

動的荷重を受ける系の系定数同定法

SYSTEM PARAMETERS IDENTIFICATION OF A SYSTEM UNDER DYNAMIC LOADS

花田和史* 安藤幸治** 岩楯敏広*** 沢田義博****

By Kazufumi HANADA, Kohji ANDOH, Takahiro IWATATE and Yoshihiro SAWADA

Method has been developed to identify the system parameters of an actual structure under dynamic loads such as elastic moduli, masses and material damping coefficients. Proposed identification proceeds through the minimization of the criterion function which is composed of the observed responses, the model responses and a-priori knowledge of the parameters. The weight of the amount of knowledge to the response error is adjusted automatically according as the criterion value converges. Program to identify the parameters was examined extensively. Examples applying to numerical model and actual structure are shown. As a result, it was found that the methodology is numerically stable and is efficient to identify the system parameters.

1. はじめに

重要な土木・建築構造物が建設された際には、その耐震性を検証するとともに今後の類似構造物の耐震設計資料を得ることを目的として、地震観測や強制振動実験などの実証的検討が行われる。著者らは、これらの計測によって得られる構造系の共振曲線を最も良く表現しうる動特性（モード定数：固有値と固有ベクトルなど）を算定しうる手法を先に開発し¹⁾、実在する原子炉建屋の耐震性検証を行った²⁾。

本論文は上記の手法をさらに発展させ、動特性のみならず、対象とする系を構成する弾性定数や従来では推定の困難であった減衰係数の分布、構造物基礎の側壁・底面に作用する地盤との相互作用ばねなど（以下、系定数と略記する）を推定する手法について述べたものである。本手法の適用によって、①系の動特性把握、②設計入力に対する系の応答予測、③補強等による動特性の変化予測、④材料諸物性の把握、⑤モデルの妥当性検討、などの実験的検討の主たる目的解決に寄与することを目的としている。

モデル構造を設定して構成要素の特性値をパラメータとし、対象系の入出力関係を表現しうるようにパラメータの値を定めることを、系の同定と称する。パラメータを動特性とする同定手法は近年「実験によるモード解析法」として数多く検討されている^{3) 4)}。対象系の系定数をパラメータとして扱う手法は、次の2種

-
- | | | | |
|------|-----------|-----|---------------------------------------|
| * | 工修 主査研究員 | (働) | 電力中央研究所・土木研究所 (〒270-11 我孫子市我孫子1646番地) |
| ** | 理学 技術担当 | (働) | オメガプラン (〒151 東京都渋谷区代々木1-60-5) |
| *** | 工博 主任研究員 | (働) | 電力中央研究所・土木研究所 (〒270-11 我孫子市我孫子1646番地) |
| **** | 工修 耐震研究室長 | | 同 上 |

類に大別されよう。

その1は振動方程式（または固有方程式）の残差に着目する手法である⁵⁾。系定数を適切に選べば、大部分の系定数は線形方程式の係数として扱われる。したがって系の応答値から構成される係数行列を作成し、系定数を未知ベクトル、外力項を定数ベクトルとする連立方程式を解けば、系定数を同定しうる。この場合には線形最小二乗法を適用することが可能で、逐次近似を必要としないが、その係数行列には系定数に関わる全ての応答値を必要とする。そのため、曲げ棒の回転角などの計測に困難な系を対象としたり、有限要素法のように自由度の多い系で対象系を表現しようとする場合には、直接には本手法を適用できず、計測されていない応答をも併せて同定する手法を採らなければならない。ただし計測点数に等しい自由度を持つ系に対応する振動方程式を設定し、その係数行列要素を同定することは可能である⁴⁾。この場合には前述のように物理的な意味を有する系定数を定めるのは一般には困難であり、動特性の同定に準ずる目的に用いられよう。

その2は対象系の応答と事前に設定された先験系の応答との残差に着目する手法である⁶⁾。本手法では先験系の系定数の微小変化に伴う応答の変化（以下、感度係数と略記する）を算出し、残差を最小とするように系定数を逐次近似して先験系を修正する。応答に対して系定数は非線形に作用するために、非線形最小二乗法の適用を必要とするが、全自由度に対応する応答が計測されていない場合にも用いられる。太田は成層地盤の重複反射解析に本手法を用いて、等価せん断波速度とQ値の同定に成功している⁷⁾。対象系が特殊であるため一般の構造物に適用するためには感度係数の効率的な計算手法の開発と、後述する過剰適合に対処する必要がある。本論文で提案する手法は後者の種類に属する。

2. 振動方程式の解と感度係数

図1に示す系を想定し、同図の記号を用いる。

系Aの自由度をNとする。系Aに作用する力ベクトル f_A と系Bの変位ベクトル x_B を既知とする。このとき全系の振動方程式は次式で与えられる。

$$\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} M_A & M_C \\ M_C^T & M_B \end{pmatrix} + i\omega \begin{pmatrix} C_A & C_C \\ C_C^T & C_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_A & K_C \\ K_C^T & K_B \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_A \\ f_B \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここに i は虚数単位であり、 ω は角振動数、 x と f はそれぞれ変位・外力ベクトル、 $M \cdot C \cdot K$ は質量・減衰・剛性行列を表している。添字 $A \cdot B \cdot C$ は図1の系A、系Bおよび系A-系B間の連結要素を示している。また、肩のTは転置操作を、図中の n は系Aに接続された連結部の自由度数を表す。

対象とする系を系Aとし、(1)式の上式を次式で表す。

$$Z_A x_A = f, \quad f = f_A - Z_C x_B, \quad Z_i = -\omega^2 M_i + i\omega C_i + K_i \quad (2)$$

(2)式を対象とすることによって、系の多入力変位応答だけではなく、単一外力に対しても対象とする系を幾つかの部分系に分割して系定数を同定することが可能である。

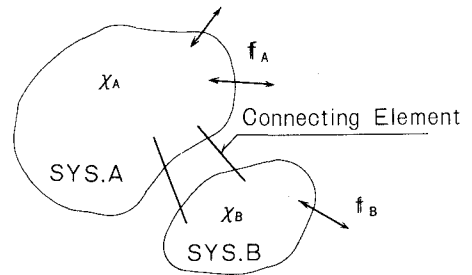
(2)式より解 x_A は次式で与えられる。

$$x_A = G_A f, \quad G_A Z_A = I^N \quad (3)$$

ここに I^N は $N \times N$ の単位行列である。

系Bを固定した場合の系Aの固有ベクトルよりなる行列を $U \in C^{N \times 2N}$ 、固有値からなる行列を $P \in C^{2N \times 2N}$ とする。

U は、 $U^T (2MUP + CU) = I^{2N}$ を満足するように正規



$$M_A, C_A \in R^{N \times N}, K_A \in C^{N \times N},$$

$$x_A, f_A \in C^{N \times 1}$$

$$M_C, C_C \in R^{N \times n}, K_C \in C^{N \times n},$$

$$x_B \in C^{n \times 1}$$

Fig.1 Notation and concept of system

化されているものとする。このとき (3) 式の伝達関数行列は次式で与えられる。

$$G_A = UDU^T \quad (4)$$

ここに、 $D \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ は対角行列であり、 j 行 j 列の要素は $D_{jj} = (s - p_j)^{-1}$ で与えられる。 p_j は j 次の固有値であり P の j 行 j 列要素である。

