

幾何学的非線形性を考慮した面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性

NONLINEAR RESPONSE OF A RECTANGULAR PLATE SUBJECTED TO INPLANE MOMENT

高橋和雄*・池田虎彦**・川野隆太***

By Kazuo Takahashi, Torahiko Ikeda and Ryuta Kawano

In the present paper, the vibration of the web plate under sinusoidally varying inplane moment is examined from the standpoint of view of dynamic instability. The web plate is idealized by a rectangular plate which is surrounded by the upper and lower flange plates and vertical stiffeners. Inplane static and sinusoidally varying moment act on the edges of the plate. The dynamic instability regions are analyzed by the small deflection theory of thin plate. The problem is analyzed by a Galerkin method and the harmonic balance method. The amplitudes of unstable regions are determined by large deflection theory which considers the geometrical nonlinearity. Equations of time variables are integrated by using Runge-Kutta-Gill method.

Numerical results are presented for various boundary conditions, loading conditions and dampings of the plate.

1. まえがき

プレートガーダー橋の腹板の面外変形発生問題については、初期変形¹⁾や面外係数励振振動²⁾がその要因として想定されている。著者らは、このうちの面外係数励振振動(動的不安定現象、パラメーター励振)に着目した研究を行ってきた。係数励振振動問題は、微小変形理論の仮定に基づいて、安定を失った直後の分岐点近傍の解の挙動を明らかにするものである。この解析によって、文献2)でやや不明確であった面内変動曲げのもとに生ずる長方形板の曲げ振動の発生可能領域(面外不安定領域)を明確にすることができた³⁾。すなわち、線形理論による解析で面外係数励振振動の存在およびそのメカニズムなど、本質的な特性を把握できた。この結果、曲げモーメントを受ける長方形板の面外不安定領域は振動次数の和が奇数の結合共振が支配的であること、この事実は単純共振のみが存在する一様分布荷重の場合と根本的に異なること、および不安定領域の幅は境界条件、辺長比に無関係に固有振動数が接近している場合に広く、両者が離れている場合には狭いことを明らかにした。線形理論によれば、この面外振動は時間とともに発散する振動である。しかし、平板の場合、振幅が板厚程度になると、平板中央面に生ずる面内力による非線形項が効いてくるために、その振幅は有限な大きさとなる。したがって、安定を失った後の振幅を定めるためには、幾何学的非線形性を考慮した解析が必要である。

そこで、本論文は、平板の有限変形に関するKarmanの式を用いて、安定を失った後の振幅を時間応答解析によって求める手法を提案するものである。次いで、面外振動の振幅に及ぼす境界条件、負荷条件および減衰力の影響を評価したものである。

* 工博 長崎大学助教授 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

** 工修 長大(株) 〒305 茨城県筑波郡谷田部町3丁目

*** 長崎大学大学院生 工学部土木工学科 〒852 長崎市文教町1-14

2. 基礎式および境界条件

図-1 に示したような長方形板に x, y 平面に対して直角方向を z 軸とする。この長方形板の面外方向の変位を $w(x, y, t)$ とする。 $x=0, a$ の 2 辺上に図-1 のように静的曲げモーメント M_0 と変動曲げモーメント $M_t \cos \Omega t$ の和からなる曲げモーメント M が作用すると、平板の中央面の力 N_x は次のように表される。

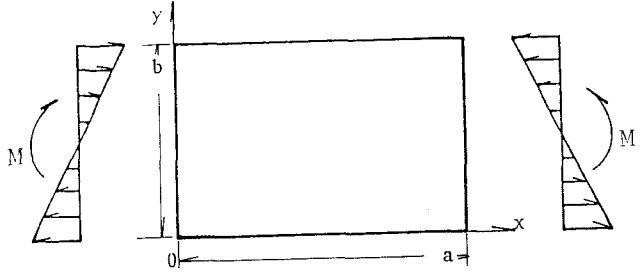


図-1 一般図および座標系

$$N_x = \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \quad (1)$$

ここに、 b : 荷重辺の長さ、 Ω : 励振円振動数、 M_t : 変動曲げモーメントの振幅

安定を失った後の長方形板の曲げ振動の運動方程式は平板の有限変形に関する Karman の方程式を用いて次のように表される⁴⁾。

$$L(w, F) = \rho d \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \nabla^4 w - \frac{6}{b^2} \left(1 - 2 \frac{y}{b} \right) (M_0 + M_t \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - d \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla^4 F = E \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (3)$$

ここに、 ρ : 板の密度、 d : 板厚、 $D = Ed^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$: 板剛度、 E : ヤング率、 ν : ポアソン比、 F : Airy の応力関数

面外の境界条件として、次の 2 ケースについて考える。すなわち、

case I: 全周辺単純支持

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, b) \quad (4-a)$$

case II: 荷重辺単純支持、他辺固定

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, a), \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y=0, b) \quad (4-b)$$

面内方向の境界条件として、支持辺に直角方向の面内変位のみを平均的に拘束する。この場合の面内の固定条件として、次の近似式を用いることにする⁵⁾。

$$\int_0^b u dy = 0 \quad (x=0, a), \quad \int_0^a v dx = 0 \quad (y=0, b) \quad (5)$$

