

弾性支承が多径間連続橋の振動特性に及ぼす影響について

AN INFLUENCE OF ELASTIC SUPPORT EXERTING DYNAMIC CHARACTERISTICS
OF MULTI-SPANS CONTINUOUS BRIDGE

水田洋司*

By Yoji Mizuta

From the discrepancy between the calculated dynamic characteristics and the experimental values of multi-spans continuous bridge with elastic supports, and difference between the elasto-plastic response of the bridge to be produced by the surrender of the grand spring around the pier base and elastic response, we can understand that the stiffness at the grand foundation exerts influence on its dynamic characteristics .

In this paper, it is clarified what effects the elastic supports have on the eigenvalues and the eigenvectors of the continuous bridge with the elastic supports . First, the method that calculates the changes of the eigenvalues and the eigenvectors caused by the change of the stiffness at the elastic support , is proposed . In the numerical examples, the dynamic characteristics of the continuous beams with elastic supports are made clear by the proposed method , and the reasons for the discrepancy between the theoretical eigensolutions and the experimental values are discussed with respect to the continuous boxed girder bridge with seven spans .

1. まえがき

多径間連続高架橋の固有振動数・固有モードの実測値と理論値の差異⁽¹⁾、橋脚基礎周辺の地盤バネが塑性化したときの弾塑性応答と弾性応答の差異⁽²⁾等から、橋脚基礎周辺の地盤バネ剛性が、多径間連続高架橋の橋軸直角水平方向の固有振動数・固有モードに及ぼす影響の大きいことがうかがえる。固有振動数・固有モードが変われば、構造物の動的応答も変化するため、地盤バネ剛性が構造物の動的応答に及ぼす影響を明確にするには、それが固有振動数・固有モードに及ぼす影響を明らかにする必要がある。従って、地震の多い我が国では、地盤バネ剛性が橋の振動特性に及ぼす影響を明確にすることは重要な問題と考えられるが、その影響は定性的・定量的な面で明確にされていないようである。

本研究では地盤のバネ剛性の変化が多径間連続高架橋の固有振動数・固有モードに及ぼす影響を明確にするため、地盤バネ剛性の影響を考慮した弾性支承をもつ連続梁の橋軸直角水平方向振動について考え、各支承のバネ剛性が連続梁の振動特性に及ぼす影響、特に大きな影響を及ぼす弾性支承の位置、その大きさについて考察した。まず、弾性支承のバネ剛性の変化が固有振動数・固有モードに及ぼす影響の算定方法を提案している。次に、数値計算では、弾性支承の剛性変化が連続梁の固有振動数・固有モードに及ぼす影響を明

* 工博 八代工業高等専門学校 土木建築工学科 (〒866 八代市平山新町2627)

らかにし、また、7径間連続箱桁橋（実橋）の地盤バネ剛性が固有振動数・固有モードに及ぼす影響を調べ、それらの影響量と実測値・理論値の差異から、実測値と理論値の違いの原因について考察を試みた。最後に、理論式・数値計算から、多径間連続橋の振動特性に大きな影響を及ぼす弾性支承と系の固有振動数・固有モードの関係について述べている。

2. 解析理論

本論文では、弾性支承のバネ剛性の変化が、系の固有振動数・固有モードに及ぼす影響量を知る方法として弾性支承のバネ剛性による系の固有値（固有振動数の2乗）・固有モードの微分値を利用する。つまり、ある弾性支承のバネ剛性が単位量変化した場合に固有値・固有モードがどれだけ変化するかを明らかにして、弾性支承のバネ剛性の変化が固有振動数・固有モードに及ぼす影響量を知ろうとするものである。支承のバネ剛性による固有値・固有モードの微分値は、値の大きい方が小さいほうよりも弾性支承の剛性変化による影響の大きいことを示すと考えられる。これによって、系の固有振動数・固有モードに影響を与える弾性支承の位置、その大きさを明確にすることができるであろう。固有値・固有モードの微分は Fox⁽³⁾ によって提案された式を用いている。