計測の対象とする系を対象系、対象系の挙動を表現しうると想定される数値モデルを先験系、先験系と同一構造を有しその系定数を修正された系を同定系と称しておく。先験系に関して (2) 式を作成することは可能でありこれをある系定数 k で微分して次式を得る。

$$Z_A X_A' = -(Z_A' X_A + Z_C' X_B) \quad (5)$$

ここに右肩の' は k に関する偏微分操作を表す。

上式の右辺は、先験系の応答 X_A と計測値 X_B および先験系の複素剛性行列 Z の微分値で構成され、既知の一般外力と見なしうる。したがって、上式は系 B を固定して一般外力を作用させると目的の感度係数が得られることを示している。

構造的に簡明な系を先験系に選ぶ場合には、次のようにモード定数感度を算定しておくで演算量を大巾に節減できる他、後述するように演算量を縮減し収束を速めうる場合がある⁶⁾。

系定数が Δk の変化をした場合には M, C, K, u_r, p_r はそれぞれ M_1, C_1, u_{r1}, p_{r1} の変化をする。ここに u_r は U の r 列ベクトルである。このとき、モード定数の変化は次式で表される。

$$U_{r1} = \sum_{s=1}^{2N} \varepsilon_{sr} u_s \quad s \neq r : \varepsilon_{sr} = \frac{1}{p_{sr} - p_r} U_s^T (p_r^2 M_1 + p_r C_1 + K_1) u_r \quad (6)$$

$$s = r : \varepsilon_{rr} = -\frac{1}{2} U_r^T (2 p_r M_1 + C_1) u_r$$

$$p_{r1} = -u_r^T (p_r^2 M_1 + p_r C_1 + K_1) u_r \quad (7)$$

(6) (7) 式を用いて G の変化量 G_1 は次式で表される。

$$G_1 = U D^2 P_1 U^T + U_1 D U^T + U D U_1^T, \quad U_1 = [u_{11}, u_{21}, \dots, u_{2N,1}] \quad (8)$$

$$P_1 = \text{diag} (p_{11}, p_{21}, \dots, p_{2N,1})$$

このような変動を受けた新しい系においても、一次微小項の範囲で固有ベクトルは所定の直交関係を保つ。

3. 最小二乗法

(1) 非線形最小二乗法

対象系の応答計測値を x_* 、先験系の応答を x_A 、 n 回の逐次近似で得られた同定系 ($n=0$ の場合は先験系) の応答を x_n ($n=0$ の場合は x_A) とする。同定系が対象系の挙動を表現する程度を評価するため両系の残差二乗和 E_n を考える。

$$E_n = v^T v, \quad v = \sigma^{-1} x (x_* - x_n), \quad v_n, x_n \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \sigma_x \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (9)$$

ここに、 m は計測点数・振動数総数の積に 2 (複素応答を実部と虚部とに分割) を乗じた値であり、 σ_x は計測値に関する標準偏差である。

($n+1$) 回目の同定系の系定数ベクトル k は k_n とその修正ベクトル Δk との和で表され、 E_{n+1} を最

小とする方向に選ばれる。非線形最小二乗法の理論⁸⁾に従えば、最確修正ベクトル $\Delta \mathbf{k}$ は次の正規方程式を満足する。

$$\mathbf{H} \hat{\Delta \mathbf{k}} = \mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{V}_n, \quad \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{l \times l}, \quad \mathbf{J} \in \mathbf{R}^{m \times l} \quad (10)$$

ここに、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{H}$ はそれぞれ $\mathbf{x}$ の一次微分行列と $\mathbf{E}$ の二次微分行列であり、 l は未知系定数の数である。

(10)式を解くために各種の手法が提案されている。これらの手法は $\mathbf{H}$ の扱い方によって分類される。多大の計算量を要するこの行列は、線形化法では $\mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-2} \mathbf{J}$ と見なされ、準Newton法では $\mathbf{J}$ の挙動から推定される⁹⁾。線形化法において $\mathbf{H}$ が特異となる場合を解決するためLevenberg⁹⁾は減衰法と呼ばれる次式、

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-2} \mathbf{J} + \lambda^{-2} \mathbf{I}^l \quad (11)$$

を用い、Fletcher¹⁰⁾は非線形性に応じて λ の値を操作する手法を提案している。本手法を現実に応用するには適切な λ の推定が不可欠である。

系定数の同定では、原理上設定された振動方程式の自由度と同じ数のモードが必要であり、一般の計測ではこの条件を満足できないことが多い⁴⁾。この解決に向けて実験・計測上の配慮を払う必要はあるが、本論では得られたデータを処理する立場から拘束条件を付加する方向で検討を進める。

(2) 評価関数

(11)式の右辺第2項は、計測値以外の情報を追加して、緩い拘束条件を附しているとも解釈しうる¹¹⁾。同式に対応する評価関数は次式で与えられる。

$$E = E_{n-1} + \lambda^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_n)^T (\mathbf{k} - \mathbf{k}_n) \quad (12)$$

ここに、 E_{n+1} は線形化法により得られる評価関数値であり、第2項は E_{n+1} のみでは発散傾向を持つ解に対し現在の解 $\mathbf{k}_n$ の付近で解を探索させる意味を持つ。

このような拘束条件は他に①計測値の追加、②系定数間の関係、③系定数の推定値、などが考えられる。減衰法における正規方程式

$$(\mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-2} \mathbf{J} + \sigma_{\mathbf{k}}^{-2}) \hat{\Delta \mathbf{k}} = \mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{V}_A \quad (13)$$

にブロック逆行列の公式を適用すれば次式を得る。

$$\hat{\Delta \mathbf{k}} = [\sigma_{\mathbf{k}}^{-2} - \sigma_{\mathbf{k}}^{-2} \mathbf{J}^T (\sigma_{\mathbf{x}}^{-2} + \mathbf{J} \sigma_{\mathbf{k}}^{-2} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{J} \sigma_{\mathbf{k}}^{-2}] \mathbf{J}^T \sigma_{\mathbf{x}}^{-1} \mathbf{V}_A \quad (13)'$$

(13)'式は制御理論におけるカルマン濾波の漸化式と同形式であり、非定常モデルに対して有効であることが知られている。また系定数の標準偏差 $\sigma_{\mathbf{k}}$ が先験値 $\mathbf{k}_A$ に関して与えられていれば、条件付確率推定より次の評価関数が得られる。

$$E = E_{n+1} + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_A)^T \sigma_{\mathbf{k}}^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_A) \quad (14)$$

