

確率変数のモデル化における混合分布のあてはめ法

A CURVE-FITTING METHOD OF COMBINED DISTRIBUTION
IN PROBABILISTIC MODELING OF RANDOM VARIABLES

久保雅邦*・石田良三**・中島裕之***

By Masakuni KUBO, Ryoza ISHIDA and Hiroyuki NAKAJIMA

This paper presents a curve-fitting method of combined distribution by using the statistics of measured data, which will be a useful technique in probabilistic modeling of random variables, especially needed, for example, in the analysis of load combination for structural design. Combined distributions are classified and defined into two kinds of types, a jointed type and a mixed type. The basic idea of fitting proposed in this study is to apply the least square method as well as the statistics of moments observed from data concurrently to the statistical inference of distribution parameters. The methods of numerical calculation for both types of combined distributions are practically developed, in which the least square method as for two parameters is performed equivalently by numerical convergence in contour map of the function. Numerical examples are also given for both cases.

1. まえがき

今日、構造物設計を対象とした構造工学において、確率統計論に基づく研究分野への関心は高く¹⁾各方面で研究が進められている。たとえば、風荷重や地震荷重をはじめとする荷重作用の不確定要因に対しては、確率論的手法による再現期待値の推定が不可欠であり、実際の構造物設計において重要な役割を果たしている^{2), 3)}。さらに、部材強度の評価や各種不確定要因の組合せ問題から⁴⁾、最近では設計における人的要因に対しても積極的なアプローチが見られ⁵⁾、この分野の研究範囲は今後さらに進展するものと思われる。

構造物設計に確率論的手法を導入するにあたっては、各種の不確定要因をできるだけ適切な確率変数（あるいは確率過程）を用いてモデル化し、観測データや理論解によってより正確にその確率特性を評価する必要がある。そのようなモデル化によって、構造物の安全性をより正しく評価することができ、ひいては設計の合理化を推進することができよう。しかしながら、たとえば土木構造物に作用する風荷重や地震荷重などでは収集できる観測データに限界があり、このようなデータを用いて行う確率論的な評価には自ずと限界があることを十分に認識しなければならない。確率論の評価が決して万全ではなく、使用するデータの数や精度等に応じて適用可能な範囲を見極める必要があるが⁶⁾、それ故にこそ、各種の不確定要因に対してより正確なモデル化をすることが重要な課題となる。

本研究では、このような確率論的アプローチにおける基礎的な研究として、観測データを用いて確率変数

* 工修 総合技術コンサルタント 技術部課長代理 (〒533 大阪市東淀川区東中島3-5-9)

** 工修 総合技術コンサルタント 技術部 (〒533 大阪市東淀川区東中島3-5-9)

*** M.S. 阪神高速道路公団 工務部係長 (〒541 大阪市東区北久太郎町4-68)

のモデル化を行う際に、混合分布を適用する場合のあてはめ法について検討した。従来、確率変数のモデル化では既存の単一分布関数を用いることが多いが、たとえば特定の地域における年最大風速記録に対するあてはめ⁷⁾や、活荷重実態調査における車両重量に対する例⁸⁾などでは混合分布を用いる方が適切であるとされている。ところが、具体的に混合分布をあてはめるにあたって確立された方法はなく、またこれまでに用いた方法では必ずしも十分に安定した解が得られていない⁹⁾。

そこで、本研究ではより実用的なあてはめの方法を得ることを目的として、混合分布の考え方をまとめ、解法の基礎的な検討を行った。ここでは、観測データの特性に応じて混合分布の種類を接合型と混在型とに分類し、それぞれの考え方をまとめるとともに具体的なあてはめの方法を整理した。本研究のあてはめ法は、観測データの積率と分布のあてはめにおける2乗推定誤差とを用いて母数の統計的推定を行うもので、従来より単一分布関数のあてはめに用いられている積率法と最小2乗法とを併用したものである。ただし、最適な解の算出は収束計算によって行い、実用的に十分安定した混合分布のあてはめが可能となった。今後、構造工学の分野で利用されるであろう各種の確率論的アプローチにおいて、基礎的な一手法として有用と思われる。

2. 混合分布の種類

確率変数 X の確率分布関数 $F_X(x)$ あるいは確率密度関数 $f_X(x)$ が、2種類の確率分布関数 $F_1(x)$ 、 $F_2(x)$ あるいは確率密度関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ を用いてそれぞれ構成される場合、 $F_X(x)$ や $f_X(x)$ をここでは混合分布（あるいは複合分布）と呼ぶ。 $f_1(x)$ や $f_2(x)$ はそれぞれ単一の確率分布とし、ここでは便宜的に原構成関数と呼ぶことにする。それらは、一般には既存の確率密度関数を用いるものとする。

次に、混合分布 $f_X(x)$ を構成する $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の変数範囲によって、混合分布の種類を接合型混合分布と混在型混合分布とに大別し、それぞれ次のように定義する。

(1) 接合型混合分布

$$f_X(x) = \begin{cases} q_1 f_1(x) & (-\infty < x < x_0) \\ q_2 f_2(x) & (x_0 \leq x < \infty) \end{cases} \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 $q_1 f_1(x_0) = q_2 f_2(x_0)$ $(0 < q_1, q_2) \dots\dots\dots(2)$

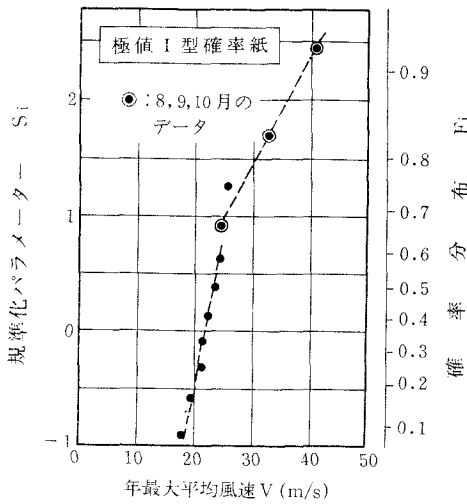
$$q_1 F_1(x_0) + q_2 \{1 - F_2(x_0)\} = 1.0 \quad (0 < q_1, q_2) \dots\dots\dots(3)$$

