

伝達マトリックス法に基づく動的解析、 安定解析への数式処理システムの適用

APPLICATION OF FORMULA MANIPULATION SYSTEM TO DYNAMIC AND STABILITY
ANALYSES BASED ON TRANSFER MATRIX METHOD

中村 秀治* 寺野 隆雄**

By Hideharu NAKAMURA and Takao TERANO

Fundamentals on dynamic and stability analyses based on transfer matrix method have already established during 1960's. Although the solution method is of little interest from a viewpoint of practical application, the improvement of the method is an important subject because of a presentation of exact solution.

In this paper, application of formula manipulation system to dynamic and stability analyses based on transfer matrix method is investigated. Applicability and effectiveness of the method which combines formula manipulation system with a numerical method are confirmed.

1. まえがき

伝達マトリックス法は主として、静的解析にその適用例が多く見られるが、動的解析、安定解析への適用についても、理論的基礎は既に 1960 年代に確立されている。

伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析の適用は、大部分が骨組構造に関するものであるが、固有円振動数(ω)あるいは座屈荷重(P_{cr})を格間、格点伝達マトリックス中に未知変数として残したまま伝達計算を行い、最終的に、行列式=0 を満足する ω 、 P_{cr} を試行錯誤的に求めることになる。この場合、格間、格点伝達マトリックス中に含まれる ω 、 P_{cr} が多項式の形であれば、伝達計算途中での式の整理等が容易であり、マトリックスサイズが大きい場合(10元以上)でも可能であるが、通常、三角関数、双曲線関数の形で現われるため、筆算によるマトリックス演算では数元(3, 4 元)が限界である。しかも、複雑な構造系で数多く伝達計算をくり返す場合は不可能である。

従って、変位法が隆盛の今日、伝達マトリックス法による動的解析、安定解析の研究は、実用上、特に魅力あるものとは言いがたいのであるが、厳密解を求めるための手法を改善するという立場に立てば、大きな検討課題になり得るものと思われる。

数式処理システムは、数式を記号のまま処理するものであるが、当初、物理学、数学の分野でその必要性が認識され、10数種に及ぶシステムが開発された。MACSYMA, REDUCE, μ -MATH はその代表的なシステムであり、殆んどの計算機に移植可能な状態にある。数式処理システムの構造工学分野へ

* 工博 (財)電力中央研究所土木研究所材料構造研究室 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

** 工修 (財)電力中央研究所経済研究所知識処理研究室 (〒100 東京都千代田区大手町 1-6-1)

の適用例を見ると、理論式の誘導あるいはチェックに利用されていると考えられるが、表面に出た例は少く、適用例の大部分は要素剛性マトリックス成分の数式表示である。^{3), 3), 4)}

本論文は、伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析への、数式処理システム (REDUCE) の適用を検討したものであり、従来の筆算・試行錯誤の枠を破って、どの程度まで実際に、効率的に解析し得るようになるか試みた結果について述べたものである。

2. 伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析

(1) 固有振動解析⁵⁾

無減衰を仮定し、空間座標について一階に変換すれば、動的問題の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = A Y(x, t) + Q(x, t) + M \ddot{Y}(x, t) \quad (1)$$

ここで、右辺第三項は慣性項である。固有周期と固有モードを求めるには、

$$Y(x, t) = \bar{Y}(x) e^{i\omega t} \quad (\text{但し、} i = \sqrt{-1} \text{ とする。}) \quad (2)$$

$$Q(x, t) = 0 \quad (3)$$

と置き、式(1)を次のように変形する。

$$\frac{d \bar{Y}(x)}{d x} = (A - \omega^2 M) \bar{Y}(x) \quad (4)$$

式(4)を解くにあたり、 ω^2 をある正の数値で仮定して始点から終点まで伝達計算し、境界条件を取り込んで、最終的に得られたマトリックスの determinant を求め、その値が 0 になる ω^2 を効率良く試行錯誤で順次見出していくのが通常の方法である。