(12)、(14)式に見られるように、拘束条件を含めた最小二乗法の評価関数は、

$$E = E_{n+1} + \lambda^{-2} F(\mathbf{f}) \quad (15)$$

の形で与えられる。ここに F は $\mathbf{f}$ の関数で正値をとり、 $\mathbf{f}$ は $\mathbf{f} \geq 0$ で表される拘束条件である。また λ^{-2} は拘束条件の E_{n+1} に対する重みである。

ここで、 E_{n+1} に含まれる $\sigma_{\mathbf{x}}$ 、 F の形、 λ^{-2} の値の定め方が重要である。

$\sigma_{\mathbf{x}}$ は計測値の確からしさを数値化するが同定系によって表現すべき応答の範囲を与えると解釈できる。

最小二乗法では、測定値の分散が既知でありモデルの近似誤差はないことが前提となっている。しかし、(9) 式の σ_x を予め定めることは困難であり、モデルはその構造を含めて同定過程の最終段階で初めて近似誤差を無視しうると言えよう。先験系の構造によっては対象系の応答を満足に表現できない場合がある。系の構造解析の目的から局所的なモードを無視するために主として生ずるこの誤差は通常の計測誤差の範囲を超えることが多い。このため先験系の構造から対象系挙動を最も良く表現しうる応答を同定系の応答の目標とし、計測値とこの応答との差異より σ_x を定める。目標とする応答を求めるには、先験系の応答計算を実施し、計測振動数範囲を含む近辺に存在する先験系のモードの数を定める。次いで、先験系のモード定数を初期値とする伝達関数のモード分解¹⁾を行う。同定されたモード定数を持つ系の応答が、同定系の目標とする応答である。同定されたモード定数と先験系のモード定数が大きく異なるならば先験系を再設定する必要がある。

次いで λ^2 の大きさを定めるために先験系の同定能力を検討する。

(14) 式の評価関数に対応する観測方程式を次式で表しておく。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \lambda \mathbf{I}^L \end{bmatrix} \Delta \mathbf{h} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times l}, \quad \mathbf{h} \in \mathbf{R}^{l \times 1}, \quad \mathbf{O} \in \mathbf{O}^{l \times 1}, \quad \mathbf{A} = \sigma_k^{-1} \mathbf{J}_n \sigma_k \\ &\Delta \mathbf{h} = \sigma_k^{-1} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_A), \quad \mathbf{b} = \sigma_k^{-1} \{ \mathbf{X}_* - \mathbf{X}_A + \mathbf{J}_n (\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_A) \} \end{aligned} \quad (16)$$

先験系から得られる $\mathbf{A}$ に対して

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T, \quad \mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}, \quad \mathbf{S} \in \mathbf{R}^{l \times l}, \quad \mathbf{O} \in \mathbf{O}^{(m-l) \times l}, \quad \mathbf{V} \in \mathbf{R}^{l \times l} \quad (17)$$

の形に分解する特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposition) 法¹²⁾ を適用する。(17) 式中の各行列は、 $m > l$ として次の固有方程式を満足する。

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{S}^2, \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{U} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}^2, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}^m, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}^l \quad (18)$$

また、対角行列 $\mathbf{S}$ の要素 S_r は大きい順に並べられており、 $\mathbf{A}$ の階数が R ($\leq l$) である場合には、 $S_{R+1} = S_{R+2} = \dots = S_l = 0$ である。

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} [\mathbf{S}^+, \mathbf{O}] \mathbf{U}^T \quad (19)$$

は一般逆行列のうちの Moore-Penrose の逆行列 (以下、擬似逆行列と略記する) を示す一つの表現¹²⁾ である。ただし $\mathbf{S}^+$ は対角行列でありその要素は $\mathbf{S}$ の要素の逆数であって、 S_{R+1} 以降の $\mathbf{O}$ に対応する要素は $\mathbf{O}$ とする。擬似逆行列を用いて得られる最小二乗解のノルムは、他の一般逆行列を用いて得られる最小二乗解のノルムより大きくなることはない¹²⁾。

(16) 式の正規方程式

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I}) \hat{\Delta \mathbf{h}} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (20)$$

に、(17) 式を代入して次の最確値表示を得る。

$$\hat{\Delta \mathbf{h}} = \mathbf{V} \Delta \mathbf{p} \quad (21) \quad \Delta \mathbf{p} = (\mathbf{S}^2 + \lambda^2 \mathbf{I})^+ \mathbf{S} \mathbf{g} \quad (22) \quad \mathbf{g} = \mathbf{U}^T \mathbf{b} \quad (23)$$

したがって、(17) 式の SVD により得られる $\mathbf{U}$ を作用して予め直交化残差 $\mathbf{g}$ を求めておけば、直交解 $\Delta \mathbf{p}$ は個別に得られ、次いで $\mathbf{V}$ を左から乗じれば求める最確値 $\hat{\Delta \mathbf{h}}$ に変換される。

$\mathbf{A}$ の SVD 形のうち、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{S}$ および $\mathbf{g}$ を陽に記憶していれば、(21) 式により任意の λ に対応する最確値 $\hat{\Delta \mathbf{h}}$ を得ることができるとともに、全く同様にして λ に対応する解のノルム $\|\hat{\Delta \mathbf{h}}\|^2$ 、残差二乗和 $\mathbf{E}$ 、

E_{n+1} を得ることができる。

(22) 式右辺の g に作用する係数行列は対角であり、

$$S_{j\lambda}^+ = \frac{S_j}{S_j^2 + \lambda^2} \quad (24)$$

をその $j-j$ 要素としている。(24) 式より、 λ が S_j に比して充分に大きければ $S_{j\lambda}^+$ は 0 であり、 λ が S_j に比して充分に小さければ $S_{j\lambda}^+ = S_j^{-1}$ と表される。したがって λ を定めることは λ にほぼ等しい特異値 S_R を定め A の階数を R と決定することとほぼ等価である。このため次式が成立する¹²⁾。

$$\Delta h \cong V(S^+, 0)g \quad (25)$$

先験系に対する以上の予備検討により、次の重要な情報を得ることができる。①階数 R を設定すれば、対応する特異値が得られ、線形的最確値が得られる。線形最確値が予め想定した σ_k を超せば、先験系は R を超す同定能力を持っていないと判断される。②(23) 式の g は各次の直交残差であり、この内積は (9) 式の E_n に等しい。 R を超す各次の g の値が 1 より小さければ、先験系とその計測精度は R を超す同定能力を持っていないと判断される。今迄の例では①で得られる R の方が小さいことが多い。

このようにして R が定まれば S_R ($\cong \lambda$) が求まり、評価関数 (15) 式の重みが決定される。先ず目標とする E の最小値は S_R^2 以下である。特異値 S_j は計測量に依存しない系固有の値である。したがって先験系と同定系の特異値はあまり大きく変化しないが、最終段階で再度同様の計算を実施しておくことが好ましい。

