

粘弾性地盤を伝播するラブ波と等価なせん断減衰振動について

Damped shear vibrations equivalent to Love waves
propagating in double layered visco-elastic media

大町 達夫* 森地重暉** 年縄 巧***

By Tatsuo OHMACHI, Shigeaki MORICHI and Takumi TOSHINAWA

It has been well-known that vibration and wave propagation are equivalent to one another. Noticing this fact sometimes leads us to easy understanding of physical characteristics of solids such as natural frequencies and vibration mode shapes. From this point of view, vibration analysis technique applied to propagation of surface waves in layered media will provide us with useful findings for earthquake engineering purposes. For this reason, Love waves and shear vibrations of surface layeres are studied here experimentally and analytically. It is shown that the unit impulse response function leads not only to the medium response factor of Love waves but reciprocal theorem, and modal response factor is defined to express ground motion in a simple form.

1. はじめに

関東地方南部のような厚い堆積物におおわれた地域では周期1～10秒程度のいわゆるやや長周期地震動と呼ばれる波動成分がその地震動に大きく寄与していることが多い。¹⁾このような比較的周期の長い地震動はエネルギーが地表面付近に集中している表面波によるものということが指摘されている。また近年高層ビルや大型貯水槽などの固有周期が比較的長い構造物が数多く建設されており、地震動のやや長周期成分が大都市に及ぼす影響が注目されている。これまで表面波を簡潔に取り扱った例は少ないが、これは表面波が分散性あるいは位相速度と群速度の違いなど、一見複雑な性質を有しているためと思われる。

ところで物理学の分野では表面波は一種の固有振動であると解釈されている。²⁾また一方では、複雑な構造物の振動解析が普及してきたことに見られるように土木技術者の振動問題に対する知識はかなりの水準に達しているように見受けられる。従って表面波に関連する複雑な波動問題もこれと等価な振動現象として解くことができれば、それも得策であろう。このような観点からここでは変位方向が伝播方向に対して直交する成分のみを持つラブ波について模型実験及び二層構造におけるせん断振動を減衰を無視した場合と考慮した場合についてその固有値解を導き、その単位衝撃応答を求めて本来、表裏一体の関係にある振動と波動の問題を結びつけることを試みた。

* 工博 東京工業大学助教授 大学院総合理工学研究科 (横浜市緑区長津田町 4259)

** 工博 東京理科大学助教授 理工学部土木工学科 (千葉県野田市東亀山町山崎 2641)

*** 学 東京工業大学大学院生 大学院総合理工学研究科 (横浜市緑区長津田町 4259)

2. 模型実験

模型地盤は簡単のため、下端を固定端とするような均質地盤を考え、ラブ波を対象としているので、transverse方向成分にのみ注目することにした。実験で用いた媒質はアクリルアミドと呼ばれるケミカルグラウト材であり、弾性波速度が数m/sec程度であるため実験を行なう上でその取り扱いが容易である。また下端をアルミニウムプレートあるいはプラスチックプレートに密着させたが、これによって供試体は相対的に下層が剛な二層地盤の模型と考えることができる。

実験はTable 1 のようにA, B, C, Dの4パターンで行ない、A, Bは表層上の中央点をtransverse方向に定常加振するもの、Cは振動台に模型地盤をのせて定変位加振するものであり、最後のDはFig.1 のように浴槽状の器の中に模型地盤を作製して、この模型地盤上の1点P0を単発加振して、これによって発生した波のtransverse方向成分を3点P1, P2, P3で拾い出すというものである。但しこの場合の単発加振はtransverse方向成分が出やすいように角材をこの点において押さえてその木口を測線と直角な方向に叩くというものであり、地盤構造の簡易探査で用いられる板叩き法と同様なものである。各地盤の層厚、長さ、幅、せん断波速度、加振方法及び、端部での拘束条件をTable 1 に示す。表中、fixed は固定端、freeは自由端を表わす。

振動実験A, B, Cでは加振振動数を徐々に上げていって定常波を生じさせその共振振動数を探した。Photo.1は、実験Cにおいて観察された鉛直方向m次及び水平方向n次の振動モードを示している。どの写真も水平方向にきれいな定常波ができており、また(b),(c)では鉛直方向に節が生じている(鉛直1次)。

共振振動数f(Hz)と得られた水平方向の腹の数nからこの波の波長λ(cm)及び位相速度C(cm/sec)を次式によって求めた。

$$\lambda = 2L / n, \quad C = f \lambda$$

そして、このλとCをそれぞれ層厚H及びせん断波速度Vで除した無次元値λ/HとC/Vとも表示したのがTable 2 である。またこのλ/HとC/Vの関係を表わすとFig.2 のようになる。図中実線はラブ

Table 1 Dimensions and boundary conditions of specimens.

