

個別要素法で用いる要素定数の決め方について

HOW TO DETERMINE MECHANICAL PROPERTIES FOR DISTINCT ELEMENT METHOD

大町達夫* 荒井靖博**

BY Tatsuo Ohmachi and Yasuhiro Arai

The distinct element method proposed by Cundall has proved its potential adaptability for dynamic analysis on cracky rock mass or granular materials. But there remains very important points still unclarified. Among them, the point which requires an utmost urgent solution is how to determine mechanical properties of an element. With this respect, this paper presents a procedure to determine coefficients of an elastic spring and a viscous dash pot. When two distinct elements are in contact, they constitute a vibration system in principle. On this basis, the procedure is formulated in terms of natural period of vibration and energy loss during their contact.

1. はじめに

亀裂の多い岩盤の挙動を解析するための手法として¹⁾Cundall が提案した、個別要素法の基本的な考え方は新しいものではない。この手法が近年多くの注目を浴びるようになった理由としては次の2つが挙げられる。まず本手法を適用する上で不可欠な高速大容量の計算機やグラフィックターミナルなどの周辺設備を誰もが容易に使用できる環境が整備されてきたことがある。この手法では個々の要素の運動方程式を逐次、個別に解いて全要素の状態を定めるため、多大の計算量を必要とすることが欠点とされてきたが、近年における計算機類の飛躍的な進歩によって、この欠点はかなり薄められつつあるといえる。一方、有限要素法の発達により連続体の力学問題は、従来解くことが不可能と思われていた複雑な形状や物性に対しても容易に解が求まるレベルに達したが、不連続な物体たとえば岩塊や粒状体などの集合体の正確な挙動は、現在の有限要素法でも扱い難いと考えられている。

このような背景のもとで最近、個別要素法ないしそれを改変した手法を用いて多くの解析がなされるようになり²⁾、その有用性が認められつつある。著者らも、地震動による墓石の転倒現象のシミュレーション

* 工博 東京工業大学助教授 総合理工学研究科 (横浜市緑区長津田町 4259)

** 学 東京工業大学 総合理工学研究科 修士 (同 上)

解析³⁾や石造アーチ橋の振動破壊状況の解析に本手法を適用してみたが⁴⁾、その結果、この手法は多くの可能性を有する方法ではあるものの基本部分に残されている未解決の重要問題の解明が最も緊要であることが判明した。本手法では近似的に個々の要素は剛体とみなし、要素が互いに接触する場合には、仮想的なバネやダッシュボット、スライダーなどを介して隣接要素間に力が伝達されるものと考え運動方程式をたてる。しかし、これらのバネやダッシュボットの特性をいかに定めればよいかについては、未だ明確な指針が得られていない。亀裂性岩盤や粒状体群の力学的挙動をシミュレーション解析し、実物と対比する際には、この点をまず明らかにしておく必要がある。本論文は、この点に関する基礎的な考察を行ない、接触点に用いる弾性バネとダッシュボットの特性を定める方法を提示するものである。

2. 個別要素法の概要

個別要素法では、接触点の力の伝達を図：1のようにモデル化している。このようなモデル化を行なうことによって、接触点の任意の時刻における局所座標の法線方向、接線方向に働く力は、各方向の相対変位を $\Delta u_n, \Delta u_s$ とすれば、次のようになる。

$$\text{法線方向 } F_n = K_n \cdot \Delta U_n + C_n \cdot \Delta \dot{U}_n$$

$$\begin{aligned} \text{接線方向 } F_s &= K_s \cdot \Delta U_s + C_s \cdot \Delta \dot{U}_s, & (\text{非滑動時}) \\ &= \mu \cdot F_n, & (\text{滑動時}) \end{aligned}$$