R を逐次上げ (λ を減少し)、解の発散する直前で中止する手法は有効であるが効率的ではない。発散していないと判断しうる範囲を例えば $f(k_j) = d_j^2 - (k_j^2 - k_{Aj})^2 \geq 0$ という拘束条件として扱い、上式を満たす範囲内で E_{n+1} を最小とすることが考えられる。

Carroll¹³⁾ は、 E_{n+1} を $f \geq 0$ のもとで最小とするには (15) 式の $\lambda \rightarrow 0$ の極限値を求めれば良いことを示した。ここに、 F は f を満たす全ての点で定義され、有界であること、1 つの j について $f \rightarrow 0$ となるとき $F \rightarrow \infty$ となることの 2 点の性質を満たし、 λ^2 は正値をとり単調に減少する。 F には次のような形が考えられる。

$$F_1 = \sum_j f_j^{-1}(k_j) \quad (26)_1 \quad F_2 = \sum_j \left(\frac{k_j - k_{Aj}}{d_j} \right)^{2N} \quad (N \gg 1) \quad (26)_2$$

これらは厳密には $f \geq 0$ の不等式を満足していないが、 λ^2 を小さく採ることによって十分に境界に近づき、第 2 式では先験的に定める範囲のあいまいさを許容でき、かつ $N=1$ の場合には (14) 式と同一であり評価関数は連続している。いずれも収束によって λ^2 を変更していく過程を採る。 λ^2 の変更は前述の特異値を参考にし、かつ (26)₂ 式を採る場合には前段の E_n 値より小さくしないように設定すれば、条件式を壊すことなく収束が行われる。

(15) 式に代表される評価関数の最小化には、一般に公表されている準 Newton 法¹⁾を用いる。著者らは Fletcher¹⁴⁾ 法による最急降下法と Davidon¹⁵⁾ による緩い直線探索法を併用する手法を用いているが、Biggs による手法を田辺がプログラム化した NOLLS¹⁶⁾ なども公表されている。

4. 同定の実行と適用例

(1) プログラムの構造と機能

前説までの手法に基づき、先験系の逐次修正を繰り返して系定数の同定を図るプログラム群 SPIN (System Parameters Identification by Newton method) を作成した。SPIN は強制振動実験や地震観測結果との関連を密接に持つため、データ集録・その補正、伝達関数の作成、モード定数同定、数値模擬の各数値処理を内蔵し、これらは共通のデータ構造を有している。SPIN のうち本論文の内容と直接に関係

する部分の構造を図2に示す。

図中のモード定数同定法には、非比例型減衰係数を有する複素モードを持つ系を直接偏分法により同定する手法を採用している¹⁾。これにより得られるモード定数はモデルの構造・範囲に依存しておらず、共振曲線の形状と大きさより定められる。したがって得られた値は系定数同定の対象とする系を含む全系の特性である。これに比して本論文で対象とする系は工学的判断と設計時の必要に基づいて一部の系を切り出して閉じている系として扱うために、対象系には種々の換算外力が作用していることが多い。モデル構造の範囲と結果の検討を行い、かつモデル化限界による測定誤差 σ_x を定めるため、モード定数同定を行う必要がある。

図中の方程式残差法は、モデル構造の全自由度を計測点数に等しいと設定した場合の、振動方程式係数行列の全要素を線形最小二乗法により算定する。本結果により固定境界との接続ばねを推定し、先験系の系定数を定めることができる。とくに地盤ばねより構造物剛性の方が推定精度が良いことが多いため、地盤ばねの初期値を求めるのに有効である。

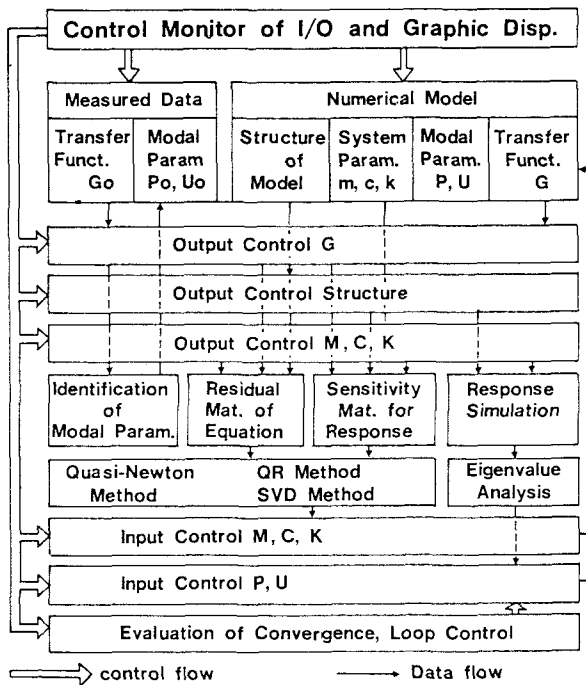


Fig.2 Structure of program "SPIN"

(2) 同定の実行

a) 先験系のモデル構造を設定する。構造は主として設計上の必要から定められ、その系定数 k_A は他の実験や調査結果、方程式残差法結果を参考にして定める。

b) 先験系のモード解析結果より対象振動数範囲に存在するモード数を選び、対象系挙動のモード分解を行う。分解の結果として得られるベクトル形状やモードを再合成して得られる挙動から、先験系のモデルの範囲やその構造および対象振動数範囲を決定する。

c) 対象系挙動と先験系挙動とより、(9)式の σ_x を定める。また、目的とする系定数の σ_k を決定する。 σ_k は単にEの第2項を定めるのみではなく、弾性係数から減衰定数までの幅広い値を規準化し(16)式のAの値を整えるため数値計算上の利点が多い。

d) 系定数間に明らかな関係を考慮する。等しいと見なしうる場合は感度係数を単純に合成して同一の系定数を括り出す(強制拘束)。緩い条件式を(26)₂式に準じて設定する。

f) (15)式の評価関数と(26)₂式に基づき、系定数を定められた範囲内に留めるために $\lambda^2 = E_n$ と

して E_{n+1} を最小にする。この変更は一定 λ^2 に関してある程度の収束が見られる毎に行えば良い。

g) 同定値, 同定系の応答を検討し, 必要であれば $a \sim e$ の任意の段階に戻って再実行する。 k_A , σ_x および (26) $_2$ 式の d_j が主たる変更の対象であるが, 系の構造を再検討する場合もある。

(3) 数値計算例

SPINによる系定数同定の過程と結果の例を以下に示す。ここでは手法の検討が目的であるので, 線形構造系を加振した場合の数値模擬を行い, この系の同定を行った。なお, 本手法は実在する構造物の起振実験¹⁸⁾ や地震観測¹⁷⁾ の結果にも適用されているので, この一部を例示する。

a) 2質点系: 本例では簡単な系に対し各種評価関数を用いてその性能を見る。対象とする系は図3に示す2質点系であり, 図の M_1 に加振力を加え, M_2 の共振曲線(絶対値のみ)が0.5 Hzより 0.5Hz間隔で10Hzまで正確に得られていると仮定する。