Spec.	Height in mm	Length in mm (B.C.)	Width in mm (B.C.)	Shear Wave Velocity in cm/s	Excitation Mode
A	90	600 (Fixed)	100 (Free)	170	Harmonic
B	50	600 (Fixed)	100 (Free)	145	Harmonic
C	60	600 (Fixed)	600 (Free)	281	Harmonic
D	44	1080 (Fixed)	1080 (Fixed)	300	Impulsive

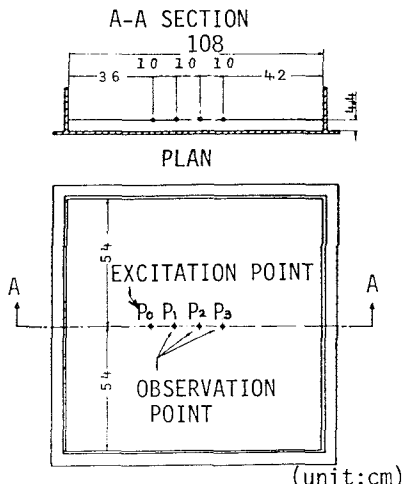
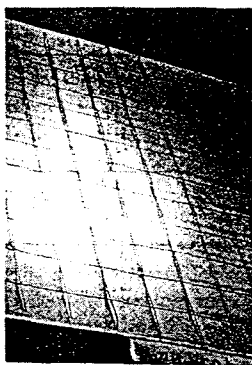
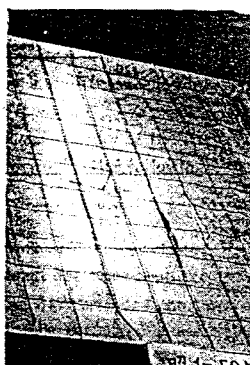


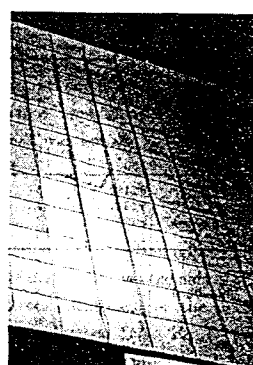
FIG.1 Location of excitation and observation points of Spec.D.



(a) m=0, n=7 f=19.6Hz



(b) m=1, n=1 f=33.9Hz



(c) m=1, n=3 f=35.5Hz

Photo 1 Examples of vibration modes observed in Specimen C.

Table 2 Experimental results of harmonic excitations.

Specimen	Frequency f (Hz)	Number of Antinodes N	Phase Velocity c (cm/s)	Wave Length λ (cm)	Dimensionless Phase Velocity c/v	Dimensionless Wave Length λ/H
A (H=9.0cm)	4.60	1	5.52×10^2	120	3.25	13
	5.90	3	2.36×10^2	40.0	1.39	4.4
	7.90	5	1.90×10^2	24.0	1.12	2.7
	10.1	7	1.73×10^2	17.1	1.02	1.9
	17.0	9	2.26×10^2	13.3	1.33	1.5
	19.0	11	2.07×10^2	10.9	1.22	1.2
	22.0	13	2.03×10^2	9.23	1.19	1.0
B (H=5.0cm)	8.10	3	3.24×10^2	40.0	2.23	8.0
	9.30	5	2.23×10^2	24.0	1.54	4.8
	10.9	7	1.86×10^2	17.1	1.28	3.4
	12.6	9	1.70×10^2	13.3	1.17	2.7
C (H=6.0cm)	12.6	1	1.51×10^3	120	5.37	20
	13.0	3	5.20×10^2	40.0	1.85	6.7
	16.2	5	3.89×10^2	24.0	1.38	4.0
	19.6	7	3.35×10^2	17.1	1.19	2.9
	22.8	9	3.03×10^2	13.3	1.08	2.2
	27.0	11	2.96×10^2	10.9	1.05	1.8
	31.2	13	2.88×10^2	9.23	1.02	1.5
	33.9	1	4.07×10^3	120	14.5	20
	35.5	3	1.42×10^3	40.0	5.05	6.7