(2) 動的応答解析⁶⁾

式(1)に減衰項を加えた運動方程式

$$\frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} = A Y(x, t) + Q(x, t) + M \ddot{Y}(x, t) + C \dot{Y}(x, t) \quad (5)$$

の両辺を Fourier 変換できると仮定すれば、 Y の Fourier 変換、すなわち、

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (6)$$

は、次の方程式を満たす。

$$\frac{d \bar{Y}(x)}{d x} = (A - \omega^2 M + i\omega C) \bar{Y}(x) + \bar{Q}(x) \quad (7)$$

ここで、 $\bar{Q}$ は Q の Fourier 変換である。

種々の ω について伝達マトリックス計算を行い、 $\bar{Y}$ を求めたならば、数値的に Fourier 逆変換することで Y を求めることにより、動的応答解析が行える。

(3) 安定解析

安定解析の方程式には、静的解析の方程式に変形後の状態におけるつりあいを考慮したことによる項がつけ加わる。高階の安定解析の方程式を正規形に変換して、一般的に表現すれば次式になり、形の上では固有振動解析の場合と同じになる。

$$\frac{d Y(x)}{d x} = A(x, P_{cr}) Y(x) \quad (8)$$

固有振動解析の場合と同様、 P_{cr} を仮定して始点から終点まで伝達計算し、境界条件を取り込んで、最終的に得られたマトリックスの determinant を求め、その値が 0 になる P_{cr} を効率良く試行錯誤で順次見出していくのが通常の方法である。

3. 数式処理システムの適用

伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析に、数式処理システム (REDUCE) が有効に適用できるのは、以下の演算である。^{7), 8)}

(1) 未知変数 ω , Pcr を成分に持つマトリックスの積

REDUCE を用いて、一定の数値および未知変数を成分に持つマトリックスの演算を行うことは容易である。しかし、伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析では、 ω 、Pcr そのものでなく、 ω 、Pcr の三角関数あるいは双曲線関数がマトリックス成分として表われるため、例えば、 $\sin \omega$ 、 $\sinh \omega$ 、 $\cos \omega$ 、 $\cosh \omega$ 等は、それぞれ別の変数として演算することになる。伝達マトリックス計算途中あるいは、最終的なマトリックスの得られた段階で、演算規則を LET 文により生成して、マトリックス成分を数学公式に則り整理することができる。

(2) 変数変換

数式処理システムを有効利用するか否かは、演算規則の生成のやり方、変数変換のやり方にかかっている。伝達マトリックス計算過程において、同じような変数のグループがしばしば表われるなら、そのグループを別の簡単な変数で常に置換して、計算を先に進める。

(3) determinant の計算

determinant を計算する最終的なマトリックス (仮に MAT とする) が得られたならば、

DET MAT ;

のコマンドのみで、実行することができる。REDUCE の使用にあたって、最後の ; はユーザーからのコマンドであることを意味している。

(4) 高次代数方程式の係数の取り出し

最終的なマトリックスの determinant の計算から得られた式を検討すると、集中荷重法¹⁾ による固有振動解析の場合のみ ω に関する高次代数方程式になる。他の場合は、いずれも三角関数、双曲線関数が複雑な形で入っており、容易に解ける形ではない。振動数方程式あるいは座屈条件式を得るという意味では十分目的を達し得るのであるが、実際に解が求められないのでは、REDUCE を用いて数式処理した利点が生かされない。複雑な形の振動数方程式、座屈条件式を試行錯誤で解くとすれば、従来の方法と実質的に何ら変わりがない。そこで、三角関数、双曲線関数を、例えば次のような $x=0$ のまわりでテイラー展開した形に置換することを考える。

$$\left. \begin{aligned} \sinh x &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} & \sin x &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} \\ \cosh x &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{2r}}{(2r)!} & \cos x &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r)!} \\ \tanh x &= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{2^{2r}(2^r-1)}{2r} B_r x^{2r-1} & \tan x &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^{2r}(2^r-1)}{(2r)!} B_r x^{2r-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 B_r は Bernoulli の数である。