対象系と先験系の系定数, および25回の逐次近似によって得られた各種評価関数 E に対応する同定系の系定数を表1に, 各系の E の収束状況を図4に, また代表的な同定系の応答を対象系と先験系の応答と比較して図5に示している。

系定数同定では質量とバネ定数による応答補正は同一方向に作用するため, 同定が困難となる場合がある。同定1では質量が増大してバネ定数が破壊され, C_1 が負となっている。しかし, 図5に示しているように同定系1の応答は対象系の応答を良く表現している。一方, 同定2のように質量に真値を与えれば同定1と同一の評価関数を用いても正確な系定数が得られる。一般に質量の推定精度は高いので, 質量の標準偏差を小さく設定することが好ましい。同定1の同定値は, かなり振動しつつ収束値に向かうが, 同定1の E に減衰項を付加した同定3では振動が小さくやや早めに同定1の結果に収束し, 以降は若干の変化が見られる程度である。ただし評価関数の物理的内容は同定1と同じため得られた同定値も同定1と類似である。

一方, 条件付確率推定から誘導される

(14) 式の形によって, 系定数を先験系の値近辺に拘束すれば, 同定4のように望ましい系定数を同定しうる。本例の場合には同定3の評価関数値よりも小さい値で収束しているが, 一般には同定3より大きいことが多い。しかし同定値はこの例に見られるように発散することは少ない。同定5は同定4の場合と同一であるが, 予め得られていると仮定した標準偏差で規準化して同定した結果である。同定4と同程度の値が得られているが収束は速い。因みに同定5の評価関数 E_1' のみを用いた場合には, 同定1, 3と同様の結果が得られている。

同定6は本論で提案する手法であり, 後述するSVD結果をもとに評価関数第2項の係数を30と定め, 同定5と全く同様に10回の逐次近似の後 (26) $_2$ 式によ

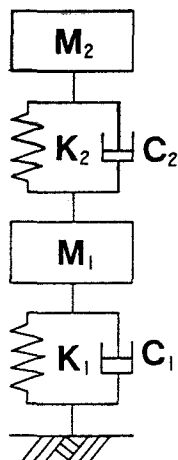


Fig.3 2 dof system

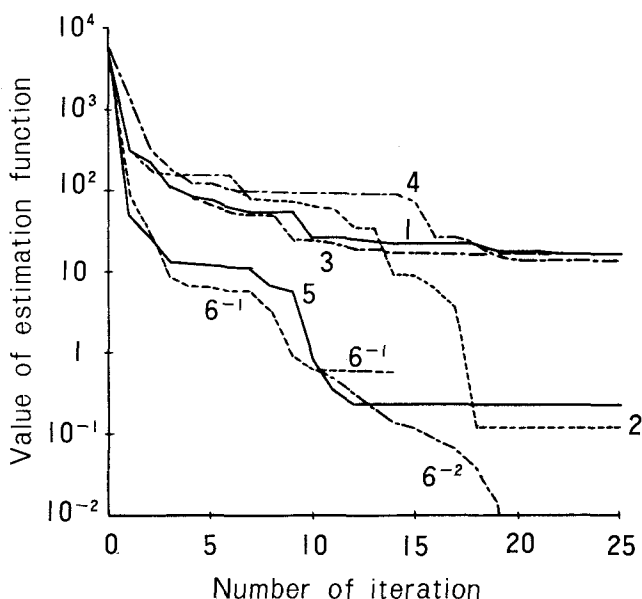


Fig.4 Convergence behavior of E Value

Table 1 System parameters of each identified system

		M ₁ g	C ₁	K ₁	M ₂ g	C ₂	K ₂	E	
		kN	kN s/m	kN/m	kN	kN s/m	kN/m	Value	Comp.
Obj.		50	30	3000	50	30	2000	—	—
A-Priori		45	15	4000	45	10	3000	6258	—
Con- dition	σ _k	5	15	1000	5	20	1000		
	D _k	8	20	2000	8	25	2000		
I D E N T I F I C A T I O N	1	66.8	-86.2	3461	78.1	99.5	3009	16.2	E ₁
	2	—	28.1	3003	—	31.0	1988	0.11	E ₁ (M:TRUE)
	3	67.7	-75.6	3049	62.7	78.2	3024	16.0	E ₁ +E ₂
	4	55.8	37.6	2896	52.2	31.5	2489	15.1	E ₁ +E ₃
	5	44.5	31.9	2986	45.6	24.7	1620	0.24	E ₁ +E ₃
	-1	45.0	30.5	2996	45.1	25.6	1591	0.68	E ₁ +λ ₁ ² E ₃
6	-2	50.0	30.0	3000	50.0	30.0	2000	3×10 ⁻⁸	E ₁ +λ ₁ ² E ₃

g=9.8 m/s²

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \|J \Delta k - b\|^2, & E_2 &= \|\sigma_k^{-1} (k - k_a)\|^2 \\
 E'_1 &= \|J \sigma_k \sigma_k^{-1} \Delta k - b\|^2, & E_3 &= \|\sigma_k^{-1} (k - k_a)\|^2 \\
 E_4 &= \|D_k^{-1} (k - k_a)\|^2, & \lambda_1^2 &= 30, \lambda_2^2 = 0.7
 \end{aligned}$$

って収束を図ったものである。表1、図4より第1段階に関しては、最終Eは同定5より大きいが、収束の速度は速い。第2段階では系定数は真値に達している。本例では $\lambda_2 = 0$ とおいてもほぼ同じ経路で真値に至り、第1段階で真値の直近に達していることを示している。

以下の例では同定6の手法を採っている。

図6に先験系よりSVD法によって推定した評価関数 E_L と解ノルムの挙動を λ をパラメータと示している。同図には、 λ による解に対応する系が同定された場合の評価関数 E_N と、先験系の特異値 S_j より(26)式によって得られるEとノルムを併せて示している。これより σ_k の値が適切であれば、解ノルムを条件式の個数程度に抑える範囲までの E_L と E_N の値はよく似ていることが判る。対応する λ の値は(15)式に示した2項の平衡を保っていると言えよう。例えば、同一の先験系であっても計測点mが多ければ E_N は大きくなり相対的に拘束条件は過小に見積られ同定1や3のように発散し易い。図6より得られる系を新たに先験系と設定することも可能である。

b) 多質点系：対象とする系は連続体であり無限の自由度を持っている。しかし先験系の自由度は極めて少なくかつモデル化範囲は限定されており、また計測値には計測系が発生する雑音に加わり計測可能な振動数範囲は先験系の最高次モードの振動数に比して極端に低い域にある。このような条件を考慮して図7(a)