(2) 混在型混合分布

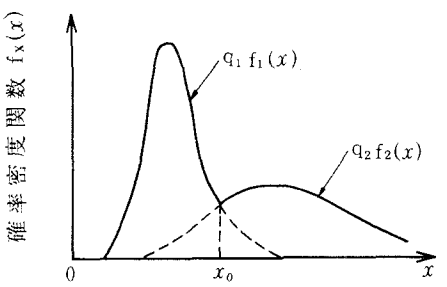
$$f_X(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) \quad (-\infty < x < \infty) \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 $p_1 + p_2 = 1.0$ $(0 < p_1, p_2 < 1.0) \dots\dots\dots(5)$

ここに、パラメーター q_1 、 q_2 、 p_1 、 p_2 は原構成関数の混合の程度を表す定数で、混合分布が決定されるまでは未知変数となる。また、 x_0 は接合型混合分布の場合に $f_1(x)$ と $f_2(x)$ とを接ぎ合わせる境界値を表わし、基本的には未知変数としてその最適解を求めることが望ましいが、ここでは解法をより簡便にするために確定値として与えるものとする。さらに、式(1)と式(4)ではそれぞれ $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を表わす変数 x の存在範囲を $-\infty < x < \infty$ に仮定しているが、たとえば対数正規



(a) 確率分布 (確率紙)



(b) 確率密度関数

図-1 接合型混合分布の例
(文献10)より)

分布 ($0 \leq x < \infty$) のように存在範囲が限定される場合には、その定義に応じて式(1)と式(4)の変数範囲を考えるものとする。混合分布の確率分布関数 $F_X(x)$ は、次の関係式から求められる。

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx \quad (-\infty < x < \infty) \dots (6)$$

ここで、接合型混合分布とは図-1の例に示すように¹⁰⁾、変数 x の特定の値 $x = x_0$ を境界にして2種類の確率分布のそれぞれ一部分を接ぎ合わせて構成される。たとえば、特定の地域における年最大風速記録のように、変数 x の分布の上側領域と下側領域における観測データが異なる要因に支配される場合に良く適合する。この場合では、一般に台風と季節風とによって年最大風速記録が形成され、上側領域が台風、下側領域が季節風によるものと考えられる。その境界値付近では両者の要因による観測データが混在するが、確率変数のモデル化として2種類の確率分布を接ぎ合わせて構成するもの考える。

式(2)による条件は、確率密度関数 $f_X(x)$ が $x = x_0$ で連続することを表わし、式(3)は $F_X(\infty) = 1.0$ となる条件を表わす。もし、 $q_1 = q_2 = 1.0$ とおき、式(2)の条件だけは満足しないモデル化をするならば、一般的な確率紙を用いて接合型混合分布のあてはめができる。つまり、確率紙の上で、

2つの回帰直線や曲線をそれぞれ単独に求めれば良い。この場合、 $x = x_0$ において確率分布関数 $F_X(x)$ は連続するが一般には折れるため、その結果確率密度関数 $f_X(x)$ は連続しない。しかしながら上記の例にもあるように、通常の工学的な観測データに対して確率密度関数が連続しないモデル化はむしろ不自然であり、ここでは式(2)と式(3)の双方の条件を満足する接合型混合分布を定義する。

一方、混在型混合分布とは図-2の例に示すように⁸⁾、2種類の原構成関数の変数範囲が混ざり合いながら構成される。図-2は活荷重実態調査から得られた大型車種の車両重量の例を示すが、双峰分布を形成している2種類の観測データがそれぞれ異なる要因に支配されながらも、それらの間に明確な大小関係が見られない場合に良く適合する。この例では、分布の上側領域が積載車、下側領域が空車を表わしていると考えられるが、2種類の観測データを分離して収集することができず、その結果混合分布を用いる方が適切と考えられる。

ところで、言うまでもなく混合分布を用いることの主旨は、観測データから推定される変数範囲の全体にわたって良く適合するモデル化を行うことにある。たとえば、確率変数の組合せを考える場合¹¹⁾では、組み合わされる個々の確率変数に対して変数範囲の全体を良く表わすモデル化が必要となり、単一の確率分布ではそれが難しい場合に混合分布の適用が必要となる。これに対して、分布の裾部や一部分のみを良く表わすことができる場合には、図-1や図-2に示した例においても単一の確率分布によってモデル化することができる。また、混合分布を適用する場合に接合型と混在型のどちらを用いるかは、観測データの分布特性や不確定要因の持つ意味に応じて判断すれば良いものと思われる。ここでは、そのような個々の判断には触れず、あてはめの具体的な方法を中心に示す。

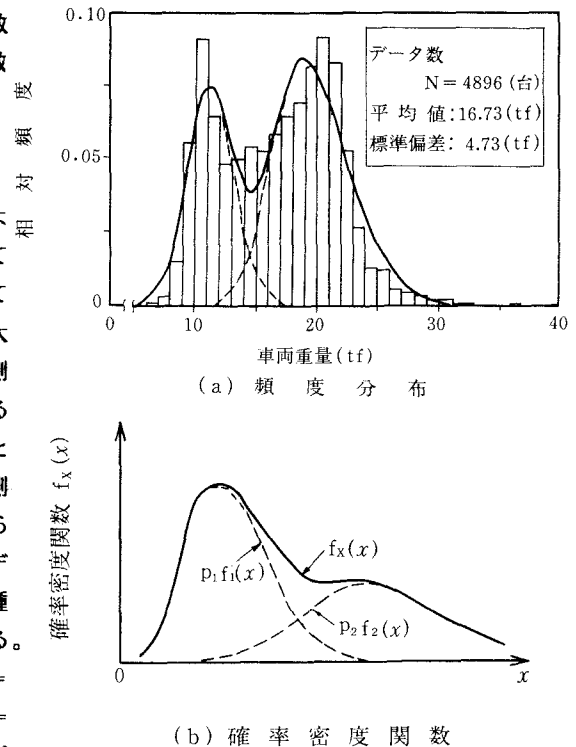


図-2 混在型混合分布の例 (文献8)より)