この置換により、級数を適当な次数まで取れば、 x のある領域でほぼ良好な近似を得ることができる。従って、このような置換で REDUCE により自動的にある領域で適用可能な高次代数方程式を求め、係数のみ取り出すことができる。別の領域については、その領域内における点で同様の展開を行えばよい。

(5) 得られた解の確認

得られた解をもとの方程式に代入して、正しさの確認を容易に行うことができる。高次代数方程式に限らず、高階の微分方程式などの場合でも、解の確認は数式処理システムの最も得意とする所である。

4. 複素係数を持つ高次代数方程式の大域的数値解法^{9),10)}

前節までに述べた方法によって高次代数方程式が得られたならば、残る問題はこれを数値的に解くことである。高次代数方程式を解くことはごく基本的な問題であるが、このための算法は古くからの研究にもかかわらず、未だ確立しているとはいいがたい。代表的な解法としては、Newton 法、Lehmer 法、Bairstow 法などがある。しかし、すべての根を求めたい場合は、いずれの方法においても、一つの根の近似値が得られる毎に、もとの方程式の次数を下げる処理が必要である。そのため丸め誤差が累積し、近似値の精度が次第に低下する危険がある。また、これらの解法をプログラム化するには、計算途中のオーバーフローや、丸め誤差の拡大を防ぐためのさまざまな工夫が必要である。

そこで、本論文ではそのような欠点が少ない、全根を同時に求める反復法を利用する。本解法は、① 局所的な収束がはやく、② 初期値によらず解が求まるという大域的収束性を持ち、③ 多重根も精度よく求められ、④ 近似解の事後評価を丸め誤差を含めて厳密に行なえる、と言う良い特長を備えている。実際、この解法は強力であり、ある種の高次代数方程式の全根を 2048 次のケースについて求め得たという報告もある¹¹⁾。

この解法では、複素係数の n 次多項式、

$$\begin{aligned} P(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \\ &= (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)(z - \alpha_n) \end{aligned} \quad (10)$$

が与えられた時、次の 2 つの反復式を利用する。

$$\varphi_i(z_1, \dots, z_n) = -P(z_i) / \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n (z_i - z_j) \quad (11)$$

$$\psi_i(z_1, \dots, z_n) = -\{P(z_i)/P'(z_i)\} / \left[1 - \{P(z_i)/P'(z_i)\} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \{1/(z_i - z_j)\}\right] \quad (12)$$

ただし、 $i = 1, \dots, n$ 、 z_i は α_i の近似値を表わす。根 α_i に対する v 回目の近似値 $z_i^{(v)}$ は、次式によって計算する。

$$z_i^{(v+1)} = z_i^{(v)} + \beta^{(v)} \psi_i(z_1^{(v)}, \dots, z_n^{(v)}) + \varphi_i(z_1^{(v)}, \dots, z_n^{(v)}) \quad (13)$$

ここで、 $\beta^{(v)}$ は、大域的収束性を保証するための加速係数で、通常は、 $\beta^{(v)} = 1$ にセットされ、収束状況が悪いと、 $\beta^{(v+1)} = \beta^{(v)} / 2$ に自動的に変更される。

反復式 φ_i のみを用いた場合は、根の近似値は Newton 法と同様に 2 次収束し、 ψ_i のみを用いた場合は 3 次収束することが知られているので、式(13)による反復は全体として根に 3 次収束する。式(13)における φ_i は、重根が存在する場合にその精度を上げるのに必要である。この点についての詳細は文献 10) を参照されたい。

ここで述べた解法の適用を前提とすれば、数式処理システムを用いて高次代数方程式を誘導することは有効であり、筆算、試行錯誤という不確実な操作を避けることにつながる。

なお、本解法では、 $P(z)$ が式(10) で陽に与えられることを仮定していたが、実際は、 $P(z)$ ならびに $P'(z)$ が任意の z について計算できれば、この算法は利用可能である。つまり、近似値の取り扱いを工夫すれば、本解法が特定の領域内における解析関数の零点を求めるのにも利用できることを示唆する。これをプログラムとして実現すれば、前節におけるテイラー展開の方法を用いずに、より高精度の解を得ることが可能になる。