K_n, K_s : 弾性バネ定数 C_n, C_s : ダッシュボット μ : 摩擦係数

また、重心回りのモーメントは、図：2のように記号をとれば、以下のようになる。

重心回りの

$$\text{モーメント } M = F_n \cdot L_1 + F_s \cdot L_2$$

そして、各時刻毎に要素の接触点に働く力と、その力によって生ずる要素の重心回りのモーメントを総和することによって、以下の釣り合い式が求められる。

$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

並進運動

$$\Sigma F_y = m \cdot a_y$$

$$\Sigma M = I \cdot \beta$$

回転運動

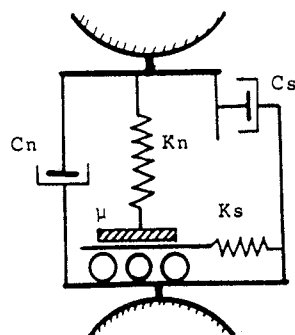
a_x, a_y : 加速度 β : 角加速度

I : 重心回りの慣性モーメント

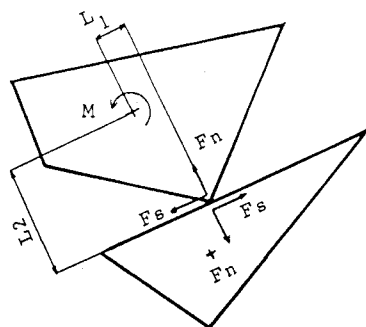
m : 要素の質量

(F_x, F_y は、前述の F_n, F_s を全体系 X-Y 方向へ変換したもの。)

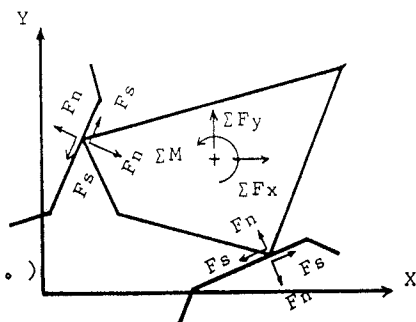
そして、上記の釣り合い式を数値積分によって解くことにより、ある時刻 t における状態を逐次求める。これが、個別要素法の基本的な考え方である。



図：1 個別要素法における接触点の力学モデル

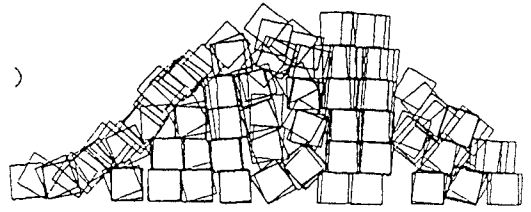


図：2 要素の重心回りに生ずるモーメント



図：3 要素に作用する力とモーメント

これまでに個別要素法は、ドミノの転倒やサイロからの粒状体の流出挙動、あるいは、亀裂性岩盤の崩落現象の解析に適用された例がある。⁵⁾ これらにおいては、各要素が接触・分離や衝突を繰り返す現象が主なる解析対象である。一方、川井によって提唱されたRBSM (Rigid-Body Spring Model) は⁶⁾ 個別要素法と基本的な概念は共通しているが、これまで、各要素の接触がはずれて系全体が分散し、ばらばらに衝突するような現象は対象とされていない。このような現象の解析には、今のところ個別要素法が最も適しているように思われる。



図：4 個別要素法によるロックフィル・マスの崩壊挙動のシミュレーション

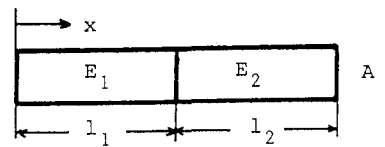
ところで、単純に2つの要素が接触している状態を想定すれば、2つの質量と1組のバネ、ダッシュポットからなる振動系が構成されているものとみなすことができる。すなわち、個別要素法による解析の基本は、接触要素で構成される系の振動応答解析であると言える。ここで、振動現象の最も基本的なパラメータは、固有振動周期であり、これがモデルと実物とで一致することがシミュレーション解析を行なう上で必須の条件であるとするば要素のバネ定数を定める方法は、自ずと明らかになるものと思われる。以下では、このような考え方に基づいて、バネ定数と減衰定数の決め方について述べる。

3. 弾性バネ定数の定め方について

1) 異なるヤング率 E_1 E_2 密度 ρ_1 ρ_2 をもち断面積が共に A である2つの弾性棒が接触しているときの縦振動の1次固有周期を波動方程式から求める。また、2つの棒を個別要素法で表現しそれらの接触点に弾性バネを導入したときの1次固有周期を振動方程式から求める。そして、両者の固有周期を一致させるように接触面法線方向に用いる弾性バネ定数 K を決めることとする。

2つの棒が完全に密着している右図のような系を考える。 l_1 、 l_2 の部分の変位をそれぞれ u_1 、 u_2 とすれば、各棒の自由振動時の運動方程式は、

$$\begin{aligned} \rho_1 A \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} &= E_1 A \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} \\ \rho_2 A \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} &= E_2 A \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1)$$