3. あてはめ法の基本的な考え方

(1) 従来のあてはめ法

観測データを用いて単一の確率分布のあてはめ、言い換えれば母数の統計的推定をする方法には、確率紙による方法、積率法、最尤法、あるいは最小2乗法等がある¹²⁾。それぞれ一長一短があるが、一般にはどの方法を用いても実用的には十分なあてはめができると考えられる。

一方、前章に定義した混合分布のあてはめでは、現在のところ確立された方法がない。勿論、確率紙上でのプロットや頻度分布を用いて目視による

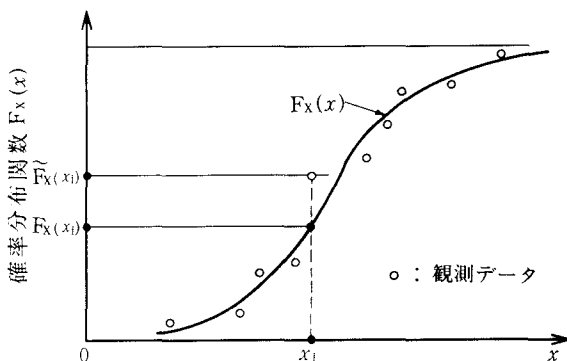


図-3 観測データと確率分布の関係

あてはめを行うこともできるが、より正確なモデル化を行うには解析的な方法によって母数の統計的推定をすることが望ましい。いま、原構成関数として既存の確率分布を使うとすると、一般には $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ にはそれぞれ2つずつの未知母数を含み、したがって接合型、混在型ともに混合分布をあてはめる際の未知変数の数は6つとなる。ただし、原構成関数の未知母数の数が2つではない場合には、全体の未知変数の数は変わる。いずれにしても、観測データを用いて混合分布のあてはめをするということは、上記した数の未知変数を決定する問題に帰着する。

著者らは、活荷重実態調査における車両重量のモデル化に際して、最小2乗法によって混合分布の未知変数を算定する方法を用いたが^{8), 9)}、その方法を簡単に示す。図-3に示すように、観測データ x_i ($i=1, 2, \dots, N$) を用いてあてはめる確率分布関数 $F_X(x)$ の2乗推定誤差 E を次式で与える。

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F_X(x_i) - \tilde{F}_X(x_i)]^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $\tilde{F}_X(x_i)$ は観測データの順序統計における i 番目の経験的確率分布を表わし、ここではGumbelによる次式¹³⁾を用いる。

$$\tilde{F}_X(x_i) = \frac{i}{N+1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (8)$$

上記したように、一般的な場合として $f_1(x)$ が A_1 と B_1 、 $f_2(x)$ が A_2 と B_2 のそれぞれ2つの母数（ただし、母数そのものあるいは母数の関数を代表的に表わすものとする）を含む場合を考えると、 E はこれらの母数と q_1 、 q_2 あるいは p_1 、 p_2 の関数となる。最小2乗法により、最適な母数は式(7)の2乗推定誤差を最小にすることによって求められるから、混在型混合分布の場合では次の連立方程式を解くことによって未知変数を決定することができる。ただし、 p_2 は式(5)によって算定する。

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_2} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

一般に、式(9)は非常に複雑な非線形連立方程式となり、収束計算によって解かねばならない。活荷重実態調査から得られた車両重量の観測データに対して、正規分布と対数正規分布による混在型混合分布をあてはめるために、Newton-Raphson法を用いて5元連立方程式を解いたが、結果が初期値の設定に非常に敏感であり、初期値を変えると解が発散したり、安定した解が得られないという結果になった。

非線形連立方程式の数値計算問題に対する万全の解法は無く、多くの場合収束判定が非常に難しい¹⁴⁾。上記の問題も同様であり、その後本研究では収束性を改善する目的で、Newton-Raphson法に換えて減速Newton法、連続変形法を用いて計算してみたが良好な結果は得られなかった。したがってこれらの検討結果から、実用的に混合分布のあてはめを行うためには式(9)を直接解くのではなく、さらに安定した解法へと改善する必要があると思われる。

ところで、 A_1, B_1, A_2, B_2 が分布の母数そのものではなく、母数の関数となっている場合の式(9)の意味は次のように理解される。いま、 α_1, β_1 が分布の母数を表わし、 A_1, B_1 はたとえば分布の平均値と標準偏差を表わすものとする。一般には、 A_1, B_1 は α_1 と β_1 によって一義的に関係付いているから、 $A_1 = A_1(\alpha_1, \beta_1), B_1 = B_1(\alpha_1, \beta_1)$ のような関数関係にある。したがって、2乗推定誤差 E を母数 α_1, β_1 で偏微分すると、合成関数の微分より次式が成り立つ¹⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial E}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial E}{\partial B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial E}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial E}{\partial A_1} \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} + \frac{\partial E}{\partial B_1} \frac{\partial B_1}{\partial \beta_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

さらに、最適な母数の統計的推定量は、次の関係式を満足する。

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta_1} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 α_1, β_1 と A_1, B_1 の関係において、次のヤコビアン¹⁶⁾の条件式が成り立つ場合には、式(11)と式(9)の A_1, B_1 に関する2つの式とは同じ意味を持つ。

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial B_1}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial B_1}{\partial \beta_1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

一般には、式(12)の条件式は成り立つから、式(9)によって最適な母数を求めることができる。言い換えれば、式(12)が成り立つような母数の関数 A_1, B_1 を用いて統計的推定を行えば良いことになる。

なお、式(7)では確率分布関数を用いて2乗推定誤差を定義したが、これに換えて確率密度関数や確率変数自身を用いて2乗推定誤差を定義することもできる¹²⁾。いずれを用いるのが最適かは難しい問題であるが、一般には確率分布関数を用いる場合が式(8)に示す順序統計を直接用いることから、数学的に最も扱い易く、また実用的にも問題はないものと思われる。したがって、ここでは式(7)を用いて2乗推定誤差を定義する。