5. 解析例

以上の解法が成立し、かつ有効なことを確認するため、動的解析、安定解析の2例を以下に示す。取り上げた解析モデルはいずれも単純であるが、より複雑な場合も手順は全く同様である。

(1) 両端単純支持はりの固有振動解析の場合 (図. 1)

振動数方程式が、 $\sinh \beta l \sin \beta l = 0$ (但し、 $\beta^4 = \omega^2 \rho / EI$) となることは、文献 1) と同様、REDUCE によっても容易に確認できる。式 (9) を代入すれば、高次代数方程式が求まり、 $\beta l = 0$ 近傍でテイラー展開 (7, 9, 11 次) した時の βl に関する方程式係数は表. 1 のようになる。これを解いた時の解は、厳密解 π に対して表. 2 の通りである。

表. 1 高次代数方程式の係数

	$(\beta l)^2$	$(\beta l)^8$	$(\beta l)^4$	$(\beta l)^{10}$	$(\beta l)^6$	$(\beta l)^{12}$
7 次			1	-84	282240	-25401600
9 次		1	864	1161216	-1463132160	131681894400
11 次	1	3740	2851200	-14050713600	17703899136000	-1593350922240000

表. 2 固有周期の比較 (βl)

7 次	9 次	11 次	厳密解
3.0786	3.1487	3.1411	3.1416

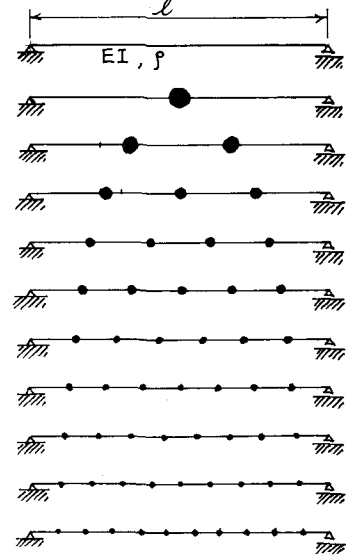


図. 1 単純はりの計算モデル

次に、文献 1) の記号および符号規約に従い、集中質点法の場合を等間隔 10 点まで試みた。

$\Omega = m \omega^2 \tilde{l}^3 / 6 EI$ (但し、 $\tilde{l}$ は集中質量間距離とする)

として、振動数方程式を算出した結果の一覧が表. 3 であり、固有周期の比較が表. 4 である。質点数の増加に伴ない、固有周期の精度の向上する様子がよく表われている。なお、この解析もすべて自動的に行ったが、対話型で行って全く応答の遅れを感じない程で、計算時間はごくわずかである。

表. 3 等間隔集中質点の場合の振動数方程式の係数

質点数	Ω^{10}	Ω^9	Ω^8	Ω^7	Ω^6	Ω^5	Ω^4	Ω^3	Ω^2	Ω^1	
1										1	-1
2									-5	16	-3
3								7	-39	34	-2
4							-209	1664	-3021	1040	-25
5					65	-673	1932	-1580	259	-3	
6				-2911	37104	-147613	207360	-89082	7840	-49	
7			679	-10279	52566	-108182	85350	-21222	1092	-4	
8		-4505	78976	-494865	1361680	-1650431	795648	-122694	3936	-9	
9	37829	-753669	5598776	-19433720	32614185	-25148809	7861164	-792396	16665	-25	
10	-564719	12601904	-108358065	455961984	-991290980	1091429184	-564743795	119737728	8225217	118096	-121

表. 4 等間隔集中質点の場合の厳密解との比較

質点数	π^{10}	π^9	π^8	π^7	π^6	π^5	π^4	π^3	π^2	π
1	986.960	799.438	631.655	483.611	355.306	246.740	157.914	88.8264	39.4784	9.8696
2										9.7980
3									38.1838	9.8590
4								83.2128	39.1918	9.8666
5							143.556	87.1779	39.3808	9.8684
6						218.529	152.735	88.1816	39.4360	9.8691
7					307.792	234.880	155.647	88.5223	39.4570	9.8693
8				411.167	332.851	241.044	156.767	88.6636	39.4664	9.8694
9			528.558	446.095	343.654	243.681	157.270	88.7311	39.4711	9.8695
10		659.910	574.223	462.841	348.712	244.949	157.523	88.7667	39.4737	9.8695
10	805.188	716.961	598.072	471.305	351.298	245.619	157.662	88.7870	39.4753	9.8696