図：5 連続体棒系における弾性棒の接触モデル

接触面での応力と変位の連続条件と両端自由の条件を用いて(1)式を解くと

$$\begin{aligned} q \cos \frac{l_1}{v_1} p \cdot \sin \frac{l_2}{v_2} p + \sin \frac{l_1}{v_1} p \cdot \cos \frac{l_2}{v_2} p &= 0 \quad (2) \\ p &: \text{固有円振動数} \quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} : \text{縦波伝播速度} \\ q &= \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}} : \text{インピーダンス比} \end{aligned}$$

いま、縦弾性係数と密度が同じである同質の棒について考えてみると、インピーダンス比 q が1で、

$\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $v_1 = v_2 = v$ より、(2)式は次のようになる。

$$\cos \frac{l_1}{v} p \sin \frac{l_2}{v} p + \sin \frac{l_1}{v} p \cos \frac{l_2}{v} p = 0 \quad (3)$$

ここで、(3)式の解をもとめると、

$$p = n\pi \cdot \frac{v}{l_1 + l_2} \quad (n \geq 0, \text{整数}) \quad (4)$$

故に、1次の固有周期Tは、次のようになる。

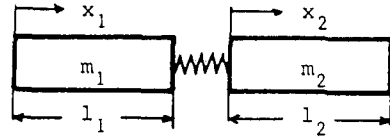
$$T = 2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{v} \quad (5)$$

一方、2つの個別要素が接触している右図のような系で、同質の棒について考えてみる。各棒の質量は、

$$m_1 = \rho_1 A l_1, \quad m_2 = \rho_2 A l_2$$

各要素の運動方程式は

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + K(X_1 - X_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{X}_2 + K(X_2 - X_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$



図：6 個別要素法系における
弾性棒の接触モデル

ここで、固有円振動数をpとすれば、上式の解は、

$$p = 0, \quad \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} K} \quad (7)$$

よって、固有周期は、次のようになる。

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2) K}} = 2\pi \sqrt{\frac{A \rho l_1 l_2}{(l_1 + l_2) K}} \quad (8)$$

2) ここで、まず同形、同質の要素の接触点に用いる弾性バネ定数Kの値について考える。(5)式の1次固有周期と(8)式の1次固有周期を一致させることにより、接触点垂直方向の弾性バネ定数Kは、次のように定まる。

$$2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{A \rho l_1 l_2}{(l_1 + l_2) K}} \quad (9)$$

ここで、 $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ より、

$$K = \frac{\pi^2 A l_1 l_2}{(l_1 + l_2)^3} E \quad (10)$$

また、要素が、同質、同形の棒であるとすれば、弾性バネ定数は次のようになる。

$$K = \frac{\pi^2 A E}{8 l}$$

以上で、2つの棒が接触しているときの1次固有周期を一致させるのに必要な弾性バネ定数が定まったので、次に、同質、同形の棒が直列に多数個接触している状態を想定する。この系を個別要素法で表現するには、多自由度の集中定数系 (lumped parameter system) を構成しているものと考えることができる。1次固有周期が連続体である均一な棒の1次固有周期とどれだけ異なるか調べてみる。

n 個の棒要素からなる棒の縦振動の1次固有周期 T は、各棒要素が、同質・同形の場合、棒の個数を n とすれば、次のようになる。

$$T = 2 \frac{n l}{v} \quad (11)$$

一方、 n 個の個別要素で構成される系の1次固有周期は、次の特性方程式から定まる。すなわち、固有円振動数を p とすれば、同形、同質の n 個の個別要素系に対して、

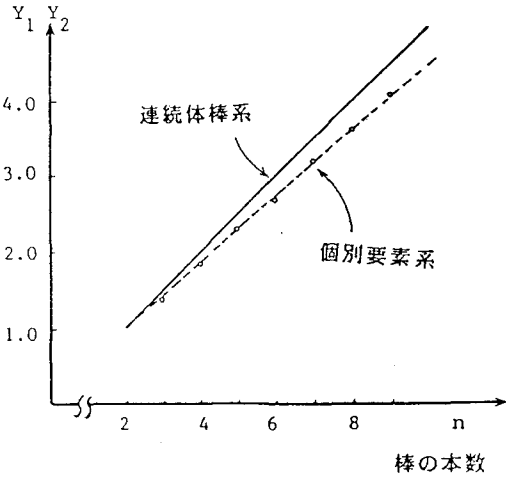
$$n \left\{ \begin{array}{ccccccc} k - m p^2 & -k & 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 \\ -k & 2k - m p^2 & -k & & & & \\ 0 & -k & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & -k & 2k - m p^2 & -k & \\ & & & & -k & k - m p^2 & \end{array} \right\} = 0 \quad (12)$$