2. 1 固有振動数・固有モードの微分

Fox によれば、構造物の剛性マトリックスKの任意要素 k_{ij} による固有値・固有モードの微分は次式のよ

固有値の微分

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial k_{ij}} = \phi_m^T \left(\frac{\partial K}{\partial k_{ij}} - \lambda_m \frac{\partial M}{\partial k_{ij}} \right) \phi_m \tag{1}$$

固有モードの微分

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial k_{ij}} = \sum_{n=1}^N a_{min} \phi_n \tag{2}$$

$$a_{min} = \begin{cases} \frac{\phi_n^T \left(\frac{\partial K}{\partial k_{ij}} - \lambda_m \frac{\partial M}{\partial k_{ij}} \right) \phi_m}{\lambda_n - \lambda_m} & m \neq n \text{ のとき} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial k_{ij}} \phi_m^T \phi_m & m = n \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

ここに、 λ_m ：m次の固有振動数 ω_m の2乗、 ϕ_m ：正規化されたm次の固有モード（ $\phi_m^T M \phi_m = 1$ ）、M：質量マトリックス、 ϕ_m^T ： ϕ_m の転置ベクトル、N：構造物の固有モードの全個数と表わせる。本論文では、図－1に示すような弾性支承をもつ連続梁の支承剛性の変化が橋軸直角水平方向振動に及ぼす影響を問題としているため、変化量は剛性マトリックスだけである。それ故、式(1)～式(4)では質量マトリックスの変化量 $\partial M / \partial k_{ij}$

図－1 弾性支承を持つ連続梁

-684-

を考慮する必要がない。また、弾性支承の剛性に対応する要素 k_{ij} は剛性マトリックスの対角要素となり、弾性支承 i の剛性 k_i を含んでいる。従って、弾性支承の剛性 k_i による固有値・固有モードの微分は次式のように簡単な式となる。

固有値の微分

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial k_i} = \phi_m^T \frac{\partial K}{\partial k_i} \phi_m \quad (5)$$

固有モードの微分

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial k_i} = \sum_{n=1}^N a_{m:n} \phi_n \quad (6)$$

$$a_{m:n} = \begin{cases} m \neq n \text{ のとき} & - \frac{\phi_m^T \frac{\partial K}{\partial k_i} \phi_n}{\lambda_n - \lambda_m} \\ m = n \text{ のとき} & 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{ここに、} k_i \text{ は任意の弾性支承の剛性である。} \quad (8)$$

2. 2 微分より予想される現象

式(5)の右辺の $\partial K / \partial k_i$ は、剛性マトリックスを弾性支承部の剛性 k_i で偏微分するのであるから、次式に示すように弾性支承 P_i に対応する部分のみが1で他は0要素からなるマトリックスである。

$$\frac{\partial K}{\partial k_i} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_i \quad (9)$$

従って、固有値（固有振動数の2乗）、固有モードの微分は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial k_i} = \phi_m^T \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \phi_m = \phi_{m,i}^2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial k_i} = \sum_{n=1}^N a_{m:n} \phi_n \quad (11)$$

$$a_{m:n} = \begin{cases} m \neq n \text{ のとき} & - \frac{\phi_{n,i} \phi_{m,i}}{\lambda_n - \lambda_m} \\ m = n \text{ のとき} & 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{ここに、} k_i \text{ は任意の弾性支承の剛性である。} \quad (13)$$

ここに、 ϕ_{m_i} は m 次固有モードの弾性支承 i の値

式(10)から、任意次数のモード中における弾性支承部の値が大きい場合には、その弾性支承による任意次数の固有値の変化率が大きくなることが予想される。また、式(11)～式(13)より、固有モードの微分は $1/(\lambda_n - \lambda_m)$ の大小に左右されるため、近接した固有振動数が存在する場合には、その固有振動数に対応する固有モードの変化率が、大きくなることが予想される。従って、固有モード中の弾性支承部の値が大きい系、近接した固有振動数をもつ系では、弾性支承のバネ剛性の変化によって固有振動数・固有モードが大きく変化すると考えられる。