(2) 本研究のあてはめ法
本研究では、式(9)の非線形連立方程式を解く方法に換えて、最小2乗法と積率法とを併用して母数の統計的推定をする解法を開発した。

いま、式(9)と同じく未知変数は p_1, A_1, B_1, A_2, B_2 の5つであるとする。観測データから得られる原点まわりの k 次の積率を $\widetilde{M}_k$ とおくと、 $\widetilde{M}_k$ ($k=1, 2, \dots$) は次式によって容易に計算することができる。

$$\widetilde{M}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i)^k \quad (k=1, 2, \dots) \quad \dots\dots\dots(13)$$

一方、あてはめる確率密度関数 $f_X(x)$ から求められる原点まわりの k 次の積率を M_k とおくと、 M_k は未知変数 p_1, A_1, B_1, A_2, B_2 の関数として与えられるからこれを一般に $M_k(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2)$ ($k=1, 2, \dots$) と表わす。同様に、式(7)に示した2乗推定誤差 E もまたこの5つの未知変数の関数だから、これを $E(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2)$ と表わす。

そこで、最適な母数を求めるために、任意の2つの未知変数の最小2乗法による関係式と、積率法による3つの関係式を作り、これら5つの連立方程式を満たすように未知変数を決定する。代表的に A_1, A_2 について最小2乗法を適用すると、求める方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial E(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2)}{\partial A_1} = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\frac{\partial E(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2)}{\partial A_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\widetilde{M}_1 = M_1(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2) \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\widetilde{M}_2 = M_2(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2) \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\widetilde{M}_3 = M_3(p_1, A_1, B_1, A_2, B_2) \quad \dots\dots\dots(18)$$

式(14)、(15)は最小2乗法により、式(16)～(18)は積率法による関係式を表わす。式(14)～(18)は独立な5つの方程式であり、これを用いて5つの未知変数が決定される。

なお、上記では5つの未知変数を仮定しているために3次までの積率を用いているが、その他の場合には未知変数の数から2を引いた個数だけ、低次から順に積率の関係式を利用する。また、上記では混在型について示したが、接合型の場合には式(2)、(3)と式(14)、(15)及び必要数の積率の関係式を用いれば良い。未知変数が $q_1, q_2, A_1, B_1, A_2, B_2$ の場合では、2次までの積率を使う。

本来、確率変数のモデル化における母数の統計的推定では、観測データから得られる可能な限りの情報を用いて母数を決定する。その結果、得られた推定量が統計的に一致性、不偏性、有効性及び充足性を有していることが望ましい¹⁶⁾。しかし、一般に構造工学の分野で利用する統計的推定では、これらの関係を厳密に検定すべき問題は少なく、また式(14)～(18)の関係を満足すれば十分に実用的な推定量として認められるものと思われる。むしろ、本研究では混合分布の実用的なあてはめ法を開発することが目的であり、上記の厳密な照査は今後の課題とする。したがって、本研究では確率分布の全体が良く適合するように、2乗推定誤差と1次から順に必要な個数だけの積率という情報を用いてあてはめる方法を提案する。また、あてはめた結果の妥当性については別途に検定を行って確認するものと考え、ここでの2乗推定誤差Eの大きさは検定の意味を持たない。

ところで、式(14)～(18)に換えて、たとえば1次から5次までの積率を利用して5元の非線連立方程式を作り、式(9)の解法と同じく直接未知変数を解く方法が考えられる。しかし、これらの方法について試算したところ、5元程度の連立方程式を直接解くことは解の収束性が悪く、前節に示した解法と同じく実用的とは言えない結果となった。

ところで、式(14)～(18)に換えて、たとえば1次から5次までの積率を利用して5元の非線連立方程式を作り、式(9)の解法と同じく直接未知変数を解く方法が考えられる。しかし、これらの方法について試算したところ、5元程度の連立方程式を直接解くことは解の収束性が悪く、前節に示した解法と同じく実用的とは言えない結果となった。

これに対して、式(14)～(18)を用いる方法では数値的な収束計算によって連立方程式を解く必要があるのは、上記したように積率に対する2元や3元程度の連立方程式についてであり、この点で解の収束性が良く、実用的な解析ができる。ただし、ここでは最適な解への収束性をより確実にするために、式(14)と式(15)の関係式を直接に解くのではなく、図-4に示すように $A_1 - A_2$ 平面上でEの値を順次評価し、収束計算によってEの値が最小となる解を算定する。つまり、2つの未知変数を用いて平面上での逐次計算を行い、確実に最適な解を求めることができる利点と、残りの未知変数について比較的簡単な関係式を組み立てることができる利点を考えて、最小2乗法による2つの関係式と積率法による関係式とを用いてあてはめを行う点が、本研究の方法の主旨である。

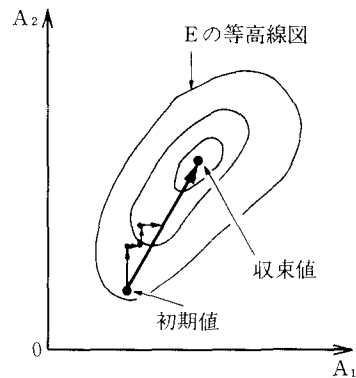


図-4 $A_1 - A_2$ 平面上でのEの等高線による収束（模式図）

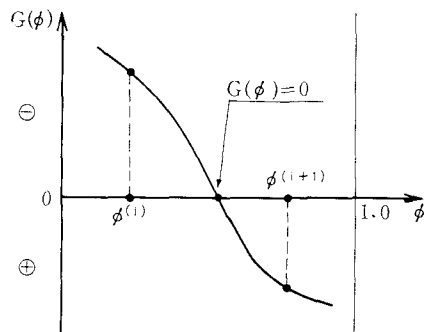


図-5 ϕ による関数 $G(\phi)$ の収束（模式図）

4. 接合型混合分布のあてはめ法

(1) 一般式

接合型混合分布のあてはめには、式(2)、(3)と式(14)、(15)に代表される2つの関係式、及び式(16)、(17)を用いて方程式を作る。いま、変数 x_0 をたとえば通常の確率紙を用いて判断し、確定値として与えるとする、未知変数の数は q_1 、 q_2 、 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 の6つとなる。この場合の最小2乗法による関係式では、 A_1 と B_1 あるいは A_2 と B_2 の組合せを用いると都合が良い。ここでは、 A_2 と B_2 についての関係式を用いる場合を示すが、 A_1 と B_1 を用いる場合にも同様に成り立つ。すなわち、 A_2 と B_2 に対して次の方程式を作る。