波の基本モード、破線は1次モードの理論分散曲線である。

Dの波動実験によって各測点P1,P2,P3で得られた波形及びそのパワースペクトルを求めるとFig.3のようになる。

またこれらの波形のフーリエ位相スペクトルから、卓越している振動数付近の波の各観測点における位相を求めるとTable 3のようになる。ここで ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はそれぞれP1、P2、P3における位相で、 ϕ_{21} は ϕ_2 と ϕ_1 の位相差、 ϕ_{31} は ϕ_3 と ϕ_1 の位相差である。これらから次式によって波の位相速度C(cm/s)及び波長λ(cm)を求めた。

$$\lambda = 2\pi \frac{\Delta l}{\Delta \phi}$$

$$C = 2\pi f \frac{\Delta l}{\Delta \phi}$$

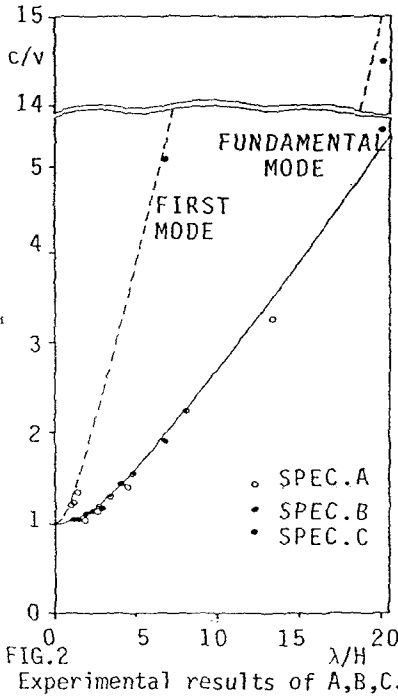


Fig.2 Experimental results of A,B,C.

但し Δl は各観測点間の距離を表わす。これによって得られたλ/HとC/Vの関係はFig.4のようになる。Fig.2、Fig.4のいずれの図を見てもわかるように実験によって

Table 3 Dispersion characteristics for Spec.D.

f(Hz)	ϕ_1 (rad)	ϕ_2 (rad)	ϕ_{21} (rad)	c(cm/s)	λ(cm)	c/v	λ/H
17.6	1.05 π	0.765 π	0.280 π	1.26×10^3	71.4	4.19	16.2
		0.372 π	0.673 π	1.05×10^3	59.4	3.49	13.5
19.5	2.24 π	1.62 π	0.620 π	6.29×10^2	32.3	2.10	7.33
		1.06 π	1.18 π	6.61×10^2	33.9	2.20	7.71
21.5	1.74 π	0.117 π	1.63 π	5.29×10^2	24.6	1.76	5.59
23.4	3.43 π	2.35 π	1.09 π	4.31×10^2	18.4	1.44	4.19
		1.49 π	1.94 π	4.82×10^2	20.6	1.61	4.68
25.4	3.19 π	1.96 π	1.23 π	4.16×10^2	16.3	1.38	3.70
		0.658 π	2.53 π	4.02×10^2	15.8	1.34	3.60

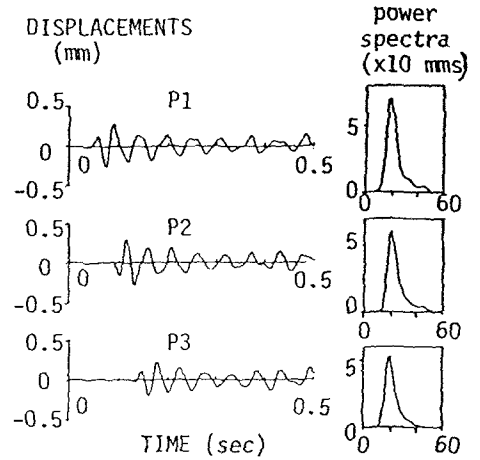


FIG.3 Displacement waveforms with their power spectra.