表-1 弾性支承を持つ連続梁の諸元

弾性係数	(E)	20.58	MN/cm ²
断面二次モーメント	(I)	0.064	cm ⁴
断面積	(A)	4.8	cm ²
質量	(M)	0.38498	Kg
全長	(L)	280.0	cm
スパン長	モデル I	70.0	cm
	モデル II	40.0	cm

3. 数値計算

式(10),(11) から推論される事柄を確かめるために弾性支承をもつ2種類の連続梁と7径間連続箱桁橋について数値計算を行った。図-1に示す連続梁では弾性支承の剛性変化が固有値・固有モードに及ぼす影響を明らかにしている。これらの、モデルでは、連続梁の全スパン長(L)は一定で、弾性支承の個数が異なる。図-1の各モデルの諸元は表-1に示す通りである。図-1の連続梁で明らかになった事柄が実橋でどの程度成立するかを7径間連続

表-2 モデルの固有振動数 (Rad/sec)

箱桁橋で確かめた。また、固有振動数・固有モードの実測値と理論値の差異の原因を固有値の微分、固有モードの微分より推論した。この橋梁の諸元、モデル化は文献(1)

次数	モデル I	モデル II
	k=383.96 N/cm	k=2058.0 N/cm
1	3.496	10.708
2	3.530	10.740
3	3.607	10.783
4	3.765	10.871
5	7.362	10.959
6	9.395	11.318

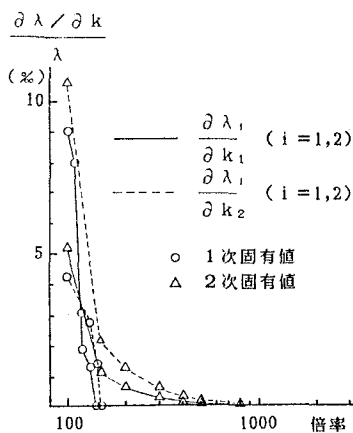


図-2 モデル I の 1 次・2 次固有値の変化率

に詳しく述べられており、ここでは割愛した。また、連続梁の固有振動数は Jacobi 法で求めた。

表-3 弾性支承部の固有モードの値 (モデル I)

支承番号 モード次数	8	15	22
1	0.3332	-0.0041	-0.3260
2	0.2545	0.3642	0.2628
3	-0.1645	0.2359	-0.1658
4	0.0007	-0.0006	0.0001
5	-0.3822	0.5404	-0.3821

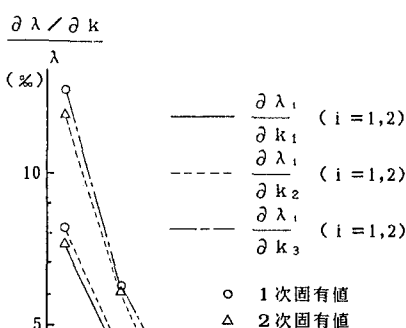


図-3 モデル II の 1 次・2 次固有値の変化率

3.1 一様な弾性支承を持つ連続梁

図-1のモデルにおいて、すべての弾性支承剛性が等しく、一様に剛性が変化する場合の1次、2次固有値の変化率の状態を図-2、3に示している。これらの図から支承剛性がある値以上になると固有値の変化率は零となり、弾性支承は剛支承と考えても差し支えなく、その値は、スパン数によって異なることがわかる。この場合、支承剛性の大きさを $\alpha EI / l^3$ (l:スパン長, I:断面2次モーメント、E:ヤング係数

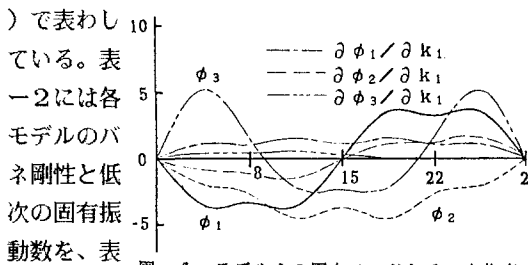


表-4 固有値の変化率の表 (モデルⅠ)