ここに、

$$u = \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^x \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx, \quad v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^y \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy$$

u, v : 面内の x, y 方向の変位

3. 解法

(1)解の仮定 式(2)の解を次のように仮定する。

$$w = d \sum_{n=1} T_{Mn}(t) W_{Mn}(x, y) \quad (6)$$

ここに、 T_{Mn} :未知の時間関数、 W_{Mn} :境界条件を満足する座標関数、 $M=1, 2, \dots$:x方向の半波数

式(6)の座標関数 W_{Mn} として静的曲げモーメント M_0 が作用しない長方形板の曲げ振動の基準関数を用いるものとすれば、 W_{Mn} は次のように定義される。

$$\text{case I: } W_{Mn} = \sin \frac{M\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (7-a)$$

$$\text{case II: } W_{Mn} = \sin \frac{M\pi x}{a} \sum_{i=1} a_i \left\{ \cos \frac{(i-1)\pi y}{b} - \cos \frac{(i+1)\pi y}{b} \right\} \quad (7-b)$$

(2)応力関数の決定 解析の手順として、先ず式(3)の応力関数 F を式(6)を用いて、式(4)の条件のもとに決定しなければならない。式(3)の一般解は次のように表される。

$$F = F_p + F_c \quad (8)$$

ここに、 F_p :式(7-a)、(7-b)の形によって定まる特解(Appendix A参照)、 F_c :式(3)の微分方程式の余関数で次の表現を用いる⁵⁾⁶⁾。

$$F_c = A(t)x^2 + B(t)y^2 \quad (9)$$

ここに、 $A(t)$ 、 $B(t)$:式(5)の境界条件を満足するように決められる時間 t の関数 (Appendix B 参照)

(3)時間に関する運動方程式の誘導 運動方程式(2)に式(6)および式(8)を代入して、これにガラーキン法を適用する。すなわち、

$$\int_0^a \int_0^b L(w, F) W_{Mp} dx dy = 0 \quad (10)$$

ここに、 $p=1, 2, \dots$ 。

式(10)の積分を実行すれば、次のような時間関数 T_{Mn} の運動方程式に離散化される。すなわち、

$$\frac{\rho db^4}{D} I_{Mp} \ddot{T}_{Mp} + I_{Mp} T_{Mp} + \frac{6}{D} (M_0 + M_t \cos \Omega t) \sum_{n=1} I_{Mnp} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} I_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms} = 0 \quad (11)$$

ここに、 I_{Mp}^{-1} 、 I_{Mp}^2 、 I_{Mnp} 、 I_{Mnrsp} :ガラーキン法の積分項(Appendix C 参照)。

式(11)を次の要領で無次元化する(文献3)参照)。すなわち、

$$\text{曲げモーメント } M_0, M_t: \bar{M}_0 = M_0 / M_{cr}, \bar{M}_t = M_t / M_{cr} \quad (12-a)$$

ここに、 $M_{cr} = \lambda_{cr} \pi^2 D / 6$:座屈曲げモーメント、 λ_{cr} :座屈固有値

$$\text{励振円振動数 } \Omega: \bar{\omega} = \Omega / \Omega_1^{-1} \quad (12-b)$$

ここに、 $\Omega_1^{-1} = \alpha_1^{-1} \pi^2 / b^2 \sqrt{D / \rho d}$:一次振動の固有円振動数、 α_1^{-1} :一次振動の固有値

$$\text{時間 } t: \tau = \Omega_1^{-1} t \quad (12-c)$$

また、速度に比例する減衰項を考慮すれば、式(11)は次のように書き改められる。

$$\ddot{T}_{Mp} + 2h_M \left(\frac{\omega_M^0}{\omega_1^0} \right) \dot{T}_{Mp} + \left(\frac{\omega_M^0}{\omega_1^0} \right)^2 T_{Mp} + (\bar{M}_0 + \bar{M}_t \cos \omega \tau) \sum_{n=1} A_{Mnp} T_{Mn} + \sum_{n=1} \sum_{r=1} \sum_{s=1} B_{Mnrsp} T_{Mn} T_{Mr} T_{Ms} = 0 \quad (13)$$

ここに、 Ω_p^M :固有円振動数、 A_{Mnp} 、 B_{Mnrsp} (Appendix D 参照)

式(13-a)、(13-b)が幾何学的非線形性を考慮した長方形板の面外振動の時間に関する運動方程式である。

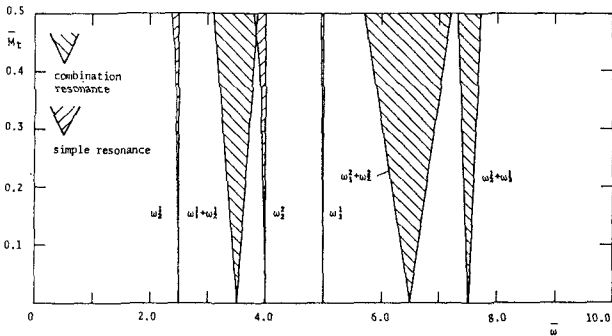
(4)時間応答解析法 不安定領域における振幅を定めるために、式(13-a)、(13-b)を Runge-Kutta-Gill法を