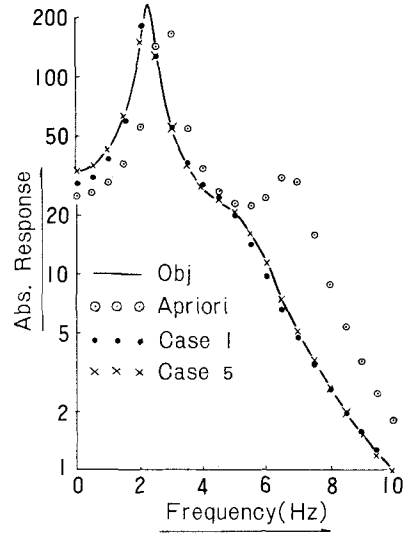


Fig.5 Response curve of each system

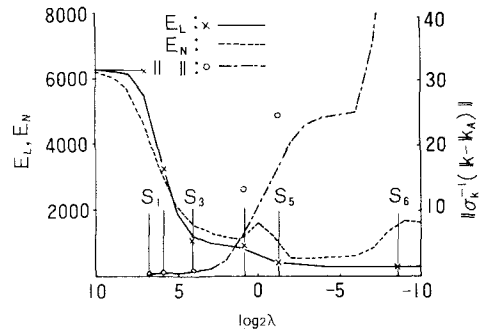


Fig.6 E value, norm of solution versus λ (S_j)

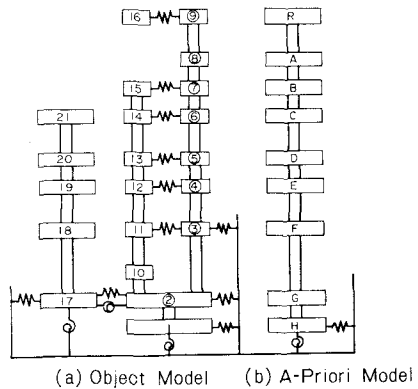


Fig.7 Structure of object and a-priori system

に示す対象系と同(b) に示す先験系を設定する。先験系は同一の基礎を持つ2本のビームを表現している。

起振力是对象系の質点15に加えられ、応答は図中に示す8点で計測されているとする。ただし質点2では水平方向応答に加えて回転角も計測されていると仮定する。計測振動数範囲は1~20Hzで、その刻みは0.2Hzとし、その応答に白色雑音を加えた値を計測データとして用いた。雑音の標準偏差は模擬計算値の1/10とし、応答の実部虚部にそれぞれ加算した。対象系の共振曲線例を図8に示す。

先験系には設計モデルを若干修正して採用することが多い。設計モデルでは、強震時応答を配慮して構造物の雑断面を考慮に入れず、震度法(静的加力)により安全側に予測しようとする断面の換算弾性係数は低く見積られる傾向がある。そこで本例では系定数の収束半径を検計する目的もあるため、先験系の弾性係数を対象系のその1/2程度とした。本先験系では対象系の2本のビームの相対振動(15.6Hz以上で顕著となる)や隣接建屋(6.5 Hz固有振動数)の振動を模擬することはできない。

同定にあたっては同定系を構成するバネ(並列した速度比例型の減衰付)とビームの2種の弾性定数(当該部材剛性に比例する複素型減衰付)を同定すべき系定数とした。

先験系の質点Gは目的系の質点2に相当し、質点2の挙動は水平・回転方向とも計測されているため、質点Gより上部の構造は質点G以下の構造と切離して同定しうる。前例同定6の手法によって上部構造物の同定後、下部の同定を行った。

同定された系の共振曲線を図8に併せて示す。1次振動は良好に表現されているが8 Hzを超えると本先験系構造では満足な応答が得られない。しかし、位相曲線は2本のビームの相対振動が始まる14 Hzまでよく合致し、応答の方向は良好と言えよう。両系の1次固有値は、対象系の5.6 Hz ($\zeta_1 = 5.6\%$) に対し同定系では5.8 Hz ($\zeta_1 = 11.5\%$) が得られた。同定系の固有減衰定数が大きくなったのは、隣接建屋の振動を併せて評価したためと考えられる。

得られた同定系の系定数に関して、ビームの剛性は対象系の2本のビームの剛性の和にはほぼ等しく、相互作用ばねも対象系のばねの総和に近いものであった。また、ビームの減衰定数や逸散減衰係数も妥当な値であった。しかし、両系の構造が異なるため、対象系と同定系の系定数間に若干の差異は当然に発生する。例

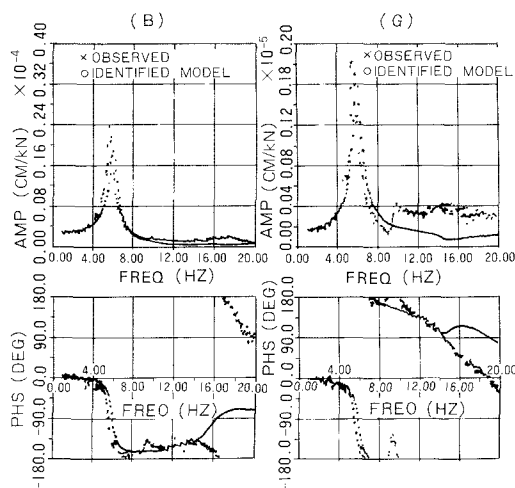
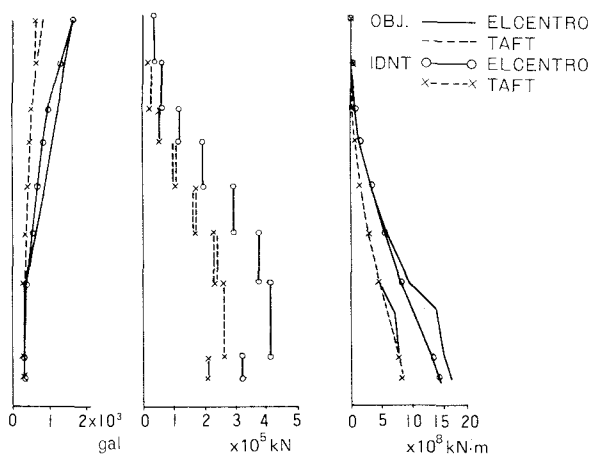


Fig.8 Response curves of identified system compared with one of object system



(a) MAX ACC (b) MAX SHEAR (c) MAX MOMENT
Fig.9

Maximum Response of the system during earthquakes

えば同定系F-G間のビーム剛性は対象系の質点3に作用する地盤ばねや質点10の挙動の影響を受けるため、対象系のビーム剛性を単純に加えて同定すべき値であるとは言えない。モデル化の妥当性と、同定過程に過剰適合が発生せずに妥当な同定値を得たことを併せて判定するためには、同定に供した実験とは全く異なる外力を両系に加え、両系の応答を比較すれば良いと考えられる。このため、両系にエルセントロN S (1942) とタフトEW (1952) を入力してその応答を調べた。

両波の最大加速度はともに300galとしている。同定系の変位応答と系定数精度を同時に示す量として図9に両系の最大加速度、最大層せん力、最大曲げモーメントを示す。ただし対象系の力に関しては同一高さの2本のビーム力を加え、加速度に関しては大きい方の値を採った。対象系と同定系の応答は比較的合っており、同定が良好に行われた