次 数	1	2	3	4	5
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}$	0.1110	0.0648	0.0270	0.0000	0.1460
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_2}$	0.0000	0.1326	0.0557	0.0000	0.2921
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_3}$	0.1063	0.0690	0.0275	0.0000	0.1460

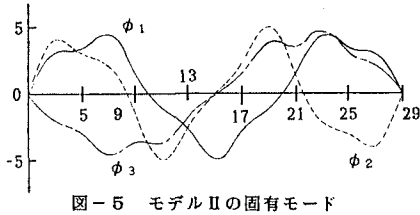


表-5 弾性支承部の固有モード値 (モデルⅡ)

番号 次数	5	9	13	17	21	25
1	-0.3354	-0.1491	0.2684	0.2684	-0.1489	-0.3347
2	-0.3039	0.1345	0.2428	-0.2433	-0.1344	0.3041
3	0.2823	0.3532	0.1579	-0.1571	-0.3530	-0.2825
4	0.1609	0.2901	0.3622	0.3623	0.2905	0.1614
5	0.1988	-0.2484	0.1108	0.1105	-0.2484	0.1990

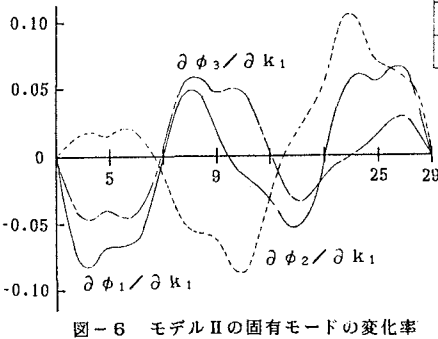


表-6 固有値の変化率 (モデルⅡ)

次 数	1	2	3	4	5
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_1}$	0.1125	0.0923	0.0797	0.0259	0.0395
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_2}$	0.0222	0.0181	0.1247	0.0842	0.0395
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_3}$	0.0721	0.0589	0.0249	0.1312	0.0122
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_4}$	0.0720	0.0592	0.0247	0.1313	0.0122
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_5}$	0.0222	0.0181	0.1246	0.0844	0.0672
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_6}$	0.1120	0.0925	0.0798	0.0260	0.0395

一3、表-4にはモデルⅠの弾性支承部の固有モード値、固有値の微分値を、表-5、表-6にはモデルⅡの弾性支承の固有モード値、固有値の微分値を表している。表-3の1次モードの弾性支承 8、22の値は弾性支承15の値に比べて大きい。それに対し、表-4の1次の微分値

$\partial \lambda / \partial k_1$ 、 $\partial \lambda / \partial k_3$ (それぞれ弾性支承 8、22) は $\partial \lambda / \partial k_2$ (弾性支承15) に比べて大きい値を示している。また、表-3の4次モードの弾性支承の値はいずれも小さく、それに対する4次の各バネに対する微分値も零である。同様に、モデルⅡでも弾性支承部の固有モードの大きいモード次数に対する微分値は相対的に大きい値を示している。図-4、5、6には、それぞれモデルⅠ、Ⅱの固有モードと固有モードの変化率を示している。表-2から、モデルⅠは1次と2次が、モデルⅡは1次、2次、3次が比較的近接していることが判る。これらのモードの変化率は比較的大きい値を示している。さらに、表-4、6から、図-4、5、6のモード変化率に対応する固有値の変化率も比較的大きい値を示していることが判かる。図-4には表していないが、 $\partial \phi_1 / \partial k_2$ (弾性支承15による ϕ_1 の微分値) は 10^{-3} のオーダーであり、表-4の $\partial \lambda_1 / \partial k_2$ は 0.0 (10^{-5} のオーダー) である。以上の事より、弾性支承部の値が大きい固有モードではその次数の固有値の変化率は大きいことがわかる。また、近接した固有振動数が存在し、その次数の固有値の変化率が大きい場合には、その次数の固有モードの変化率も大きいようである。