$$\frac{\partial E}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(19)$$

次に、観測データを用いて式(13)により $\tilde{M}_k$ ($k=1, 2$)を算出する。さらに、式(16)と(17)の右辺の M_k ($k=1, 2$)を式(1)の定義に基づいて誘導し、両者の関係式を作る。

$$\tilde{M}_1 = q_1 \int_{-\infty}^{x_0} x f_1(x) dx + q_2 \int_{x_0}^{\infty} x f_2(x) dx \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\tilde{M}_2 = q_1 \int_{-\infty}^{x_0} x^2 f_1(x) dx + q_2 \int_{x_0}^{\infty} x^2 f_2(x) dx \quad \dots\dots\dots(21)$$

式(20)、(21)が未知変数 q_1 、 q_2 に対して有意義であるためには、次の関係式が成り立つ必要がある。

$$\begin{vmatrix} \int_{-\infty}^{x_0} x f_1(x) dx & \int_{x_0}^{\infty} x f_2(x) dx \\ \int_{-\infty}^{x_0} x^2 f_1(x) dx & \int_{x_0}^{\infty} x^2 f_2(x) dx \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots\dots\dots(22)$$

もし、近似的にでも式(22)が成立しない場合には、安定した q_1 、 q_2 の解が得られにくいため注意する必要がある。この場合には、式(1)の定義による接合型混合分布のあてはめは適当ではなく、定義式を変更するかもしれない混在型混合分布を用いる方が適当と思われる。

A_2 と B_2 を $F_2(x)$ の母数とし、 $A_2 - B_2$ 平面上での2乗推定誤差 E の値を評価する。 A_2 、 B_2 に適当な値を与えた上で、残る4つの未知変数を決定するためには式(2)、(3)と式(20)、(21)を利用することになる。しかし、一般にはこれらの方程式から未知変数の値を閉じた形で算出するのは困難であり、ここでは次のパラメーターを導入して収束計算により解くことにする。いま、 A_2 と B_2 を任意にあたえていることから、この段階で未定な $F_1(x)$ に対して次式の ϕ を導入する。

$$\phi = q_1 F_1(x_0) \quad \dots\dots\dots(23)$$

ϕ の有意義な存在範囲は、式(3)から次のようになる。

$$0 \leq \phi \leq 1.0 \quad \dots\dots\dots(24)$$

ϕ に対する収束計算の中で i 番目の値を $\phi^{(i)}$ とおくと、式(3)より q_2 が求められ、これを $q_2^{(i)}$ とおく。

$$q_2^{(i)} = \frac{1 - \phi^{(i)}}{1 - F_2(x_0)} \quad \dots\dots\dots(25)$$

式(2)、(20)及び式(23)へ式(25)を代入すれば、残る未知変数である q_1 、 A_1 、 B_1 の i 番目の値を求めるための関係式が得られる。それぞれ $q_1^{(i)}$ 、 $A_1^{(i)}$ 、 $B_1^{(i)}$ とおく。

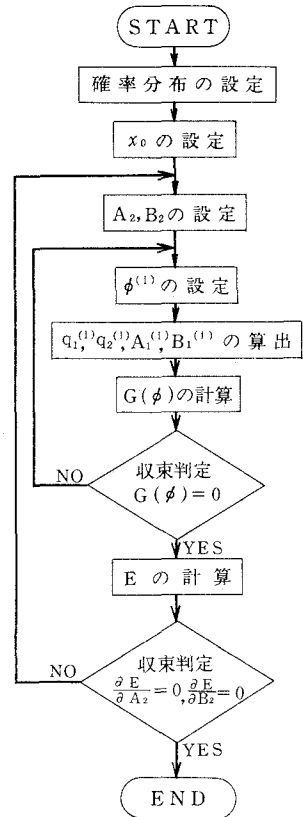


図-6 接合型混合分布の計算手順

$$q_1^{(i)} f_1(x_0, A_1^{(i)}, B_1^{(i)}) = \frac{1 - \phi^{(i)}}{1 - F_2(x_0)} f_2(x_0) \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$q_1^{(i)} \int_{-\infty}^x x f_1(x, A_1^{(i)}, B_1^{(i)}) dx = \tilde{M}_1 - \frac{1 - \phi^{(i)}}{1 - F_2(x_0)} \int_x^{\infty} x f_2(x) dx \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$q_1^{(i)} F_1(x_0, A_1^{(i)}, B_1^{(i)}) = \phi^{(i)} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、式(26)～(28)では $f_1(x)$ 、 $F_1(x)$ の中に $A_1^{(i)}$ 、 $B_1^{(i)}$ を表示している。

次に、式(25)～(28)を解いて $q_1^{(i)}$ 、 $q_2^{(i)}$ 、 $A_1^{(i)}$ 、 $B_1^{(i)}$ を求め、これらの結果と A_2 、 B_2 とを、式(21)を変形した次式へ代入する。

$$G(\phi) = \tilde{M}_2 - q_1 \int_{-\infty}^{x_0} x^2 f_1(x) dx - q_2 \int_{x_0}^{\infty} x^2 f_2(x) dx \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって、図-5の模式図に示すように、 $G(\Phi)$ の符号の変化から $G(\Phi) = 0$ となる $\Phi^{(i)}$ を収束計算によって求めれば、与えられた A_2 、 B_2 のもとで残る4つの未知変数が得られる。 $G(\Phi) = 0$ への収束計算には、はさみ打ち法が実用的と思われる。ただし、式(26)～(28)の連立方程式を確実に解く必要があり、用いる原構成関数の種類に応じて計算しなければならない。本研究の試算によれば、通常の分布関数の場合には計算式の誘導は比較的容易であるが、個々の詳細は省略する。また、 Φ の初期値については式(23)の定義から理解できるように、観測データを用いて非常に良い近似値を設定することができる。つまり、 Φ は全データ数に対する x_0 以下のデータ数の比に近似するはずであり、このことから $G(\Phi)$ では収束性の良い計算ができる。

