $\hat{c}oh(\omega)$ を算定した結果を図-10に示している。コヒーレンスの値にはかなりのばらつきがあるが、2つの波形が独立であってもコヒーレンスは決して零になっていないことが注目される。さらに、平滑化の増加に伴いコヒーレンスの値は全般的に低下しており、その値は図-9に実線で示した値の平方根と大体対応している。

(3) スペクトル $S(\omega)$ の場合の下限值

式(42)で求められる $E[\hat{c}oh^2(\omega)]$ について特に2つの波形のスペクトルが同一の場合(式(22)参照)に対してさらに考察を加えた。式(42)中のウィンドーの重み P_k とスペクトル $S(\omega + k\Delta\omega)$ との積 $P_k S(\omega + k\Delta\omega)$ を R_k と置き、式(42)を次式のように書き直す。

$$E[\hat{c}oh^2(\omega)] = \frac{\sum_{k=-n}^n R_k^2}{\left\{ \sum_{k=-n}^n R_k \right\}^2} \quad (44)$$

R_k の和が一定(式(44)の分母参照)の場合、 R_k の二乗和(式(44)の分子)が大きい程(すなわち、 R_k のばらつきが大きい程)式(44)の値 $E[\hat{c}oh^2(\omega)]$ は大きくなり、最大値は1である。一方、 R_k が k によらず一定の場合に最小となり、この値は

$$E[\hat{c}oh^2(\omega)] = 1 / (2n+1) \quad (45)$$

であり平滑化の回数 n のみによって決定される(図-9破線参照)。

このことは図-11で確かめられる。図-11の①～⑥には注目している角振動数の回りのスペクトル $S(\omega)$ が実線で、平滑化の回数 $n=5$ の場合のウィンドー P_k ($k=-5, \dots, 5$) (図-3参照)とスペクトルとの積(R_k の分布)が破線で示されている。そしてその下の値はスペクトルの中央部の角振動数に対するコヒーレンスのアンサンブル平均値の平方根 $\sqrt{E[\hat{c}oh^2(\omega)]}$ を示している。④、⑥のような谷型のスペクトルの場合には R_k の分布が一樣に近くなるためコヒーレンスのアンサンブル平均値は他のものと比べ小さい。一方、③のようにスペクトルが山型の場合には R_k のばらつきが大きく、従ってコヒーレンスのアンサンブル平均値が他と比較して大きい。①のホワイトノイズの場合にはこれらのほぼ中間の値を示しており、図-9に実線で示した値はスペクトルの形によらない1つの中間値としての目安を与える値であると考えられる。またスペクトルが①～⑤のどのような形をしていてもコヒーレンスのアンサンブル平均値は式(45)から計算される値(図-9破線参照) $\sqrt{E[\hat{c}oh^2(\omega)]} = 0.302$ を越えることはなく、式(45)の値はコヒーレンスのアンサンブル平均値の下限值であることが確認できる。

以上により、2つの波形が独立な場合のコヒーレンスの算定値は零にならず、そのアンサンブル平均値は正の値をもち、この値はウィンドーの形および注目している角振動数の付近のスペクトルの形に影響されることが明らかになった。また、独立な2つの波形のコヒーレンスのアンサンブル平均値の下限值およびホワイトノイズに対する値を平滑化の回数の関数として導いた。もとより、これらの値は、2点のパワースペクトルが同一である等の仮定の下での結果であるため、今後更にスペクトルそのものの推定誤差をも考慮に加