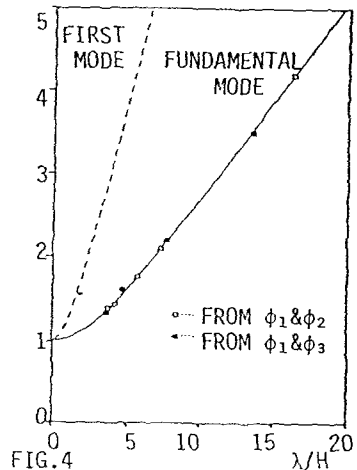


FIG.4 Experimental results of D.

得られた値がラブ波の理論分散曲線上の値とほぼ等しいから、本実験の模型地盤にはラブ波の特性をもつ波動成分が生じたと考えられる。

3. 2層完全弾性地盤のせん断振動

前述の実験で下層が剛で水平な均質地盤上にラブ波の特性を持つ波動成分が生じたことがわかったが、ここではFig.5(a)のような二層構造の完全弾性地盤に生じるせん断振動について考えてみることにする。但し、変位 u は紙面に垂直な y 方向のみ許すものとし、

密度は上下層で等しく、 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ とし、せん断剛性は上下層でそれぞれ G_1, G_2 とする。

粘性減衰を考えない完全弾性地盤を伝わるラブ波の支配方程式は

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(z) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

である。境界条件は

$$z=0 \text{ で変位及び応力が連続,} \quad (2)$$

$$z=H \text{ で応力がゼロ}$$

である。

ところでFig.5(b)のような鉛直障壁がある地盤のせん断自由振動の方程式は³⁾(1)と同一であり、境界条件は(2)の他に両端($x=0, L$)の変位がゼロという条件が加わる。このせん断自由振動の解は

$$u(x, z, t) = \sum_m \sum_n U_n(x) W_m(z) \exp(i\omega_{mn} t) \quad (3)$$

$$U_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \equiv \sin k_n x$$

$$W_m(z) = \begin{cases} \cos \sqrt{\omega_{mn}^2/v_1^2 - k_n^2} (z-H) \equiv \cos \xi_1 (z-H) & (0 \leq z \leq H) \\ \cos \sqrt{\omega_{mn}^2/v_1^2 - k_n^2} H \cdot \exp \sqrt{k_n^2 - \omega_{mn}^2/v_2^2} z \equiv \cos \xi_1 H \cdot \exp(\xi_2 z) & (z < 0) \end{cases}$$

$$k_n = n\pi/L \quad \omega_{mn}/v_2 < k_n < \omega_{mn}/v_1$$

$$\xi_1 = \sqrt{\omega_{mn}^2/v_1^2 - k_n^2}$$

$$\xi_2 = \sqrt{k_n^2 - \omega_{mn}^2/v_2^2}$$

となる。この固有関数のうち $m=0, n=1$ のものを絵に描くとFig.6のようになるが、これは同一層構造を伝わるラブ波の変位分布と同

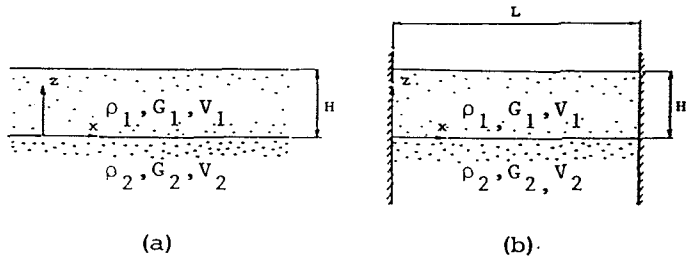


FIG.5
Profiles of elastic layers

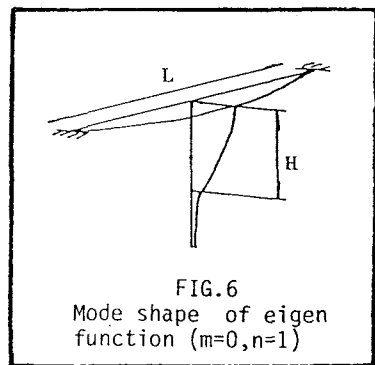


FIG.6
Mode shape of eigen
function ($m=0, n=1$)