さらに、得られた4つの未知変数と A_2 、 B_2 とを用いて式(7)の2乗推定誤差を求める。以上の手順を次々に A_2 、 B_2 の値を変えて行えば、 $A_2 - B_2$ 平面上でEの等高線が数値的に求められる。この等高線に対して、収束計算によって最小値を与える A_2 、 B_2 の値とそれに対する q_1 、 q_2 、 A_1 、 B_1 の値を求めれば、母数の統計的推定における未知変数の最適解が求められたことになる。 $A_2 - B_2$ 平面上での収束計算結果が、実は式(19)の2つの関係式を満足することに等しい。

解の収束判定は、すべての変数に対してそれぞれの収束条件を満足するまで繰り返すものとする。代表的に Φ を用いて収束条件を示す。

$$\left| \frac{\phi^{(i-1)} - \phi^{(i)}}{\phi^{(i-1)}} \right| \leq \varepsilon \quad \dots\dots\dots (30)$$

十分に小さい値 ε に対して式(30)を満足したら、収束を終了する。 $A_2 - B_2$ 平面上でのEに対する収束計算方法にはいくつか考えられるが、本研究では比較的簡便な解法を用いた。これについては後述する。以上の計算手順を図-6に示す。

(2) 適用例

ここでは簡単な適用例を用いて、より具体的に接合型混合分布のあてはめ法を説明する。異なる2つの極値I型分布を用いて構成される接合型混合分布 $F_X(x)$ の原構成関数 $F_1(x)$ 、 $F_2(x)$ と $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ を次式で与える。

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \exp \{ -e^{-\alpha_1(x-\beta_1)} \} \\ F_2(x) &= \exp \{ -e^{-\alpha_2(x-\beta_2)} \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \alpha_1 \exp \{ -\alpha_1(x-\beta_1) - e^{-\alpha_1(x-\beta_1)} \} \\ f_2(x) &= \alpha_2 \exp \{ -\alpha_2(x-\beta_2) - e^{-\alpha_2(x-\beta_2)} \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

したがって、母数推定の未知変数を q_1 、 q_2 及び α_1 、 β_1 、 α_2 、 β_2 の6つとする。後者は、前記し

た A_1, B_1, A_2, B_2 に相当している。

あてはめの精度を確認するために、ここでは以上の6つの未知変数と境界値 x_0 を既知として与え、これを用いてモンテカルロシミュレーションにより作成した観測データ x_i ($i=1, 2, \dots, N$) に対して母数の統計的推定を行い、両者を比較する。各変数に与えた設定値を表-1に示し、作成した観測データ ($N = 400$, ただし x_0 以下のデータ数を 280) の頻度分布を図-7に棒グラフで示す。

まず、観測データより原点まわりの積率を求めると、 $\tilde{M}_1 = 19.64$, $\tilde{M}_2 = 458.64$ となった。 $\alpha_2 - \beta_2$ 平面上でEの最小化を行うものとし、その方程式は次式となる。

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta_2} = 0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

式(23)のパラメーター中の初期値を、観測データの数からの $\phi^{(i)} = 280 / 400 = 0.70$ とする。

ある α_2, β_2 の値に対して、 $q_2^{(i)}$ は式(25)から求める。さらに、式(26)~(28)の $f_1(x)$ と $F_1(x)$ へ式(31), (32)のそれを代入して整理すると、未知数 $q_1^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}$ を求める関係式が得られる。

$$q_1^{(i)} = \phi^{(i)} \exp \left\{ \frac{q_2^{(i)} f_2(x_0)}{\alpha_1^{(i)} \phi^{(i)}} \right\} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\alpha_1^{(i)} \{ \tilde{M}_1 - x_0 \phi^{(i)} - q_2^{(i)} \int_{x_0}^{\infty} x f_2(x) dx \} + q_1^{(i)} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\ln \left(\frac{q_1^{(i)}}{\phi^{(i)}} \right) e^{-t} \right\} dt = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$\beta_1^{(i)} = x_0 + \frac{1}{\alpha_1^{(i)}} \ln \left(\frac{q_1^{(i)}}{\phi^{(i)}} \right) \quad \dots\dots\dots(36)$$

ただし、式(27)においては部分積分を行っている。ここで、極値I型分布の場合には式(34)~(36)から分かるように、 $q_1^{(i)}$ と $\alpha_1^{(i)}$ は閉じた形にならず、収束計算が必要となる。そのためには、反復法などが適用できるが、ここでは確実な計算法であるはさみ打ち法を用いる。式(35)を変形して $q_1^{(i)}, \alpha_1^{(i)}$ の関数 g を定義する。

$$g\{q_1^{(i)}, \alpha_1^{(i)}\} = \{ \text{式(35)の左辺} \} \quad \dots\dots\dots(37)$$

一方、 $q_1^{(i)}$ と $\alpha_1^{(i)}$ とは式(34)によって一義的に関係付けられるから、図-8に示すように $q_1^{(i)}$ と $\alpha_1^{(i)}$ を仮定して式(37)に代入し、 $g\{q_1^{(i)}, \alpha_1^{(i)}\} = 0$ となるようにはさみ打ち法によって収束計算を行えば、求める解が得られる。したがって、式(25)と式(34)~(36)とを用いて式(29)の $G(\Phi) = 0$ となるパラメーター Φ の値、さらには未知変数を求めることができる。さらに、図-9に示すように $\alpha_2 - \beta_2$ 平面上でEの等高線を求め、これより収束計算によって未知変数の最適値を求めることができる。結果を計算値として表-1に示す。