用いて、直接数値積分を行う。計算の自由度については、文献3)に述べたように、動的安定性問題では結合共振 $\omega^{M_i} + \omega^{M_j}$ は T_{M_i} 、 T_{M_j} の2自由度系の連成振動であるから、この2つの基準座標の成分を取りだせばよい。また、単純共振も曲げモーメントの場合では自由度間の連成振動で生ずるために、結合共振と同じ2自由度系の取り扱いが必要である。したがって、本時間応答解析では対応する2自由度のみを取りだして、解析を行えばよい。なお、時間応答解析にあたっては $T_{M_i} = T_{M_j} = 0.01$ 、 $\dot{T}_{M_i} = \dot{T}_{M_j} = 0.0$ の微小振動の初期条件を与えた。また、板のポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。特に断らない限り減衰力は無視する。

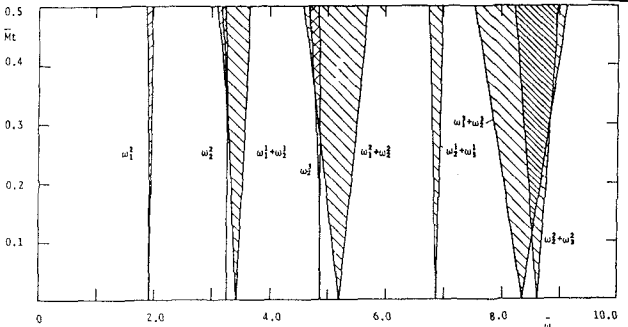
4. 解析結果

(1) 境界条件の影響 非線形解析に先だって、case I と case II の正方形板の ($\mu=1.0$) の線形解析による面外不安定領域を $\bar{M}_0=0.0$ に対して示せば、図一2,3の結果を得る³⁾。図中において、横軸 $\bar{\omega}$ は無次元加振振動数を、横軸 $\bar{M}_t$ は無次元変動曲げモーメントの振幅である。図中の右下がりの斜線部が結合共振を、右上がりの斜線部が単純共振の不安定領域を意味する。不安定領域に示した記号 $(\omega^{M_i} + \omega^{M_j})/k, 2\omega^{M_i}/k$ はそれぞれ結合共振、単純共振を意味する。これらの斜線部において面外変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ の作用下において、文献3)の図一6に示したように時間とともにその時間応答は発散する。

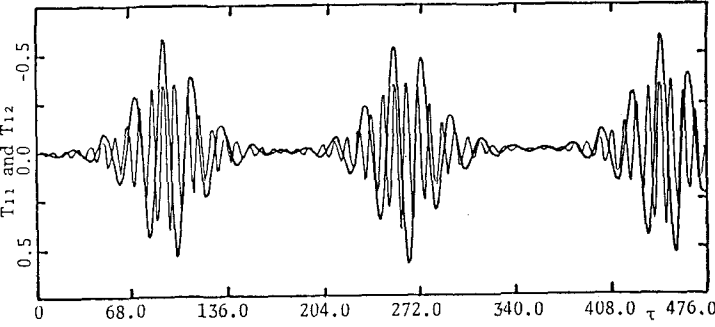
次に、幾何学的非線形性を考慮した時間応答解析結果を結合共振、単純共振に対して示せば、図一4,5の結果を得る。図において、縦軸は面外応答を板厚 d で無次元化した時間関数 T_{M_i} 、



図一2 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の不安定領域 (case I, $\bar{M}_0=0.0$)

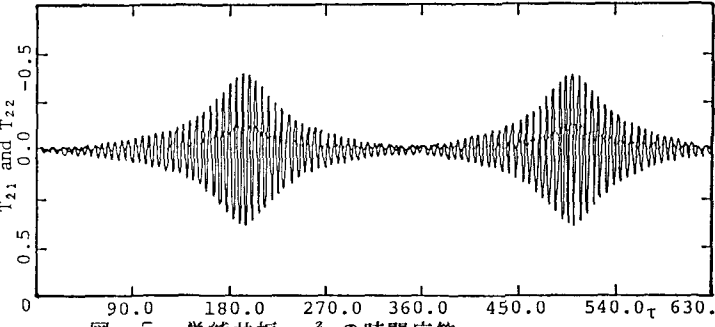


図一3 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0.0$)



図一4 結合共振 $\omega_1^2 + \omega_2^2$ の時間応答

(case I, $\bar{M}_t=0.5, \bar{\omega}=3.5, \bar{M}_0=0.0$)



図一5 単純共振 ω_2^2 の時間応答

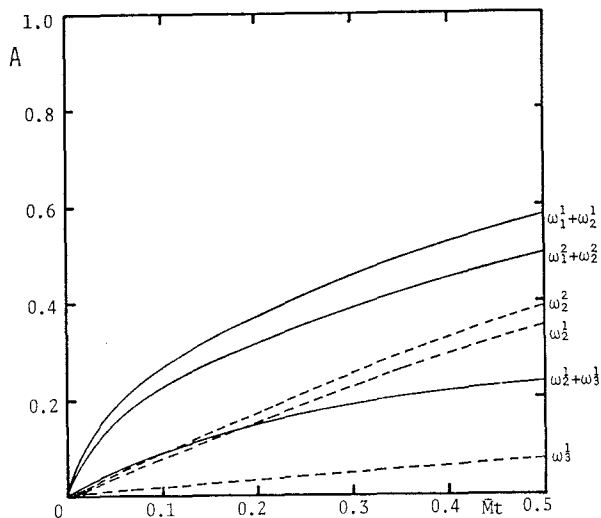
(case I, $\bar{M}_t=0.5, \bar{\omega}=4.0, \bar{M}_0=0.0$)