いま、これを解いて得られる解で0でない p のうちで1番小さいものを P_1 とすれば、この系の1次固有周期は、次のようになる。

$$T = \frac{2 \pi}{P_1} \quad (13)$$

$n=2$ の場合の周期に対して、 n が 3, 4, 5, ... と増えた場合に (11) 式と (12) 式から定まる1次固有周期がどのように増加するかを計算した結果が表：1で、それを図示したものが図：7である。

棒の本数 n	連続体棒の固有周期の比 y_1	個別要素法での固有周期の比 y_2
2	1.00	1.00
3	1.50	1.41
4	2.00	1.85
5	2.50	2.29
6	3.00	2.73
7	3.50	3.18
8	4.00	3.62
9	4.50	4.07



表：1 二体問題で定めた固有周期に対する n 個の棒要素の固有周期

図：7 棒の本数の変化による連続体棒系と個別要素系の固有周期の伸び方

図：7 から、両者の周期の比 T_r は、次のように求まる。

$$T_r = \frac{\text{個別要素法系の周期}}{\text{連続体棒系の周期}} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{0.44n + 0.12}{0.50n}$$

従って、 n が非常に大きい場合には、次のようになる。

$$T_r \longrightarrow 0.88 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

つまり、2体問題で定めた弾性バネ定数をもちいると、最悪の場合、真の1次固有周期に比べて、振動論より求められる固有周期は12%ほど小さくなることを示している。

3) 同形、異質の要素の接触点に用いる弾性バネ定数 K を同様の方法で求めるには、(3) 式を解く必要がある。しかし、(3) 式の厳密解は、かなり面倒であるため、その近似解として、

$$p = \frac{2\pi}{2\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \quad (14)$$

を考え、厳密解との異差を調べてみる。

いま、簡単のために縦弾性係数だけが異なるものとすれば、以下のようになる。

$$\text{波動インピーダンス比: } q = \sqrt{\frac{E_2 \rho_2}{E_1 \rho_1}}$$

$$\text{密度: } \rho = \rho_1 = \rho_2$$

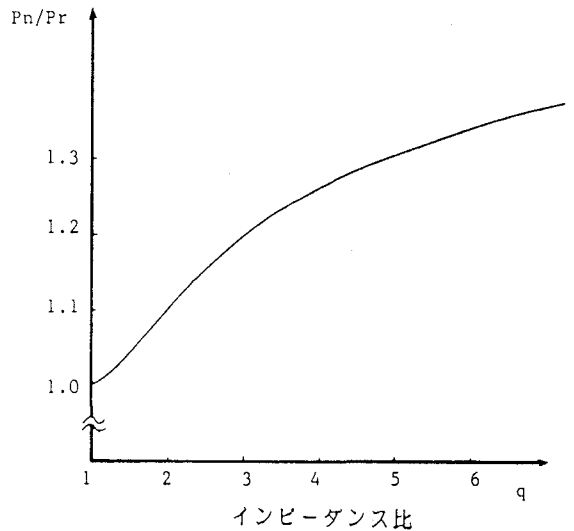
$$\text{波速: } v_2 = q v_1$$

$$\text{また、} \frac{1}{v_1} = 1 \text{ とすれば、(3) 式と(14)式は、}$$

$$q \cos p \sin \frac{p}{q} + \sin p \cos \frac{p}{q} = 0 \quad (15)$$

$$p = \frac{q}{1+q} \pi \quad (16)$$

波動インピーダンス比 q を横軸にとり、(14)式から求まる固有円振動数の近似解 p_n と(16)式からもとまる固有円振動数の厳密解 p_r との比 p_n / p_r を縦軸にとったグラフが、図：8 である。以上の結果からインピーダンス比 q が、 $1 \leq q \leq 2$ の範囲であれば、近似式から求まる固有円振動数 p_n の誤差は、10%ほどであることがわかる。



図：8 インピーダンス比 q と

近似解 p_n の厳密解 p_r に対する比 p_n / p_r の関係

さて、もし(14)式が近似解として用いることができる範囲内では、材質の異なる2つの要素の接触点に用いる弾性バネ定数Kの値は、(14)式から定まる周期と(9)式で与えられる周期とを等しくすることにより、次のように表わせる。

$$k = \pi^2 \frac{\alpha \beta}{(1 + \alpha \beta)} \cdot \frac{\eta}{(\sqrt{\eta} + \sqrt{\alpha \beta})} A \frac{E_1}{l_1} \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{\rho_2}{\rho_1} : \text{密度比} \quad \beta = \frac{l_2}{l_1} : \text{長さ比} \quad \eta = \frac{E_2}{E_1} : \text{剛性比}$$