3. 2 大きさの異なる弾性支承を持つ連続梁

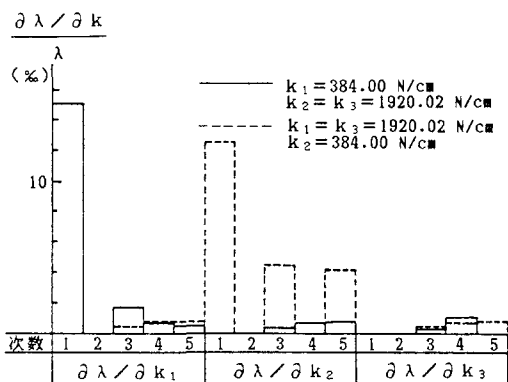


図-7 モデルⅠの固有値の変化率

弾性支承の剛性の大きさが異なる場合の固有値の変化

率を図-7, 8に示している。これらの図より剛性の小さい支承に対する固有値の変化率は大きくなり、剛性の大きい支承に対する変化率は小さい。これらの数値計算だけでは、支承剛性の変化が固有振動数・固有モードに及ぼす影響を定量的に述べることは難しいが、定性的には次のような特性がある。即ち、剛性の大きい支承の剛性が少し変化しても、系の固有振動数・固有モードは変化しないが、剛性の小さい支承の剛性が少しでも変化すれば、系の固有振動数・固有モードは大きく $\partial \phi_1 / \partial k_2$ 変化する可能性のあることを表わしている。

3.3 低次モードを使用した場合の変化率

構造物の自由度が多い場合、全部の固有振動数・固有モードを用いて変化率を計算するには多くの手間と時間を要するであろう。モード解析の利点を損なわないためには、低次の固有モードを用いて、変化率の計算が精度良く求められる必要がある。本節では、低次の固有振動数・固有モードを用いた場合の変化率の精度について調べた。計算例には、図-1(b)のモデルⅡを用い、すべての弾性支承の剛性を等しくし、支承剛性 $k_1=1286.25 \text{ N/cm}$ としている。全モード(27次)を用いて求めた変化率と5次、10次までの固有モードを使用して計算した変化率を比較すると、図-9に示すようによく一致しており、低次モードを用いても十分に変化率の計算ができることが判かる。

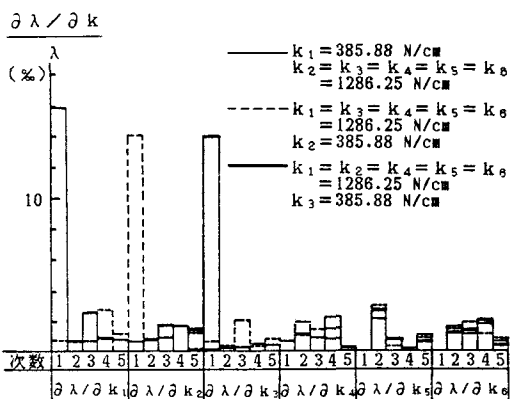


図-8 モデルⅡの固有値の変化率

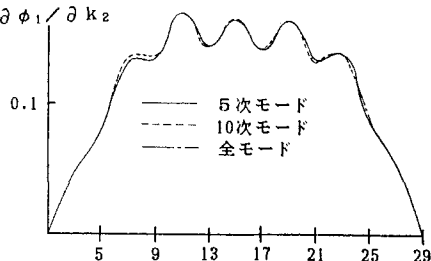


図-9 使用モード数による固有モードの変化率

3.4 7径間連続箱桁橋⁽¹⁾

図-10($k\psi$ は省略)のようにモデル化された連続箱桁橋の橋脚部のバネ剛性を表-7に、系の固有振動数・固有モードをそれぞれ表-8, 図-11に示している。図-11で判かるように、弾性支承部のモード値の大きいモードがあり、そのモード次数の固有振動数の変化率が大きくなることが予想される。また、表-8に示すように4次と5次の固有振動数が近接しており、4次、5次の固