T_{Mj} である。横軸 τ は無次元時間である。図のように、幾何学的非線形性を考慮すると、振幅は有限の大きさになる。また、そのときの時間応答は唸り振動を伴うことがわかる。この唸り振動は1自由度系のMathieuの方程式にも現れるので⁵⁾、非線形のMathieuの方程式固有の現象であることが予想される。本研究では、唸り振動の最大値のうちの最も大きいものを最大振幅とした。時間応答解析は図一4,5に示した時間よりも、長時間にわたって実施している。図一4,5のような時間応答波形に対しては、最初の2,3回のうなりの最大振幅が最大応答を与える。このような振幅を $\bar{M}_t$ をパラメータに各不安定領域の中心振動数に対して求めれば、case I, IIに対して図一6,7に示すような結果を得る。これらの図において、横軸は無次元変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ の振幅、縦軸は板厚 d で無次元化した板の最大応答 $\max(T_{Mi}, T_{Mj})$ である。図中の実線は図一2,3に示す結合共振($\omega^{M_i} + \omega^{M_j}$)/ k の振幅を、同じく、破線は単純共振 $2\omega^{M_i}/k$ の振幅を示す。

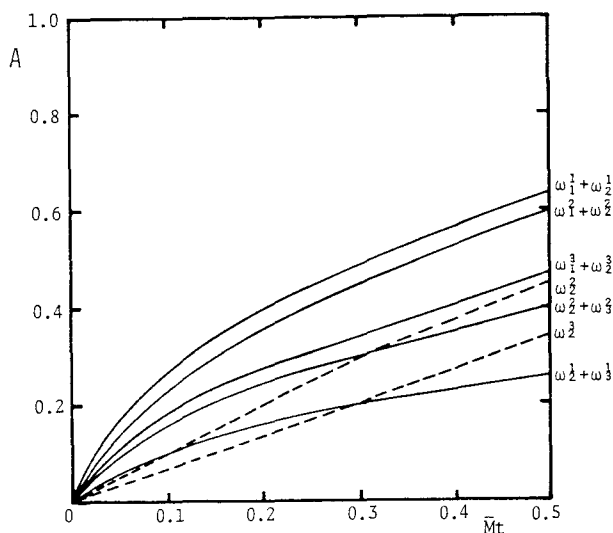
図一6,7より、結合共振の振幅 A は曲げモーメント $\bar{M}_t$ とともに増大するが、その増加の割合は曲げモーメントの増加に伴って緩やかになる傾向にある。これに対して、単純共振の振幅は曲げモーメントにほぼ比例して増加する。case I, IIとも振幅が最も大きい不安定領域は結合共振である。すなわち、曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける長方形板の動的安定問題では結合共振が重要であると言える。また、振幅を与える結合共振の種類はcase I, IIとも $\omega^1 + \omega^2$ のタイプで、これは最も低い固有振動数の和をもつ不安定領域である。case IIの $\omega^1 + \omega^3$ のような狭い不安定領域を除けば、固有振動数の和 $\omega^{M_i} + \omega^{M_j}$ が小さい順番に振幅が大きくなる。結合共振の幅が最も広い不安定領域の振幅が最も大きくなるとは限らないことに注意を要する。

線形解析によれば単純共振は本ケースではその幅が狭いために、重要でないことが判っている。また、その振幅も結合共振よりも小さい。

次に、case I と case II の境界条件の影響を比較すると、各ケースの座屈曲げモーメントで無次元化した変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ のもとでは、case II の振幅が case I のそれよりも大きくなるが、その割合は大きくない。つまり、非線形項の大きさが case II の方が case I のそれよりも大きくなるためである。



図一6 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の振幅 (case I, $\bar{M}_0=0.0$)



図一7 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の振幅 (case II, $\bar{M}_0=0.0$)

(2) 静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ の影響

線形理論によれば³⁾、静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ の存在は運動方程式の復元力の非対角項に組み込まれるために、その運動方程式は自由度間の強い連成方程式となる。 $\bar{M}_0=0.3$ に対して、case II の面外不安定領域を求めれば、図-8 のような結果を得る³⁾。図のように、図-2に含まれていない単純共振の主不安定領域 $2\omega^2_1$ が優勢となっている。また、単純共振の副不安定領域 ω^M_1 も広がる傾向にある。これに対して、結合共振の不安定領域の幅は減少している。つぎに、本ケースに対する振幅は図-9に示すとおりである。図のように、静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ の存在は、振幅を増大させる傾向にある。とくに、結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ については、曲げモーメント $\bar{M}_t$ が0.3付近から、振幅が急激に増大する。このときの、時間応答は図-10に示すとおりである。図のように一定の振幅の振動が持続した後に、最大振幅に達する特徴をもつ。このタイプの時間応答は、結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の不安定振動にのみ生ずるものである。これ以外の振動は $\bar{M}_0=0.0$ の場合の波形と同じである。この結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の $M=2$ の波形は座屈波形に似ているために、静的曲げモーメント $\bar{M}_0$ と変動曲げモーメントの振幅 $\bar{M}_t$ の和が座屈荷重に近づくとき動的座屈現象が生ずるものと考えられる。また、座屈が生ずるには、時間の経過を要するためである。図-11は $\bar{M}_0=0.0, 0.15, 0.3$ に対する結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の振幅を示したものである。この現象の発生する曲げモーメント $\bar{M}_t$ は、 $\bar{M}_0$ の大きさに依存する。 $\bar{M}_0$ が大きいほど、 $\bar{M}_t$ が小さいところで振幅が増大する。この現象はcase Iにも同様に現れる。