表-1 接合型混合分布の適用例

変 数	設 定 値	計 算 値
q_1	—	0.72
q_2	—	0.34
α_1	0.641	0.610
β_1	14.1	14.2
α_2	0.128	0.148
β_2	25.5	25.2
x_0	20.0	

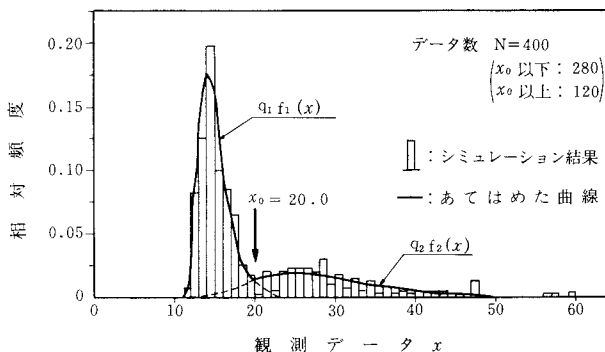


図-7 接合型混合分布の適用例（確率密度関数）

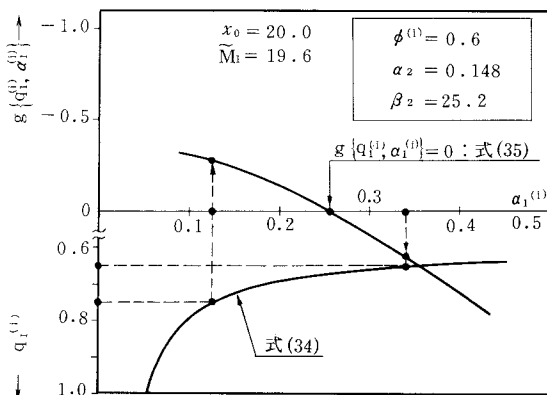


図-8 $q_1^{(i)}$ と $\alpha_1^{(i)}$ の収束計算例

また、あてはめた $f_X(x)$ を図-7 に実線で示し、同じく $F_X(x)$ を極値 I 型分布の確率紙上で図-10 に示す。これらの結果から、設定値と計算値とを比較すると、良い精度で混合分布のあてはめができたと言えよう。

5. 混在型混合分布のあてはめ法

(1) 2つの平均値が異なる場合

混在型混合分布のあてはめには、式(5) と式(14)、(15) に代表される2つの関係式、及び式(16)~(18)を用いて方程式を作る。いま、原構成関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ はそれぞれ2つずつの母数を持ち、未知変数 A_1 、 B_1 及び A_2 、 B_2 がそれぞれ分布の平均値と標準偏差を表わすものとする。2つの母数を持つ分布の平均値と標準偏差が分かれば、分布の母数を積率法を用いて求めることができる。したがって、この場合の未知変数は p_1 、 p_2 、 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 の6つとなる。この場合のあてはめには、 A_1 と A_2 とを用いて2乗推定誤差を最小化すると都合が良い。 A_1 と A_2 の最小2乗法による関係式は、式(14)、(15)に同じとなる。

次に、観測データを用いて式(13)により $\tilde{M}_k$ ($k=1, 2, 3$) を算出する。さらに、式(16)~(18)の右辺の M_k ($k=1, 2, 3$) を式(4)の定義に基づいて誘導し、両者の関係式を作ると次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\tilde{M}_1 &= p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx \\ &= p_1 A_1 + p_2 A_2 \quad \dots\dots\dots(38)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_2 &= p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x) dx + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_2(x) dx \\ &= p_1 (A_1^2 + B_1^2) + p_2 (A_2^2 + B_2^2) \quad \dots\dots\dots(39)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_3 &= p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_1(x) dx + p_2 \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_2(x) dx \\ &= p_1 (\gamma_1 B_1^3 + 3A_1 B_1^2 + A_1^3) + p_2 (\gamma_2 B_2^3 + 3A_2 B_2^2 + A_2^3) \quad \dots\dots\dots(40)\end{aligned}$$

ここに、 γ_1 、 γ_2 はそれぞれ原構成関数 $f_1(x)$ 、 $f_2(x)$ の歪度を表わし、原構成関数の種類に応じて定数または母数の関数として与えられる。代表的な確率分布の歪度を表-2に示す¹⁷⁾。

したがって、式(5)、(14)、(15) 及び式(38)~(40)の6つの方程式を用いて6つの未知変数を解くことになるが、原構成関数の歪度に応じてもう少し方程式を整理することができる。

a) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (対称形分布の場合)

いま、2つの平均値 A_1 、 A_2 が異なるという条件のもとで、最も簡単な場合として $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ の場合を示す。歪度が0ということは分布が平均値まわりに対称形であることを表わし、たとえば2つの正規分布を用いる場合がこれに相当する。

式(5)を式(38)~(40)へ代入すると、 A_1 、 A_2 を用いて p_1 、 B_1 、 B_2 を解くことができる。ただし、 $A_1 < A_2$ とする。

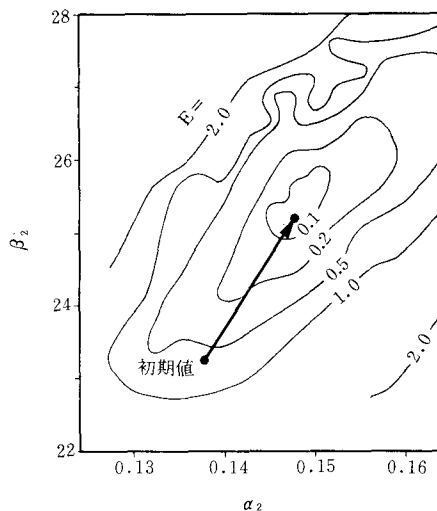


図-9 2乗推定誤差の等高線の計算例

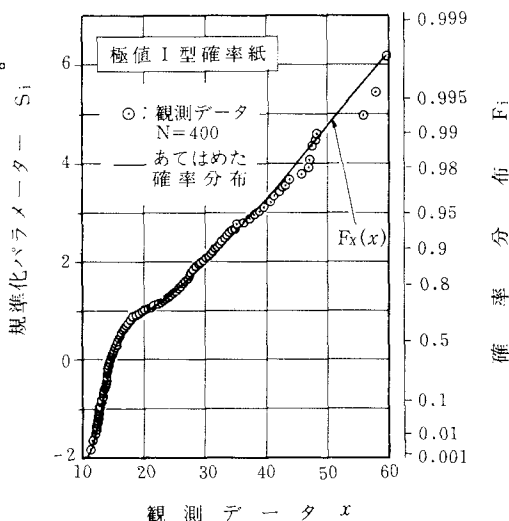


図-10 接合型混合分布の適用例(確率分布)