4) 棒の振動周期から弾性バネ定数を決定する方法を上述した。この場合2つの要素の接触面の断面積が同じであり、その接触面に間隙が無いとして接触状態を理想化した。しかし、実際には各要素の接触は、点で接触していたり、面で接触していたり色々な状態がありうるので、上述の方法で弾性バネ定数を決定しても全てが解決するとはいえない。しかし、接触面に間隙がある場合には、それが無い場合よりも波速は小さくなると考えられるので、ここで示した弾性バネ定数の値は、上限値を与えるものとするのが妥当であろう。従って、実際の解析に用いる弾性バネ定数の値は、ここで示したものよりも小さくする必要がある。どの程度小さい値を採るのかについては、岩質ごとの弾性波速度実測例など⁷⁾が、参考になるであろう。

ここでは、接触面法線方向のバネ定数について述べたが、接線方向のせん断バネ定数は、棒のせん断振動を考えると、この運動方程式は形式上(1)式と全く同一となることから、上述と同様の方法で定めることができる。

4. 減衰定数の決め方について

1) まず、接触面法線方向に作用するダッシュボットの値について考えるが、その基本的な考え方は、エネルギー損失の目安として多用されている物理量である反発係数eとダッシュボットの減衰定数h_nとの関係を導くことである。個別要素法では、2つの要素の衝突を図9のようにモデル化している。衝突直前の要素の速度をV₀とすれば、要素が接触している間は、次の微分方程式が成り立つ。

$$m \ddot{X} + c_n \dot{X} + k_n X = 0 \quad (18)$$

ただし、添字のXは接触面法線方向の運動であることを示す。

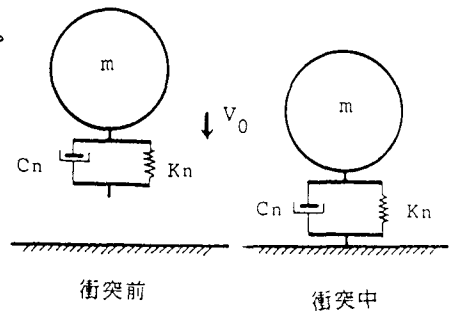
さて、ここで衝突前後のエネルギー損失を考えると、

ダッシュボットで表現される損失は、 $c_n = 2h_n \sqrt{mk_n}$

$$E = \int_0^T c_n \dot{X}^2 dt = \frac{m V_0^2}{2} \left\{ 1 - \exp \left(\frac{-2\pi}{\sqrt{1 - h_n^2}} \right) \right\} \quad (19)$$

反発係数で表現される損失は、

$$E = \frac{m}{2} V_0^2 (1 - e^2) \quad (20)$$



図：9 個別要素法における
衝突現象のモデル化

ここで、(19) 式と (20) 式を等しくおくことより、

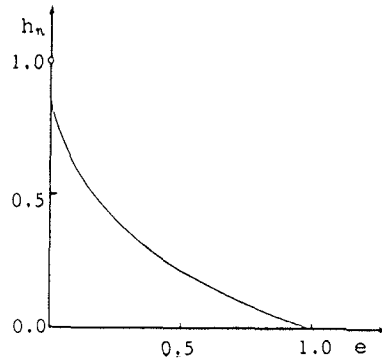
$$h_n = \sqrt{\frac{(\ln e)^2}{\pi^2 + (\ln e)^2}} \quad (21)$$