(3) 荷重条件の影響 本研究の曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける場合の振幅を、従来よく取り扱われている一様分布荷重 $\bar{q}_t$ を受

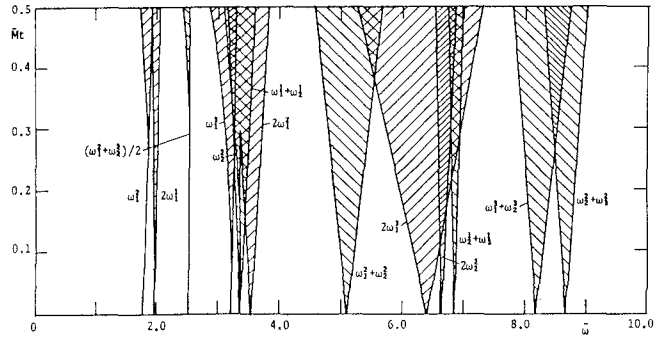


図-8 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の不安定領域 (case II, $\bar{M}_0=0.3$)

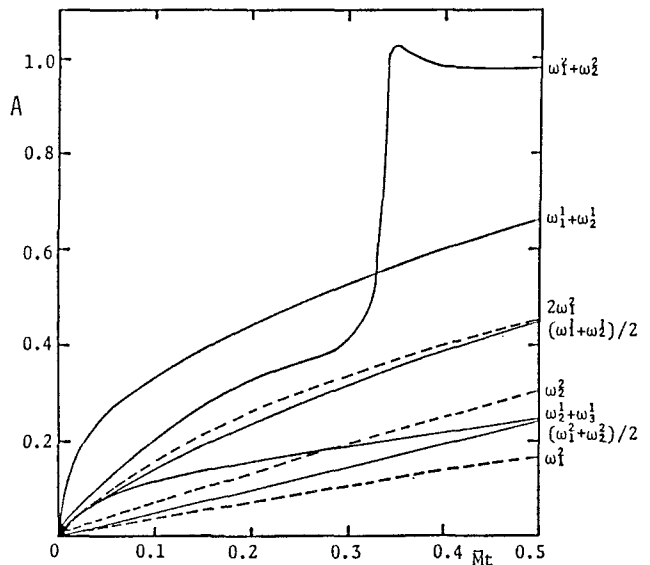


図-9 変動曲げモーメント $\bar{M}_t$ を受ける正方形板の振幅 (case I, $\bar{M}_0=0.3$)

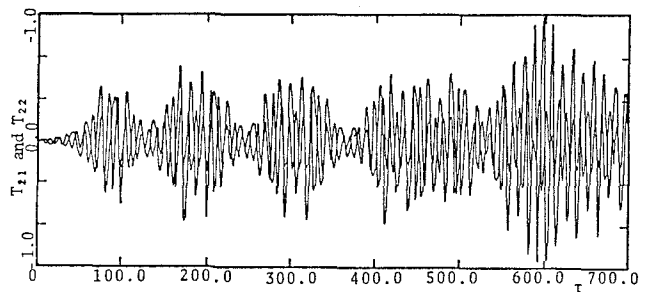


図-10 結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の時間応答 (case II, $\bar{M}_t=0.5$, $\bar{\omega}=6.4$, $\bar{M}_0=0.3$)

ける場合と比較する。図-12はcase IIの一樣分布荷重 $\bar{q}_t$ を受ける場合の振幅を示したものである。この場合の不安定領域は単純共振のみが存在することが知られているが⁷⁾、図のように単純共振の応答のみが得られている。この振幅を図-6の曲げモーメント $\bar{M}_t$ の場合と比較すると一樣分布荷重 $\bar{q}_t$ の場合の振幅が大きくなっている。つぎに、図-13はこのときの、単純共振の不安定領域 $2\omega^2_1$ の時間応答を示すものである。本ケースでは各自由度ごとの不安定領域が得られるから、一つの時間関数 T_{21} の不安定振動のみが生ずる。この1自由度系においても、振動の時間応答は唸り振動を伴っている。すなわち、これは非線形のMathieuの方程式のもつ固有の現象と考えられる。

(4)減衰力の影響 不安定領域に及ぼす減衰力の影響は、不安定振動の時間的発散を押える効果をもつ。このために、幅の狭い不安定領域は減衰力のために、安定領域になる(文献3の図-12参照)。

本節では、結合共振と単純共振の不安定領域の振幅に及ぼす減衰力の影響を評価する。case Iで最も大きな振幅をそれぞれ与える結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ と単純共振 ω^2_2 について、減衰定数($h^M_1 = h^M_2 = h$)を変化させた場合の振幅は 図-14のようになる。単純共振と結合共振では減衰の効きかたが異なる。このために、結合共振と同じ減衰定数の大きさでは、単純共振は減衰力のために生じない。そこで、減衰の効果を表現するために、単純共振の減衰力は、結合共振のその10分の1に調整している。