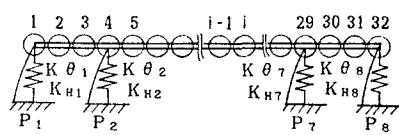


図-10 連続箱桁橋のモデル化

表-7 置換後の支点のバネ剛性

橋脚	水平バネ定数	回転バネ定数	ねじれバネ定数
	K_H (MN/m)	K_θ (MNm/rad)	K_ψ (MNm/rad)
P₁	5.3498 ($\times 10^2$)	4.6824 ($\times 10^4$)	8.9886 ($\times 10^3$)
P₂	6.9688	5.4527	9.4158
P₃	7.1324	5.2293	9.4364
P₄	9.3688	5.5909	9.4364
P₅	9.4335	5.7742	9.4364
P₆	8.7641	5.6252	9.4364
P₇	12.212	5.6850	9.4364
P₈	7.4519	4.6873	9.0503

有モードの変化率が大きくなると考えられる。3.3 節で示したように、固有値・固有モードの変化率は低次モードを用いて十分な精度で計

表-8 連続箱桁橋の固有振動数 (Rad/sec)

次 数	理 論 値 (QR法)	実 測 値
1	9.538	—
2	9.814	8.985
3	10.166	—
4	10.487	—
5	10.518	10.807
6	11.530	13.823
7	12.925	14.703
8	16.154	18.850
9	17.189	—
10	18.950	—

算できるため、本節では96個のモードのうち10次までの固有振動数・固有モードを用いて変化率を求めた。表-9に固有値の変化率を、図-12に固有モードの変化率を示している

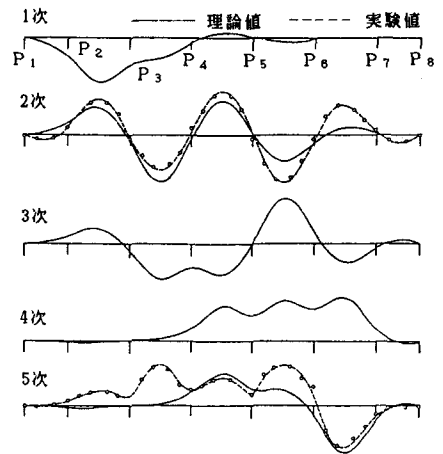


図-11 7径間連続箱桁橋の固有モード

表-9 固有値の変化率

次 数	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H1}}$	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.2481	0.0000	0.1653
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H2}}$	0.0394	0.0150	0.0050	0.0001	0.0002	0.0534	0.0000	0.1388
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H3}}$	0.0817	0.0051	0.0055	0.0000	0.0001	0.0070	0.0000	0.0908
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H4}}$	0.0027	0.0013	0.0038	0.0115	0.0175	0.0011	0.0000	0.0388
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H5}}$	0.0000	0.0005	0.0023	0.0396	0.0290	0.0000	0.0000	0.0087
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H6}}$	0.0001	0.0030	0.0076	0.0600	0.0126	0.0000	0.0010	0.0014
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H7}}$	0.0000	0.0004	0.0017	0.0092	0.0161	0.0000	0.0715	0.0002
$\frac{\partial \lambda}{\partial k_{H8}}$	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0005	0.0000	0.2406	0.0001

表-10 固有モード変化率の特徴

橋脚	固有モード変化率の最大値
P ₁	四次、五次は 10^{-4} のオーダー、他は 10^{-6} 以下
P ₂	一次、四次は 10^{-4} のオーダー、他は 10^{-5} 以下
P ₄ 、P ₆	一次、四次、五次は 10^{-4} のオーダー、他は 10^{-5} 以下
P ₃ 、P ₅ P ₇ 、P ₈	何れも 10^{-6} 以下のオーダー

。図-12には紙面の都合上一部しか図示していないが、各橋脚でのモード変化率を見ると、表-10のような特徴が見られる。各橋脚の回転バネ、振れバネによる固有値の微分値は $10^{-5} \sim 10^{-8}$ のオーダー、また、それらによる固有モードの微分値も 10^{-6} のオーダーと小さいので、表-9、表-10には各橋脚部の水平バネによる微分値のみを記している。