なる関係式が導かれる。

これから、各要素間の反発係数 e が

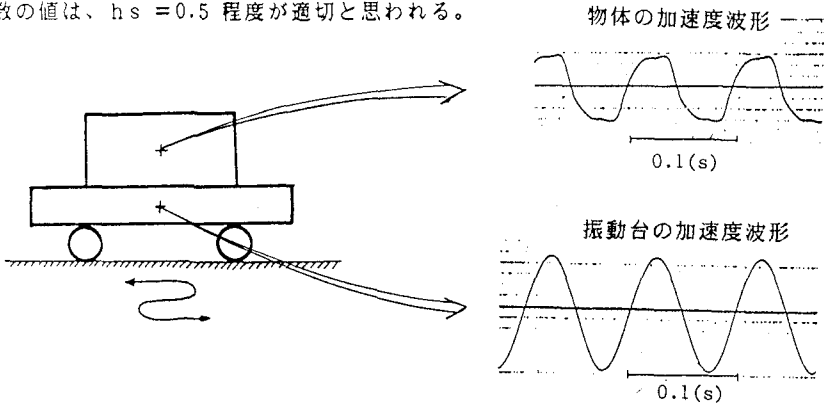
わかれば接触点に用いるダッシュボットの値 C_n は、

$$c_n = 2h_n \sqrt{mk_n} \text{ で求まることになる。}$$

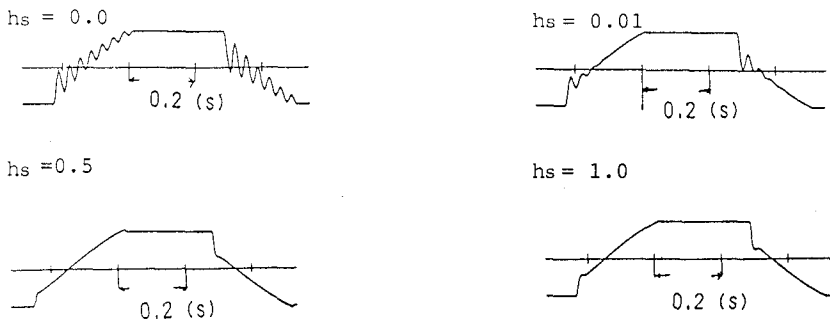


図：10 反発係数 e と減衰定数 h_n の関係

2) 接触面接線方向に作用するダッシュボットの値を純理論的に決定する方法は、いまのところ見当たらない。ところで、個別要素法では、要素間の滑動現象も解析できる。その点に注目し、振動台の上に剛な物体を載せ、摩擦係数 μ を越す慣性力を生じるように振動台を正弦振動させる実験を行なったときの物体の加速度波形と個別要素法で解析したときの加速度波形を比較することから、接線方向のダッシュボットの値を決めることを考えた。図：11 は実験で得られる加速度波形、また、図：12 は減衰定数 h_s が 0.0, 0.01, 0.5, 1.0 である場合に解析で得られる加速度波形を描いたものである。この図から、解析で減衰定数が小さ過ぎると滑動停止後暫くの間、実験では観察されない自由振動波形が現われていることがわかる。このことから、接線方向の減衰定数の値は、 $h_s = 0.5$ 程度が適切と思われる。



図：11 振動実験で得られた加速度波形



図：12 個別要素法による解析で得られた加速度波形

5. 結論

以上の解析の結果から接触点に用いる弾性バネ定数及び減衰定数の値については、次のようなことがいえる。

(1) 接触面法線方向、接線方向の弾性バネ定数を要素のヤング率やせん断剛性率と要素の寸法から定める方法を示した。ただし、この方法で定まる値は、上限値と考えた方がよい。

(2) 接触面法線方向に作用する減衰定数を、材料の反発係数をもとに定める方法を示した。

(3) 接触面接線方向に作用する減衰定数については、振動実験のシミュレーション解析を通じて適切と思われる概略値を示した。

冒頭でも述べたように、不連続体の動的挙動を解析する上で、個別要素法は、非常に有用な手法の1つである。今後は、本論文で提案した方法を用いて要素の定数を定め不連続体について種々の解析を行ない、実際の挙動と比較検討してみる予定である。

参考文献

- 1) P.A.Cundall: A Computer model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Blocky Rock System, Symp, ISRM, Nancy, France, Proc. Vol.2, 1971
- 2) O.Walton: Explicit particle-dynamics model for granular materials, proceeding of the 4th international conference on numerical methods in geomechanics, volum 3, 1982
- 3) 大町、荒井: 個別要素法による墓石の転倒現象の解析、第40回土木学会年次学術講演会講演集1部 (1-381), 1985
- 4) 大町、荒井: 個別要素法による不連続体の動力学に関する基礎的研究、東京工業大学土木工学科卒業論文, 1985
- 5) 木山英郎ほか: カンドルの離散剛体要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析、土木学会論文報告集、NO. 333, 1985, 5
- 6) 川井忠彦編: 物理モデルによる連続体力学諸問題の解析、生研セミナーテキスト、東京大学生産技術研究所, 1978
- 7) 土木技術者のための岩盤力学、P82-85、土木学会編, 1975