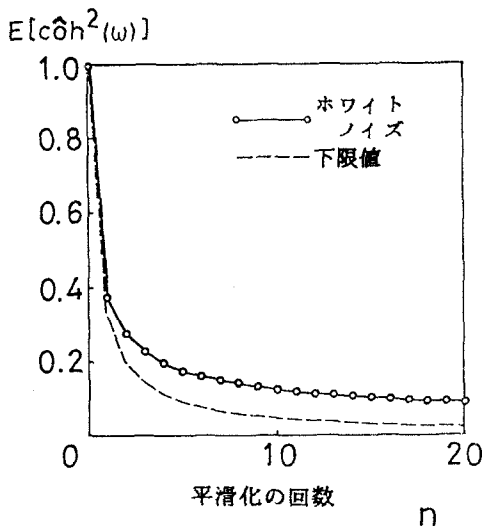


図-9 独立な波形のコヒーレンスのアンサンブル平均値に及ぼす平滑化の回数の影響

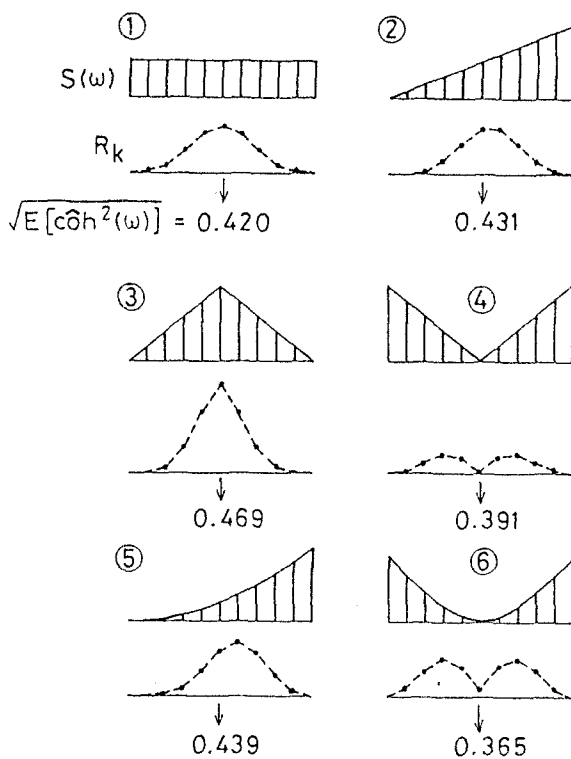


図-11 2つの波形が独立な場合のスペクトルの形状とコヒーレンスのアンサンブル平均値との関係

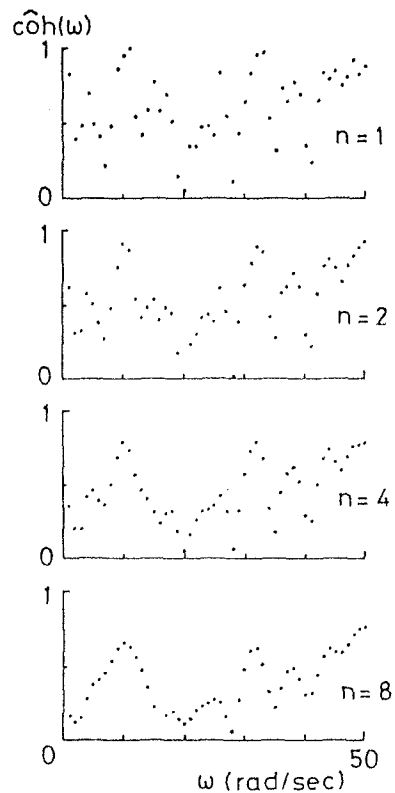


図-10 独立なホワイトノイズのコヒーレンスの1例

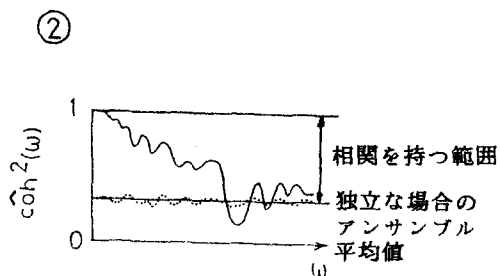
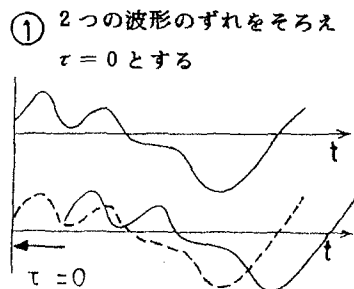


図-12 従来のコヒーレンスの算定方法の改良

えた厳密な検討が必要であるものとする。

5. コヒーレンスの算定方法の改良と計算結果の1例

以上、コヒーレンスの性質について検討を行なった結果、従来のコヒーレンスの算定方法では以下のような問題点が存在することがわかった。

- ① 2つの波形に時間のずれがある場合には、ずれ時間 τ 、およびウィンドーのバンド幅 B （または角振動数の分割間隔 $\Delta\omega$ と平滑化の回数 n ）の増大と共にコヒーレンスが減少し過小評価される。
- ② 2つの波形が独立な波形であってもコヒーレンスは零にならず、そのアンサンブル平均値は平滑化の回数によって異なる。
- ③ コヒーレンスの算定値はその注目している角振動数付近のスペクトルの形に影響される。

従って、従来のコヒーレンスの算定方法では2つの波形の相関性を知る上で不都合である。そこで、コヒーレンスを算定する際には、これらの影響を補正するため次のような操作が必要であると考えた（図-12参照）。

- ① 2つの波形に時間のずれがある場合には波形のずれを揃える。
- ② 独立波形の場合のアンサンブル平均値をコヒーレンスの下限値とし、それ以下の値は相関の程度を表わすコヒーレンスの値としては意味がないものと考え、コヒーレンスの補正を次式で行なう。

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{\hat{\text{coh}}^2(\omega) - E[\hat{\text{coh}}^2(\omega)]}{1 - E[\hat{\text{coh}}^2(\omega)]} \tag{46}$$