じである。このせん断振動の固有円振動数 ω_{mn} は次の方程式

$$\frac{G_1}{G_2} \tan \zeta_1 H - \frac{\sqrt{(\omega_{mn}^2 / v_1 - \omega_{mn}^2 / v_2) H^2 - \zeta_1^2 H^2}}{\zeta_1 H} = 0 \quad (4)$$

を解くことによって求められるが、これはラブ波の特性方程式と同一である。またこの式によって得られた ω_{mn} から位相速度 $C_{mn} (= \omega_{mn} / k_n)$ と $\lambda_n (= 2L / n)$ を求め、両者の関係をプロットすればラブ波の分散曲線上にのる。ラブ波の C と λ の関係とこのせん断振動によって得られた C_{mn} と λ_n の関係との唯一の相違はせん断振動によって得られた値は離散的になることである。これは地盤中に鉛直障壁を与えて有限長の地盤についてのせん断振動を考えているためであり、モード番号 m, n をある値に固定してこの鉛直障壁の長さを連続的に変化させてやればラブ波のついで λ と C との連続的な関係を求めることができる。結局、このせん断振動モードは、ラブ波が左右の鉛直障壁で反射した結果生じる定常波と言える。

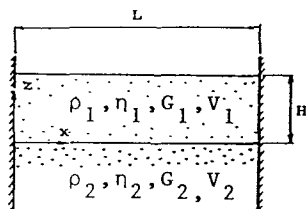


FIG.7
Profile of visco-elastic layer

4. 2層粘弾性地盤のせん断減衰振動

前章で2層完全弾性地盤を伝わるラブ波と地盤のせん断振動との関連を示すことができたのでここではこれをより一般化するために粘弾性地盤に対して同様な試みをする。土の内部減衰は速度に依存するものとこれに依存しないものがあることが知られている。ここでは最も単純で、しかも振動解析に多く用いられているVoigt型のモデルを採用してみる。粘性係数 η をもつFig.7のような二層地盤のせん断自由振動の方程式は

$$\rho(z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(z) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + \eta(z) \left[\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right] \quad (5)$$

$$\rho(z) = \rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$G(z) = \begin{cases} G_1 & (0 \leq z \leq H) \\ G_2 & (z < 0) \end{cases} \quad \eta(z) = \begin{cases} \eta_1 & (0 \leq z \leq H) \\ \eta_2 & (z < 0) \end{cases}$$

であり、境界条件は

$z=0$ で変位及び応力が連続、

$z=H$ で応力がゼロ

である。ここで

$$u(x, z, t) = \sum_m \sum_n U_n(x) W_m(z) \exp(i \omega_{mn} t) \quad (6)$$

$$U_n(x) = \sin k_n x$$

$$W_m(z) = \begin{cases} \cos \zeta_1 (z-H) & (0 \leq z \leq H) \\ \cos \zeta_1 H \cdot \exp(\zeta_2 z) & (z < 0) \end{cases}$$

(6) が (5) の解となる条件を求めれば

$$\eta(Z)/G(Z)=\text{const.} \quad (7)$$

を得る。即ち式 (7) の条件が成り立つとき粘弾性地盤の固有関数は弾性地盤の固有関数で代用することができるが $i\omega_{mn}^*$ は ω_{mn} を無減衰時の固有円振動数とすれば

$$i\omega_{mn}^* = -h_{mn}\omega_{mn} + i\omega_{mn}\sqrt{1-h_{mn}^2} \equiv -h_{mn}\omega_{mn} + i\omega_{Dmn} \quad (8)$$

$$h_{mn} = \frac{\eta(Z)}{2G(Z)}\omega_{mn}$$

となり、1 自由度系の減衰自由振動数と同様の表現が得られる。

更に h_{mn} が 1 に比して著しく小さいということを考慮すれば、 $\omega_{Dmn} \approx \omega_{mn}$ という言いえるであろう。

$$\text{また} \quad \omega_{mn} = \frac{2\pi}{T_{mn}} \quad \text{であるから} \quad h_{mn}T_{mn} = \pi \frac{\eta(Z)}{G(Z)}$$