図のように、減衰力の影響は、曲げモーメント $\bar{M}_t$ の小さいところでは、全く安定で不安定振動が生じないが、ある曲げモーメントで不安定振動が生ずる。曲げモーメントが大きくなると、減衰の効果は少なくなってくる。また、単純共振の副不安定領域の幅は狭いため、減衰の効果が大きい。本題の動的不安定現象が生ずる条件として、振動数 $\bar{\omega}$ =桁の振動数/腹板の振動数が比較的大きいことが必要である(図-2,3では $\bar{\omega} > 3.0$)。また、活荷重によるモーメント $\bar{M}_t$ が大きい方が生じ易い。これらのことを考慮すると、想定できる橋梁は短スパンの鉄道橋プレートガーダー橋である。数種

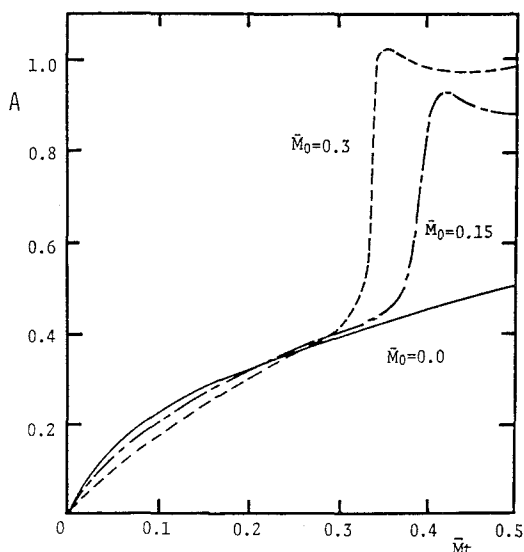


図-11 結合共振 $\omega^2_1 + \omega^2_2$ の振幅 (case I)

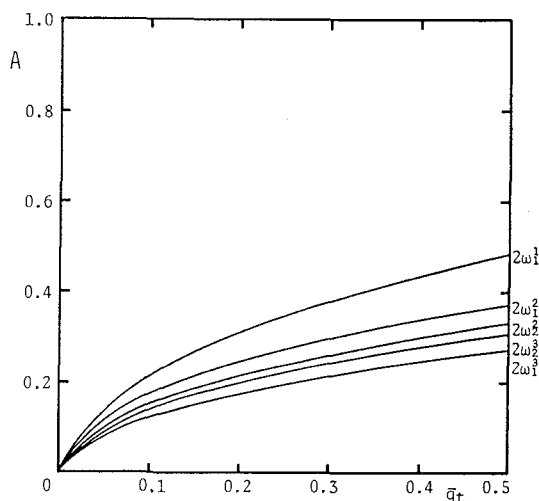


図-12 一樣分布荷重 $\bar{q}_t$ を受ける正方形板の振幅 (case II, $\bar{q}_0=0.0$)

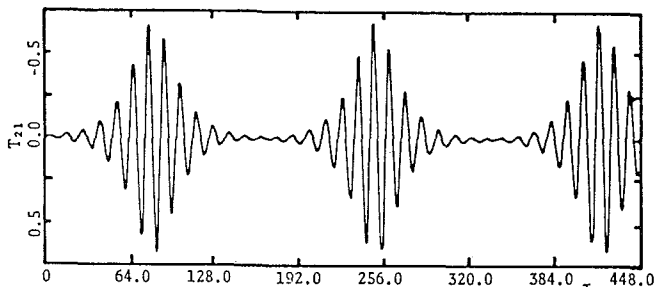


図-13 単純共振 $2\omega^2_2$ の時間応答 (case II, $\bar{q}_t=0.5, \bar{\omega}=3.87$)

類の設計例から $\bar{M}_t=0.10\sim 0.13$ および $\bar{\omega}=0.3\sim 5.0$ 程度であった。図-14のように、 $\bar{M}_t=0.10$ 程度のモーメントの大きさでは、その振幅は減衰力の大きさに敏感である。このために、実橋では減衰定数の大きさの見積が重要である。

減衰力が存在する場合の時間応答を結合共振および単純共振について示せば、図-15、16の結果を得る。図のように、減衰力の存在によって、唸り振動が消えて、一定の振幅の定常振動に達することがわかる。

5.まとめ

本研究は、まず、幾何学的非線形性を考慮した場合の面内変動曲げを受ける長方形板の面外不安定振動の振幅決定法を提案した。これに基づいて、面外振動の振幅に及ぼす境界条件、静的曲げモーメント、負荷条件および減衰力の影響を評価した。得られた結果をまとめると、

- 1) 面内変動曲げを受ける長方形板の面外振動の振幅は、固有振動数の和が小さい不安定領域の振幅が大きい。不安定振動の時間応答は唸り振動を伴っている。
- 2) 荷重辺が単純支持されて、他辺が単純支持または固定の場合の境界条件の影響は、あまりない。各境界条件の座屈曲げモーメントで無次元化した荷重のもとでは、固定の場合の振幅がわずかに大きくなる。
- 3) 静的曲げモーメントの存在によって、振幅は増大する。とくに、座屈波形に似た振動形をもつ結合共振は、全モーメントが座屈モーメントに近づくと、振幅は急激に増大する。このときの振幅は数回の唸り振動の後に生ずる。
- 4) 曲げモーメントを受ける長方形板の振幅は一様分布荷重を受ける場合よりも小さくなる。
- 5) 減衰力の影響は曲げモーメントの小さい領域の振幅を抑える効果をもつ。