ことを示している。対象系の応答が同定系の応答を若干超えているが、これは対象系の2本のビームで最大応答の発生時間が異なるものも単純に加算したことと、同定系の1本のビームが両ビームの平均的な挙動を行っているためである。また、同定系では質点10がなく、対象系には他の系と接続されるバネがあり、系の下部で応答の違いがあるのはこれらの力が無視されている点が大きいの

以上の結果から、工学的な考察の下に適切な先験系構造が得られる場合には本手法は実用に供しうると判断した。

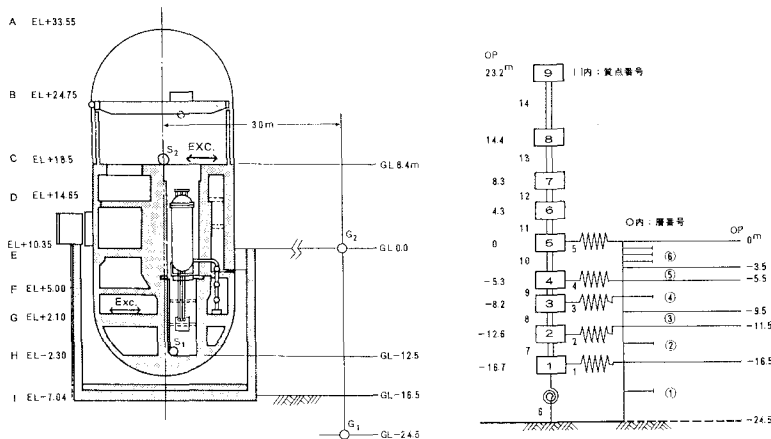


Fig.10 "JFDR" and its a-priori system

c) 実在構造物：J P D R（動力試験炉）は日本原子力研究所が保有し、図10（a）に示すように軟岩を基礎岩盤とし砂と砂礫による深い埋込部を有している。格納容器は鋼板製全溶接構造で、全高約40m、内径15.3mであり、地上部の高さは22.9mで円筒部分と半球部の頭部から成っている。基礎構造は直径20mの鉄筋コンクリート造円筒形ケーソンを外壁とし、その底版は鉄筋コンクリートマットスラブ製である。ケーソンと格納容器鋼板との空間を埋めるために無筋コンクリートが充填されている。

本構造物を対象としてOP 8.4m床とOP - 8.2m床の2箇所からの起振実験（同時起振ではなく、同定値検証のために別個の外力行われた検証実験を含む）と、地盤-構造物の地震観測を実施した^{17)~19)}。J P D Rを対象系とし、図10（b）に示すモデルを先験系構造として同定を行った。同定の系定数は前例b) 多質点系に準じている。

OP - 8.2m床を起振した際の対象系の代表的な測点の共振曲線を図11に示し、併せて対応する質点の同

定系の共振曲線を示している。同図より両系の応答は良く一致していると言えよう。対象系のモード定数はモード分解法により $f_1 = 6.8\text{Hz}$, $\zeta_1 = 26\%$, $f_2 = 24.0\text{Hz}$, $\zeta_2 = 7.5\%$ が得られ、同定系のそれは $\zeta_1 = 27\%$, $\zeta_2 = 7.7\%$ で振動数は全く一致した。このことは先験系構造が対象系に適していたことを併せて示している。

同定値に関して、シェル部を除くコンクリート部ビームの剛性には先験値よりほとんど変化はなかった。本構造物の該当部分が極めて剛であり、実験範囲内の挙動にビーム剛性が感度を持っていない理由によると判断される。ただし図11の同定系応答（前記のようにモード分解法の結果とほと

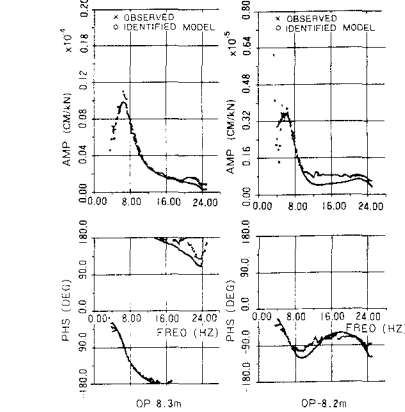


Fig.11 Response curves of identified system compared with observed ones

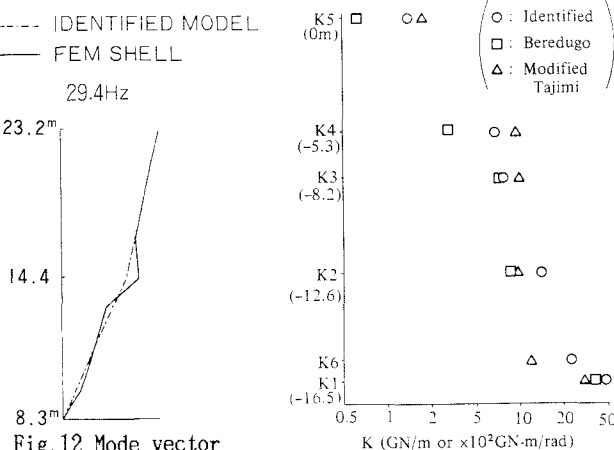


Fig.12 Mode vector of shell part

Fig.13 Identified spring constants compared with theory values

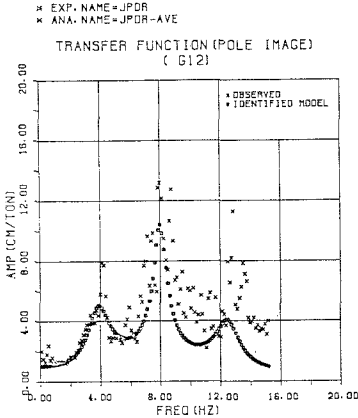


Fig.14 Observed and calculated transfer function during earthquake (Ground Surface)

んど一致しているため、図10（b）の構造が表現しうる最良の応答と見なしうる）と計測値との差異程度の挙動差を σ_x として予め与えている。

一般にシェル構造のビームモデル化には困難が多い。対象系のOP 8.3mより上部は全溶接の円筒・半球部より成っているため、肉厚、弾性定数とも建設

資料の値を採り、OP 8.3mを固定したFEM解析を行った。一方同定系の質点7を固定した場合のモード解析を行い、両者を比較すると図12に示すように良く一致する。

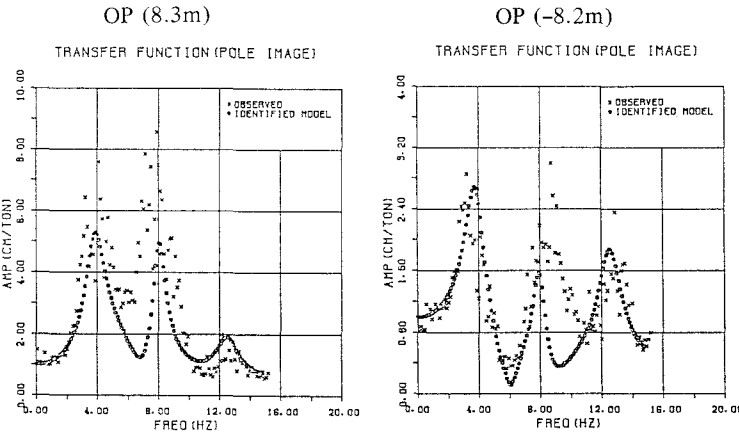


Fig.15 Response of "JPDR" during earthquakes

また同定された相互作用ばねについて、Beredugo²⁰⁾，修正された田治見²¹⁾の弾性理論に基づく埋戻し部のばねを後述する地盤物性と基礎形状をもとに算定し、これらを比較した。結果の一部を図13に示すように、それぞれのばね値はほぼ同様の値を持っていると言えよう。