となる。ここで右辺は (7) から一定値であるので結局 $hT = \text{一定}$ という関係が得られる。この関係は建築物や道路橋⁴⁾で従来経験的に知られている条件と同等であり、このことを使えば地盤振動が構造物の振動と同様に扱える可能性を示すものと思われる。

次にこの 2 層粘弾性地盤の単位衝撃応答について考えてみることにする。上層地盤中の 1 点に y 方向の外力を与えた時のせん断振動の方程式は

$$\rho(Z)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(Z)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + \eta(Z)\left[\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial t\partial z^2}\right] + f(x, z, t) \quad (9)$$

であり、この解は基準座標 Q_{mn} を用いて

$$u(x, z, t) = \sum_m \sum_n U_n(x) W_m(z) Q_{mn}(t) \quad (10)$$

今、この式を (9) に代入して固有関数の直交性即ち

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z) W_i(z) W_j(z) dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (11)$$

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n'\pi x}{L} dx = 0 \quad (n \neq n') \quad (12)$$

を利用すると m, n 次の基準座標における運動方程式は

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + 2h_{mn}\omega_{mn}\dot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) = F_{mn}(t)/M_{mn} \quad (13)$$

$$\text{となる。但し、} \quad F_{mn}(t) = \int_{-\infty}^H \int_0^L \frac{G(z)}{\rho(z)} U_n(x) W_m(z) f(x, z, t) dx dz$$

$$M_{mn} = \int_{-\infty}^H \int_0^L G(z) U_n^2(x) W_m^2(z) dx dz \quad (14)$$

である。今、点 (x_0, z_0) に単位衝撃力を与えるとすれば、Dirac のデルタ関数 $\delta(\cdot)$ を用いて

$$f(x, z, t) = \delta(x - x_0) \cdot \delta(z - z_0) \cdot \delta(t) \quad (15)$$

と表わせる。式(9)～(15)から基準座標の単位衝撃応答 $q_{mn}(t)$ は次のようになる。

$$q_{mn}(t) = \frac{4}{\rho H L} \frac{G_1 H A_L}{\omega_{Dmn}} \sin k x_0 \cdot \cos \zeta_1 (z_0 - H) \cdot \exp(-h \omega_{mn} t) \cdot \sin \omega_{Dmn} t \quad (16)$$

ここで

$$A_L = \frac{\zeta_1 H}{G_1 H} \frac{\tan \zeta_1 H}{(G_2/G_1)^2 \cos^2 \zeta_1 H + \zeta_1 H \tan \zeta_1 H + \sin^2 \zeta_1 H} \quad (17)$$

である。式(17)で与えられる A_L は Harkrider が medium response あるいは amplitude response factor と呼んだものと等価である。⁶⁾ 最終的に、地盤内の変位は次のように表わせる。

$$u(x, z, t) = \sum_m \sum_n \frac{4}{\rho H L} \frac{G_1 H A_L}{\omega_{Dmn}} \sin k x_0 \cdot \cos \zeta_1 (z_0 - H) \cdot \exp(-h \omega_{mn} t) \cdot \sin \omega_{Dmn} t \quad (18)$$

この変位は障壁の間隔が L の粘弾性地盤のせん断振動によって発生するものであるが式中の A_L/ω_D は L によらずこの層構造と振動数から決まる量であり、各振動数に対するモードの地盤振動変位に対する寄与率を示すものといえる。前述のように $\omega_D \approx \omega$ であるので粘弾性地盤でのこの値は、実質的に弾性地盤における値 A_L/ω_D とほぼ等しい。ここではこの値を modal response factor と呼ぶことにして $m=0, 1, 2$ の場合のこの値と周期との関係を何種類かの剛性比 G_2/G_1 について示したのが Fig.8 である。但し両者とも上層地盤の代表的物理量でそれぞれ無次元化している。これらを見てわかることは剛性比が大きいときは顕著なピークが存在し特に基本モードで剛性比が無限大のとき $T V_1/H = 4$ のときに振幅が最大となるいわゆる $1/4$ 波長則が成立するということである。また鉛直方向の次数が大きくなるに従ってピークを与える周期及び振幅も約 $1/3, 1/5$ となっていくことがわかる。ところで2章で述べた供試体Dを用いた波動実験によって得られた波形には20Hz程度の波動成分が卓越していたことがFig.3 からわかるが、この地盤の層厚