このように、安定を失った後の長方形板の面外不安定振動の挙動を明らかにすることができた。動的不安定現象と初期変形の関係については稿を改めて報告する。

数値解析には長崎大学の情報処理センターのFACOM M-180 AD/IIを使用したことを付記する。

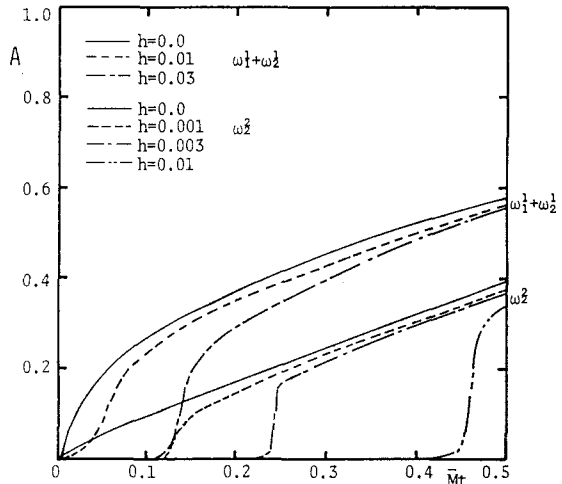


図-14 振幅に及ぼす減衰力の影響
(case I, $\bar{M}_0=0.0$)

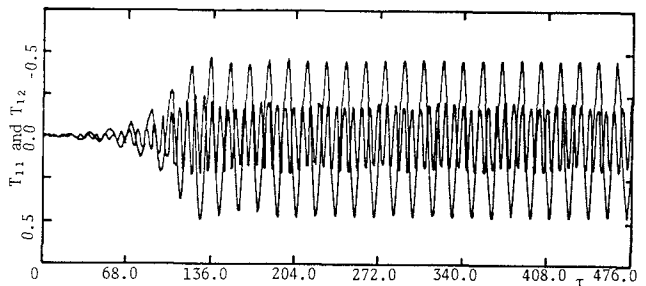


図-15 減衰系の結合共振 $\omega_1+\omega_2$ の時間応答
(case I, $\bar{M}_t=0.5$, $\bar{\omega}=3.5$, $\bar{M}_0=0.0$)

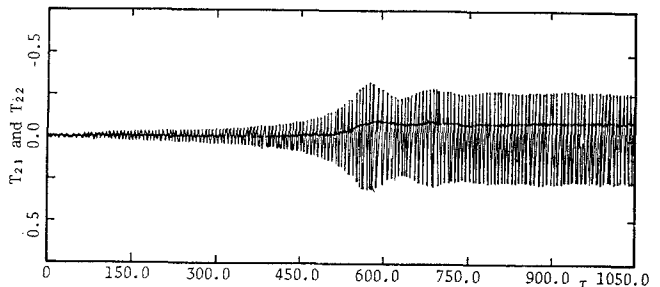


図-16 減衰系の単純共振 ω_2 の時間応答
(case I, $\bar{M}_t=0.5$, $\bar{\omega}=4.0$, $\bar{M}_0=0.0$)

Appendix A

$$F_P = Ed^2 \sum_{n=1} \sum_{s=1} T_{Mn} T_{Ms} F_{Mns}^P$$

ここに,

case I :

$$F_{Mns}^P = A_{ns}^M \cos(n-s)\pi\eta + B_{ns}^M \cos(n+s)\pi\eta + \cos 2M\xi \{C_{ns}^M \cos(n-s)\pi\eta + D_{ns}^M \cos(n+s)\pi\eta\},$$

$$A_{ns}^M = \frac{M^2 s}{4\mu^2(n-s)^3}, \quad B_{ns}^M = \frac{M^2 s}{4\mu^2(n+s)^3}, \quad C_{ns}^M = \frac{\mu^2 M^2(n+s)s}{4\{4M^2 + (n-s)^2\mu^2\}^2}, \quad D_{ns}^M = \frac{\mu^2 M^2(n-s)s}{4\{4M^2 + (n+s)^2\mu^2\}^2},$$

ただし, $A_{ns}^M = 0$ ($n=s$), $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\mu = a/b$ (縦横比)

case II :

$$F_{Mns}^P = \sum_{i,j=1}^n \sum_{s=1}^n \{A_{ij}^M \cos(i-j)\pi\eta + B_{ij}^M \cos(i+j)\pi\eta + C_{ij}^M \cos(i+j-2)\pi\eta + D_{ij}^M \cos(i-j+2)\pi\eta + E_{ij}^M \cos(i-j-2)\pi\eta + F_{ij}^M \cos(i+j+2)\pi\eta + \cos 2M\xi \{G_{ij}^M \cos(i-j)\pi\eta + H_{ij}^M \cos(i+j)\pi\eta + I_{ij}^M \cos(i+j-2)\pi\eta + J_{ij}^M \cos(i-j+2)\pi\eta + K_{ij}^M \cos(i-j-2)\pi\eta + L_{ij}^M \cos(i+j+2)\pi\eta\}\}$$

$$A_{ij}^M = \frac{M^2 j}{2\mu^2(i-j)^3}, \quad B_{ij}^M = \frac{M^2 j}{2\mu^2(i+j)^3}, \quad C_{ij}^M = \frac{M^2(1-j)}{4\mu^2(i+j-2)^3}, \quad D_{ij}^M = \frac{M^2(1-j)}{4\mu^2(i-j+2)^3}, \quad E_{ij}^M = \frac{-M^2(1-j)}{4\mu^2(i-j-2)^3},$$