地震観測（82年6月～9月）ではM 7.0を含む良好な6記録が得られ、基盤の最大記録は約 29gal、目的系のOP 8.3mで100galを超えるものがあった。これらを基盤振動を基準に平均し、地盤部に関しては別途地盤モデルを同定した。平均観測値と同定系の地表応答を図14に示している。本同定では、観測値が自然地震の平均応答であるため、人工外力の応答とは異なり、観測値には図14に見られるようにバラツキが大きい。このため、モード分解法応答と観測値との差異を包含するように σ_x を定めた。この結果同定系はバラツキの大きい8 Hz以上の挙動を正確には模擬しえていないが、全体的な挙動特性を表現できていると言えよう。図10（b）に示す①～⑥地盤各層の同定値に関しては、せん断波速度は先験値である板叩き法によるVs検層結果とはほぼ同じ値（0.75～1.2倍）を保持した。また、第2層（砂礫層）を除く各層のQ値は11～30であり、妥当と言えるが、第2層のQ値のみ2程度となり極めて小さい値を示した。本地盤における重複反射機構が成立する程度や平均応答算定法など今後検討すべき課題はあるが、ここでは実測値を表現しうる等価値として採用しておく。

次いで、先に得られた構造部の同定系と地盤部の同定系を、構造部の同定時に得られた相互作用バネで結合し、基盤部を加振する地震応答解析を行った。地盤部と同様にして実施した観測値の平均共振曲線と解析結果とを比較して図15に示す。対象系の2点で観測された地震応答を同定系は良く表現し、得られた構造物－相互作用バネの同定が妥当であることを示している。

5. 結 語

強制振動実験や地震観測から得られるデータを用いた最適モデルの作成手法について報告した。静的荷重下の挙動に関しては、逆解析の一種として（14）式を用いた報告²²⁾が既にあるが、ここでは動的問題に絞り評価関数を選択し収束に応じて変更することを提案している。本手法はデータ処理の一環であるため現実のデータへの適用性が問題である。先験系の減衰機構の設定が成否を左右する例が多くあり、大型構造物や水平成層地盤では、部材減衰には複素剛性虚部による履歴減衰型、逸散減衰には速度比例の内部粘性型を採用すれば良い例が比較的多いことを付記しておく。

土木・建築構造物では（10）式の $m \times \ell$ のヤコビアンは $m > \ell$ であるが、その階数Rは ℓ より小さいことが多い。収束した同定系のSVDによる λ を検計すると明らかであるが、設計に必要な情報を抽出するためにも先験的知識をもとに共通な系定数を括り出す強制拘束はほとんどの場合に必要であり、緩い拘束は不可欠と言えよう。

拘束条件と評価関数に関して東京大学伊理正夫教授に御教示頂きました。また、機械学会モード解析分科会（主査・東京大学佐藤寿芳教授）の委員諸氏にはモード解析全般を御紹介頂き、一部委員の方には本手法による機械構造の同定を実施して頂き貴重な助言を頂きました。日本原子力研究所の江連秀夫氏には共同でJ P D R動特性の検討を行って頂きました。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 花田和史，上島照幸：強制振動実験のデータ分析手法，電力中央研究所報告No.377024，1978
- 2) 花田和史，堤 一，上島照幸，加藤宗明：東海第二発電所原子炉建屋起振実験（その2）モード解析とその結果，第5回日本地震工学シンポジウム，pp.1457～1464，1978
- 3) 大久保信行：機械のモーダル・アナリシス，中央大学出版部，1982
- 4) 長松昭男：モード解析，培風館，1985

- 5) Leuridan J. : Direct System Parameter Identification of Mechanical Structures with Application to Model Analysis, Modal Analysis Seminar at KUL, 1981
- 6) 花田和史：強制振動実験のデータ分析手法（その2），電力中央研究所報告No.383045, 1984
- 7) 太田裕：八戸市臨時地震観測点の地下構造・1968年十勝沖地震における八戸港湾の地震記録と地盤特性，構造物災害に対する地震動特性の研究報告（代表・大沢畔），1972
- 8) 田辺国土：最小自乗法のアルゴリズム，応用統計学，Vol.9, 1981
- 9) Levenberg, L. : A Method for the Solution of Certain Nonlinear Problems in Least Squares, Quart. Appl. Math. Vol. 2, 1944
- 10) Fletcher, R. : A Modified Marquardt Sub-routine for Nonlinear Least Squares, Harwell Rep. AE-RE-R. 6799, 1971
- 11) 中川徹，小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版，1982
- 12) Lawson, C. L. : Solving Least Squares Problems, Prentice-Hall, 1974
- 13) Carroll, C. W. : The Created Response Surface Technique for Optimizing Nonlinear, Restrained Systems, Operation Res., Vol. 9, 1961
- 14) Fletcher, R. and Powell, M. J. D., : A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, Comp. J., Vol. 9, 1963
- 15) Davidon, W. C. : Variable Metric Method for Minimization, A. E. C. R. ANL 5990, 1959
- 16) Tanabe, k. and Ueda, S., : NOLLS 1, A Fortran Sub-routine for Nonlinear Least Squares by a Quasi-Newton Method, Computer Science Monographs, 1981
- 17) 沢田義博，花田和史，矢島浩，岩楯敬広，松井家孝：J P D Rを対象とした構造物－地盤系の動特性（3）地震観測に基づく動特性の検討，電力中央研究所報告No.383029, 1983
- 18) 岩楯敬広，花田和史，沢田義博，西好一，吉田保夫，松井家孝：同題（4）起振実験に基づく動特性の検討，電力中央研究所報告No.383048, 1984
- 19) 花田和史，沢田義博，岩楯敬広，矢島浩，松井家孝：同題（5）構造物－地盤系挙動の数値模擬，電力中央研究所報告No.384023, 1985
- 20) Beredugo, Y. O. and Novak, M., : Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 9, 1972
- 21) 花田和史，沢田義博，江刺靖行，上島照幸，中村秀治：軟質地盤上の大型基礎の動的挙動に関する実証研究（1）起振時における基礎の起振特性，電力中央研究所報告No.383522, 1983
- 22) Gioda, G. : Some remarks on back analysis and characterization problems in geomechanics, Numerical Methods in Geomechanics, 1985

(1985年10月18日受付)