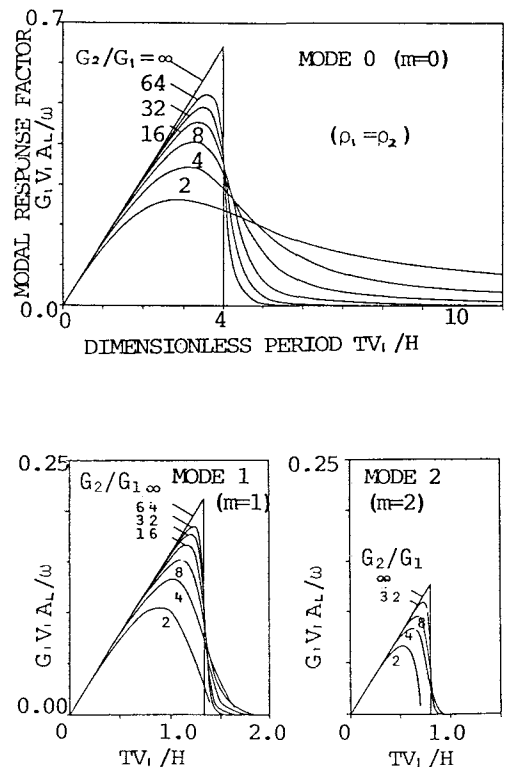


FIG.8 Modal response factors plotted against dimensionless periods.

が4.4cm,せん断波速度が300cm/sであったことから、 $T V_1 / H$ の値を求めれば $(1/20) 300/4.4=3.4$ となる。

これは厳密な $1/4$ 波長則が成立する値、即ち4よりやや小さく、模型地盤に対する基盤の剛性比が有限ではあるがかなり大きいことを示すものであり、理論と実験との整合性がこれからもうかがえる。

5. 結論

本文に示した実験及び計算から得られた結論をまとめれば次のようになる。

(1) 模型地盤を正弦加振して観察される定常波はラブ波の性質を有していることが実験的に確かめられた。また障壁で囲まれた2層弾性地盤のせん断自由振動解はラブ波の解と一致することが解析的に導かれた。これらによって、地盤のせん断振動モードからラブ波の特性が容易に理解できることを示した。

(2) Voigt型の減衰を持つ粘弾性地盤のせん断振動モードは粘性係数が剛性率に比例するという条件が成り立てば弾性地盤と同じ振動形となる。またこの条件は従来、構造物の振動性状について経験的に知られている $h/T = \text{一定}$ という条件と同等であるので、粘弾性地盤の動的解析はこの条件によって大幅に簡略しうる。

(3) 2層粘弾性地盤の簡略な単位衝撃応答関数を誘導した。この過程でmodal response factorを新たに定義し、その有用性を例示した。

最後に、本論文では有限長の地盤のせん断減衰振動のモードがラブ波の特性をもつことを示し得たので、このことを利用して不整形地盤を伝播するラブ波を振動解析と同様の手法によってシミュレートし、その特性を解明していきたいと考えている。

参考文献

- 1) 瀬尾和大：厚い堆積層の存在により励起されるLOVE波、地下深部の地盤構造が地表の地震動に及ぼす影響、PP.124-129、1981。
- 2) 田治米鏡二：小爆破実験と表面波の研究、地震波の生成・伝播に関する実験、P.88、1976。
- 3) 畑中元弘：突堤の自由振動について、土木学会誌、38-10、PP.11-15、1951。
- 4) Hiroyoshi KOBAYASHI : DAMPING COEFFICIENTS OF STRUCTURAL VIBRATION RELATED TO SUBSOIL CONDITIONS, Proc. of the 5th W.C.E.E. , session 5c 232,1973.
- 5) 岩崎敏男：道路橋の耐震性に関する研究、土木研究所資料、PP.159、1984。
- 6) D.G.Harkrider:Surface Waves in Multilayered Elastic Media I. Rayleigh and Love Waves from Buried Sources in Multilayered Elastic Half-space,Bulletin of the Seismological Society of America. Vol.54,No.2,pp.627-679,1964.