表-9より、1次はP₂、P₅の水平バネによる微分値 $\partial \lambda / \partial k_{H2}$ 、 $\partial \lambda / \partial k_{H3}$ が大きく、他の橋脚による微分値は小さいことが判る。2次では橋脚P₂の水平バネによる微分値 $\partial \lambda / \partial k_{H2}$ 以外は小さく、4次、5次では橋脚P₄の水平バネによる微分値が大きい値を示している。また、この橋は4次と5次の振動数が近接しているが、表-10より、橋脚 P₁、P₄、P₆で、4次、5次モードの水平バネに対する変

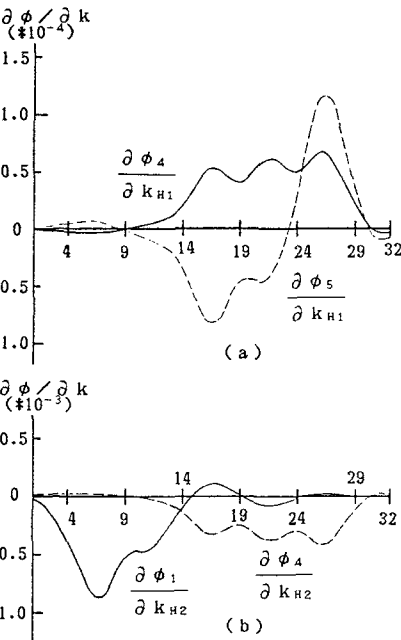


図-12 固有モードの変化率

化率の大きいことが判かる。以上の事より、図-1のモデルⅠ、モデルⅡで得られた結果が実橋でも確かめられた。即ち、バネ支承部のモード値の大きいモードに対応する次数の固有値の変化率は大きく、固有値の変化率が大きくて近接した固有振動数を持つ固有モードの変化率は大きいことが判る。

実測値と理論値の差異は、固有振動数では2次、6次、7次、8次(表-8)に、固有モードでは5次(図-11)に生じている。2次、6次、7次、8次の固有振動数に大きな影響を及ぼす橋脚は表-9の固有値の変化率より、 P_1 、 P_2 、 P_8 、5次の固有モードに大きな影響を及ぼす橋脚は表-10より、 P_1 、 P_2 、 P_4 、 P_6 である。この事より、実測値と理論値の差異には P_1 、 P_2 の橋脚の水平バネ剛性の評価が大きく影響していると考えられる。また、これらの橋脚の水平バネ剛性の大きさは P_1 、 P_2 、……の順に大きくなっている。

4. 結論

弾性支承をもつ連続梁の支承の剛性変化が連続梁の固有振動数・固有モードに及ぼす影響をまとめると、次のようである。

- (1) ある次数のモード中における弾性支承点の値が大きい場合、その支承による固有値(固有振動数の2乗)の変化率は大きい。
- (2) 固有モードの変化率は、近接固有振動数をもつ次数で大きくなる。
- (3) 弾性支承の剛性変化が固有振動数・固有モードに及ぼす影響は、剛性の大きさによって異なり、ある大きさ以上では全く影響しなくなる。すなわち、動的計算の場合には、弾性支承を剛と考えても差支えない剛性の大きさがきまる。
- (4) 各弾性支承の剛性が均一でなく異なる場合には、剛性の小さい支承の剛性変化が固有振動数・固有モードに及ぼす影響は剛性の大きい支承の変化の場合より大きい。

以上のことより、地盤バネ剛性を考慮した系の振動特性を算定する場合、次の二点に留意する必要がある。

- (1) 地盤バネ剛性の小さい支承(部)のバネ剛性は正確に算定する。
- (2) 求められた系の固有モードにおいて、支承(部)のモード値が大きい場合、その支承のバネ剛性は正確に算定する。

参考文献

- (1) 成富・高西・鳥野 他：多径間連続箱桁橋の振動特性と地震応答，九大工学集報 第53巻第5号 昭和55年10月。
- (2) 水田・平井：固有値解を用いた一弾塑性応答解析法，土木学会論文報告集 第331号 1983年3月。
- (3) Richard L. Fox :Optimization methods for engineering design, Addison-Wesley Publishing Co. pp.224-247.

(1985年10月18日受付)