ただし、 $\hat{\text{coh}}^2(\omega)$ は従来の式 (12) の方法による算定値、 $E[\hat{\text{coh}}^2(\omega)]$ は式 (42) または (43) で求められる独立波形のアンサンブル平均値を表わす。

図-1 に示す2つの実測記録波形に対してコヒーレンスの算定を行ない、①、②の補正の影響を検討した。図-13~15はそれぞれ、①②の何れの補正もしない場合、①のみの補正をした場合、①②共に補正をした場合のコヒーレンスの算定結果である。ただし、平滑化の回数 $n=1, 8$ の各場合に対するコヒーレンスの値を

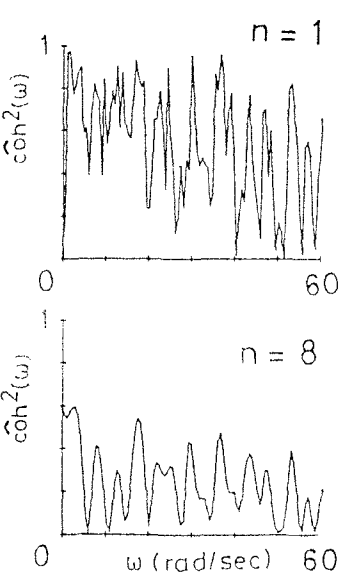


図-13 波形のずれを合わせない場合のコヒーレンス（図-1のデータを解析）

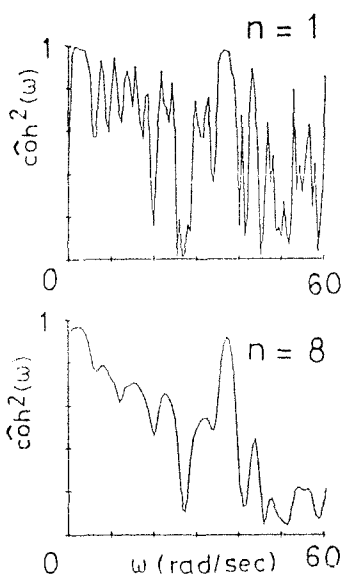


図-14 波形のずれは合わせたが、零線を補正しない場合のコヒーレンス（図-1のデータを解析）

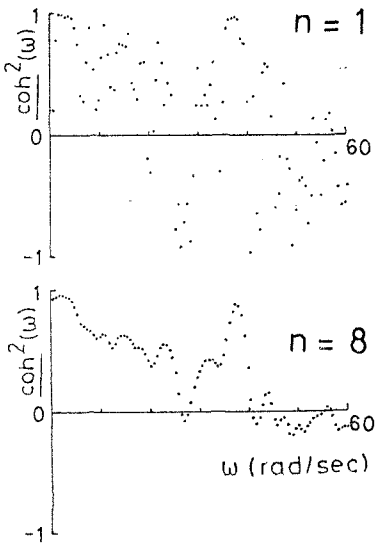


図-15 波形のずれを合わせ、零線を補正した場合のコヒーレンス（図-1のデータを解析）

示している。波形のずれを合わせない図-13では ω が小さい範囲でも1付近のコヒーレンスの値が得られていないことがわかる。特に $n=8$ ではコヒーレンスの値は全般に小さく、角振動数 ω の変化に伴うコヒーレンスの変化の傾向は明瞭でない。①の補正を行なった図-14ではコヒーレンスの値は図-13の場合よりも大きくなり、角振動数の増加につれてコヒーレンスが小さくなる右下がりの傾向も明瞭になってきている。2地点の記録の相関は角振動数が高い程少なくなるという結果であり、石井¹³⁾¹⁴⁾による結果とも一致している。しかし、平滑化の回数 n が1と8とでコヒーレンスの値が大きく異なり、角振動数 $\omega=50\text{rad/sec}$ 付近では平滑化が1回の場合には約0.3、8回の場合には約0.1である。この違いは平滑化の回数により算定値に偏りが生ずることが原因であると考えられる。

これに対して、図-15のコヒーレンスの値は当然平滑化の回数が少ないとばらつきが大きい、全体の傾向は平滑化の回数に左右されず大体一致している。またコヒーレンスを補正した結果、負の値も求められており、従来の方法では相関が無くても正の値しか求まらなかったのに比較して、独立波形の場合には期待値として零をとるため、角振動数 50rad/sec 付近ではほとんど相関が無いことがわかる。式(46)を用いることによって偏りの少ないコヒーレンスの算定が可能になったものと考えられる。

以上、本章では、ウィンドーによる平滑化を用いたコヒーレンスの改良された算定方法を提案した。しかし、㊦のスペクトルの形の影響、また、スペクトルそのものの推定誤差については十分検討を行っていないため、さらに今後合理的なコヒーレンスの算定方法の検討が必要であるものと考えられる。