$$F_{ij}^M = \frac{-M^2(1-j)}{4\mu^2(i+j+2)^3}, \quad G_{ij}^M = \frac{\mu^2 M^2(ij+j^2+2)}{2\{4M^2 + (i-j)^2\mu^2\}^2}, \quad H_{ij}^M = \frac{\mu^2 M^2(ij-j^2-2)}{2\{4M^2 + (i+j)^2\mu^2\}^2}, \quad I_{ij}^M = \frac{-\mu^2 M^2(i-j)(1-j)}{4\{4M^2 + (i+j-2)^2\mu^2\}^2},$$

$$J_{ij}^M = \frac{\mu^2 M^2(i+j)(1-j)}{4\{4M^2 + (i-j+2)^2\mu^2\}^2}, \quad K_{ij}^M = \frac{-\mu^2 M^2(i+j)(1+j)}{4\{4M^2 + (i-j-2)^2\mu^2\}^2}, \quad L_{ij}^M = \frac{-\mu^2 M^2(i+j)(1+j)}{4\{4M^2 + (i+j+2)^2\mu^2\}^2}$$

ただし, $A_{ij}^M = 0$ ($i=j$), $C_{ij}^M = 0$ ($i=j=1$), $D_{ij}^M = 0$ ($i=j=2$), $E_{ij}^M = 0$ ($i=j+2$),

Appendix B

$$F_c = Ed^2 \sum_{n=1} \sum_{s=1} T_{Mn} T_{Ms} F_{Mns}^c$$

case I :

$$F_{Mns}^c = \frac{\pi^2 \delta_{ns}}{16(1-\nu^2)} \{(\mu^2 ns + \nu M^2)\xi^2 + (M^2/\mu^2 + \nu ns)\eta^2\}$$

case II :

$$F_{Mns}^c = \frac{\pi^2}{16(1-\nu^2)} \{[a_i^T a_i^S \{4\mu^2 + 3\nu M^2\} + 2 \sum_{i=2}^n a_i^T a_i^S \{\mu^2(i^2+1) + \nu M^2\} - \sum_{i=1}^n a_i^T a_{i+2}^S \{\mu^2(i+1)^2 + \nu M^2\} - \sum_{i=3}^n a_i^T a_{i-2}^S \{\mu^2(i-1)^2 + \nu M^2\}]\xi^2 + [a_i^T a_i^S \{4\nu + 3M^2/\mu^2\} + 2 \sum_{i=2}^n a_i^T a_i^S \{\nu(i^2+1) + M^2/\mu^2\} - \sum_{i=1}^n a_i^T a_{i+2}^S \{\nu(i+1)^2 + M^2/\mu^2\} - \sum_{i=3}^n a_i^T a_{i-2}^S \{\nu(i-1)^2 + M^2/\mu^2\}]\eta^2\}$$

Appendix C

$$I_{Mp}^1 = \int_0^1 \int_0^1 W_{Mp}^2 d\xi d\eta,$$

$$I_{Mp}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{\mu^4} \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\mu^2} \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W_{Mp}}{\partial \eta^4} \right) W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{Mnp} = -\frac{1}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 (1-2\eta) \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi^2} W_{Mp} d\xi d\eta,$$

$$I_{Mnrs} = -\frac{12(1-\nu^2)}{\mu^2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 F_{Mrs}}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W_{Mn}}{\partial \eta^2} \right) W_{Mp} d\xi d\eta$$

$$F_{Mrs} = F_{Mns}^P + F_{Mns}^c$$

Appendix D

$$A_{Mnp} = I_{Mnp} / \{I_{Mp}(\alpha_i)^2 \pi^2\}, \quad B_{Mnp} = I_{Mnrs} / \{I_{Mp}(\alpha_i)^2 \pi^4\}, \quad \omega_p^0 = \sqrt{\frac{I_{Mp}^2 D}{I_{Mp} \rho db^4}}$$

参考文献

1) 前田・大倉: プレートガーダーウェブの初期たわみと疲労亀裂に関する研究, 土木学会論文集, 第319号,

pp.1~12,1983.

- 2)Kuranishi,S.and Shima,T.:Vibration of an Initially Deflected Web Plate under Periodic Beam Bending,Pro.JSCE,No.341,pp.229~232,1984.
- 3)高橋・田川・池田・松川:面内変動曲げを受ける長方形板の動的安定性、土木学会論文集、第341号、pp.179~186,1984.
- 4)Timoshenko,S.P.and Woiowsky-Krieger,S.:Theory of Plates and Shells,2nd Edition,McGraw-Hill Book Co.,pp.425~428,1955.
- 5)Kanazawa,K.and Hangai,Y.:Nonlniear Flexural Vibrations of Thin Shallow Shells,Theoretical and Applied Mechanics,Vol.25,pp.72~82,1975.
- 6)八巻:弾性体の非線形振動、日本機学会第373回講習会「非線形振動の理論と実際」,pp.31~50,1973.
- 7)八巻・永井:周期的な圧縮荷重を受ける矩形板の動的安定性、東北大学高速力学研究所報告、第36巻、第351号、pp.147~168,1975.

(1985年10月18日)