(2) 二径間連続はりの安定解析の場合 (図.2)

座屈条件式が、 $0 < \alpha l < \pi$ ならば、

$$\alpha l \sin^2 \alpha l + 3 \sin \alpha l \cos \alpha l$$

$$-3 \alpha l \cos^2 \alpha l = 0 \quad (\text{但し、} \alpha^2 = P_{cr}/EI)$$

となることは、REDUCE によって容易に確認できる。

式(9)を代入すれば高次代数方程式が求まり、テイラー展開5次、7次、9次、11次に対する解は表. 5に示す通りであった。厳密解は 1.93である。

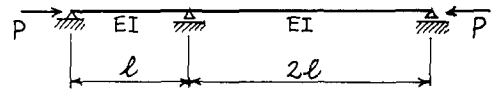


図.2 二径間連続はりの計算モデル

表. 5 厳密解との比較 (αl)

5次	7次	9次	11次	厳密解
2.0288	1.9235	1.9286	1.9283	1.93

6. 結 び

本論文では、構造解析分野における数式処理システムの効果的適用の一つの試みとして、伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析への数式処理システムの適用を検討した。数式処理システムを用いて、未知変数を含んだままマトリックスのかけ算を行い、determinant を数式で求め、代数方程式を解く数値解析プログラムに係数をひきわたすことで、自動的に解を得る方法の成立し得ることを確認した。これにより、伝達マトリックス法に基づく動的解析、安定解析で行われていた筆算、試行錯誤という手続きを回避することができる。determinant の代数方程式が、多項式の高次代数方程式になっていない場合でも、本論文で示した数値解析法は原理的に解析可能であり、プログラムの手直しだけで、今回述べたようなテイラー展開の区分的使用の必要性はなくなるであろう。今後、この点について改良を図る予定である。なお、本論文における計算例は電力中央研究所大型計算機システム(FACOM M-200)を用いて行ったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法，コンピューターによる構造工学講座 I-2-B，培風館，1970
- 2) 中村秀治・松井正一：数式処理システムの構造解析への適用に関する一検討，土木学会第38回年次学術講演会講演概要集第1部，1983
中村秀治・松井正一：REDUCEによる変厚三角形板/シェル要素剛性マトリックス成分の数式表示，土木学会第38回年次学術講演会講演概要集第1部，1984
- 3) Noor, A.K. and Andersen, C. M.: Computerized symbolic manipulation in nonlinear finite element analysis, Computers & Structures, Vol.13, pp.379~403, 1981
- 4) Korncoff, A.R. and Fenves, S.J.: Symbolic generation of finite element stiffness matrices, Computers & Structures, Vol.10, pp.119~124, 1979
- 5) 中村秀治：数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案，土木学会論文報告集，No.289, 1979
- 6) Lin, Y.K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967, 邦訳，森大吉郎・富田文治・小林繁夫・佐藤寿芳・小林暁峯：構造動力学的確率論的方法，培風館，1972
- 7) Hearn, A. C.: REDUCE USER'S MANUAL, Version 3.0, The Rand Corporation, 1983
- 8) 東京大学計算機センター研究開発部：REDUCE プログラミング資料 第一集，1984年
- 9) 伊理正夫：数値計算，朝倉書店，1981
- 10) 伊理正夫・山下 浩・寺野隆雄・小野令美：大域的収束性をもつ代数方程式の解法，京都大学数理解析研究所数理科学講究録，No.339, 1978, pp.43-69
- 11) 小野令美：Durand-Kerner-Aberth 法を用いたある種の超高次方程式の解の数値計算，情報処理学会論文誌，Vol.22, No.2, 165-168, 1981