6. 結論

(1) 従来の算定方法では、2つの波形が同一波形でも時間のずれがある場合にはそのコヒーレンスは1にならないことを示した。このコヒーレンスは時間のずれ τ 、バンド幅 B （または角振動数の分割間隔 $\Delta\omega$ と平滑化の回数 n ）の増大に伴い減少し過小評価されることを示した。

(2) 2つの波形の位相が独立の場合でも従来の平滑化によるコヒーレンスのアンサンブル平均値は零にならず算定値に偏りが生ずることを示した。この偏りの程度のスペクトルの形によらない下限値とホワイトノイズに対する値とを平滑化の回数の関数として示した。

(3) コヒーレンスの算定値はその注目している角振動数付近のスペクトルの形に影響されることが示された。しかし、この定性的な結果を定量的にまとめ上げ補正方法を提案するに至っていない。今後の検討が必要である。

(4) 従来のコヒーレンスの算定方法の改良を試みた。これは上記(1)(2)の結果より、2つの波形に時間のずれがある場合には波形のずれを揃え、独立の場合のアンサンブル平均値を下限としてコヒーレンスの算定値の偏りを補正するといった方法である。本方法を実測結果に適用した結果、波形の相関の程度をより正確に表わしたコヒーレンスが得られた。

謝辞 本研究をまとめるにあたり貴重な御助言を頂きました埼玉大学工学部久保慶三郎先生、渡辺啓行先生に謹んで感謝致します。

参考文献

- 1) 大崎順彦：地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1984。
- 2) 星谷 勝：確率手法による振動解析，鹿島出版会，1974。
- 3) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977。

- 4) Bendat, J. S. and Piersol, A. G. (得丸他訳) : ランダムデータの統計的処理, 培風館, 1976.
- 5) Yazaki, S., Kinoshita, S. and Terashima, K. : Digitized data of strong-motion earthquake records (2)-1980 Central Chiba Prefecture Earthquake-, 防災科学技術研究資料第80号, 科学技術庁国立防災科学技術センター, 1983.
- 6) Tsuchida, H. and Kurata, E. : Observation of earthquake response of ground with horizontal and vertical seismometer arrays, 第4回日本地震工学シンポジウム, pp. 137 ~ 144, Nov., 1975.
- 7) 田村重四郎・加藤勝行・前田 弘: 軟弱地盤表面の線上的地震動の特性について, 土木学会第29回年次学術講演概要集, 第1部, pp. 538~539, 1974年10月.
- 8) 川島一彦・相沢 興: 地震動の同時多点観測記録の解析, 土木学会第16回地震工学研究発表会講演概要, pp. 33~36, 1981年 7月.
- 9) 表俊一郎・太田外気晴: 岩盤における強震アレー観測, 第6回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 193~200, 1982.
- 10) 土岐憲三: 強震加速度記録による位相速度の検出, 第4回日本地震工学シンポジウム講演集, pp. 265 ~ 272, 1975.
- 11) 表俊一郎・前田潤滋・橋橋秀衛: 強震アレー観測記録による地盤震動の空間相関特性の研究, 東松山観測点近傍の震動特性について, 第6回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 225~232, 1982.
- 12) 原田隆典・高本智博・堤一・赤木正見: アレー観測記録による地震動の空間的変動特性の解析について, 土木学会第40回年次学術講演会講演概要集, 第1部, pp. 809~810, 1985年9月.
- 13) 石井 清: 確率手法による地震波の入力損失の検討, 清水建設研究所報34号, pp. 43~53, 1981.
- 14) 石井 清: 確率論手法による地震波の入力損失の効果の検討, 第16回地震工学研究発表会講演概要, pp. 317~320, 1981.
- 15) Matsushima, Y. : Spectra of spatially variant ground motions and associated transfer functions of soil foundation system, 第4回地震工学シンポジウム講演集, pp. 351~358, 1975.
- 16) 高田至郎・Wright, J. P. : ライフライン系解析のための相対地盤震動, 土木学会論文報告集, 第299号, pp. 13~21, 1980.
- 17) 川上英二・佐藤靖彦: 地盤の相対変位・ひずみの推定結果に及ぼす地震波形の変形の影響, 土木学会論文報告集, No. 337, 1983.
- 18) 塩谷正雄・岩谷祥美: 強風時における変動風速の水平方向の相関, 日本大学生産工学部報告, 第3巻, 第1号, pp. 117~129, 1970.
- 19) 岩谷祥美・塩谷正雄・黒羽罔夫: 大気乱流の風向に沿った方向の空間的性質について, 日本大学生産工学部報告, 第9巻, 第2号, pp. 121~126, 1976.
- 20) 木村晃・上総周平: 浅海域における不規則波のエネルギーの伝播特性, 第29回海岸工学講演論文集, pp. 51~54, 1982.

(1985年10月18日受付)