$$p_1 = \frac{A_2 - \tilde{M}_1}{A_2 - A_1} \dots\dots\dots(41)$$

$$B_1^2 = \frac{1}{3(\tilde{M}_1 - A_2)} \{ \tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_2 A_2 + \tilde{M}_1 (2A_2^2 + 2A_1 A_2 - A_1^2) - A_1 A_2 (2A_2 - A_1) \} \dots\dots\dots(42)$$

$$B_2^2 = \frac{1}{3(\tilde{M}_1 - A_1)} \{ \tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_2 A_1 + \tilde{M}_1 (2A_1^2 + 2A_1 A_2 - A_2^2) - A_1 A_2 (2A_1 - A_2) \} \dots\dots\dots(43)$$

したがって、任意の A_1, A_2 を与えた時に式(5)と式(41)～(43)を用いて残る4つの未知変数を算定し、その結果 $A_1 - A_2$ 平面上で作られるEの等高線を用いて、最適な未知変数の値を求めることができる。ただし、各未知変数が有意義な値を持つという条件から、 A_1, A_2 の有意義な存在範囲が限定される。すなわち、次の条件式を適用すれば良い。

$$0 < p_1 < 1.0, A_1 < A_2, 0 \leq B_1^2, 0 \leq B_2^2 \dots\dots\dots(44)$$

いま、一例として表-3に示す2つの正規分布を用いてモンテカルロシミュレーションにより作成した観測データ(N = 100, 図-11参照)を用いて、 A_1, A_2 の存在範囲を示すと図-12のようになる。同図の斜線で囲まれた範囲においてのみ解析が有意義であり、収束計算によりEの値が最小となる A_1, A_2 の解、さらには残る4つの未知変数を求める。

原構成関数がともに正規分布の場合には、ここでの未知変数 A_1, B_1, A_2, B_2 が分布の母数になるが、そうでない場合にもこれらの値を用いて必要とする母数を算定することができる。

b) γ_1 あるいは $\gamma_2 \neq 0$ (非対称形分布の場合)

同じく2つの平均値が異なるという条件のもとで、 γ_1, γ_2 の一方または両方が0でない場合を示す。この場合には、上記のa)に比較して式(40)がもう少し複雑になり、式(42), (43)のように B_1, B_2 を閉じた形で誘導することが難しくなる。表-2に示したように、原構成関数の種類に応じて式(40)の γ_1 や γ_2 が未知変数の関数となる。そのため、数値計算によって解く必要が

表-2 代表的な確率分布の歪度

確率分布の種類	歪度 γ
一様分布	0
正規分布	0
対数正規分布	$(B/A)^3 + 3(B/A)$
指数分布	2
ガンマ分布	$2(B/A)$
ポアソン分布	(B/A)
備考	A: 分布の平均値 B: 分布の標準偏差

表-3 混在型混合分布の適用例

変数	設定値	計算値
p_1	0.40	0.46
p_2	0.60	0.54
A_1	20.0	20.9
B_1	5.0	5.7
A_2	40.0	40.3
B_2	7.0	5.4

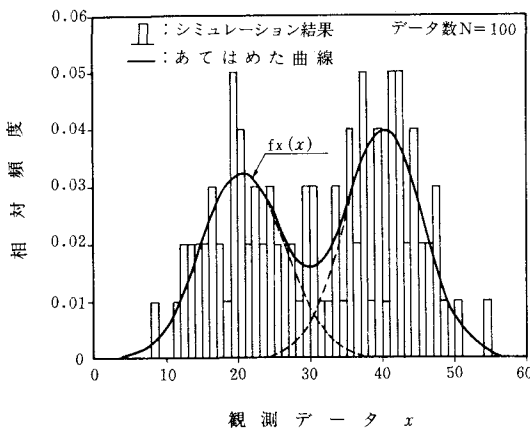


図-11 混在型混合分布の適用例

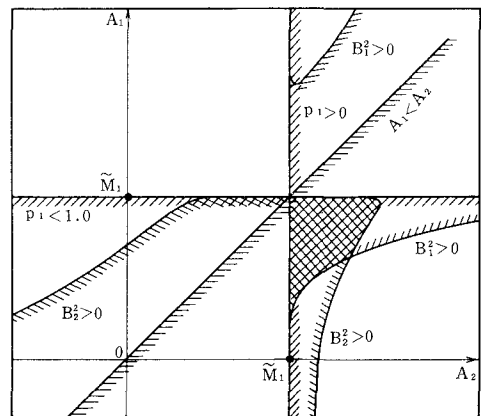


図-12 A_1, A_2 の存在範囲 ($A_1 < A_2$)

あるが、ここでは B_1 、 B_2 を用いて図-8に示したのと同様の収束計算が有効と思われる。図-13に示すように、たとえば B_1 をある値に仮定すると、式(39)を用いて B_2 が得られる。

$$B_2^2 = \frac{1}{1-p_1} \{ \widetilde{M}_2 - A_2^2 + p_1(A_1^2 + B_1^2 - A_2^2) \} \dots\dots\dots(45)$$

この B_1 と B_2 とを式(40)を変形した次式に代入して、 $h(B_1, B_2) = 0$ となるように解く。

$$h(B_1, B_2) = \widetilde{M}_3 - p_1(\gamma_1 B_1^3 + 3A_1 B_1^2 + A_1^3) - p_2(\gamma_2 B_2^3 + 3A_2 B_2^2 + A_2^3) \dots\dots\dots(46)$$

ここで、 p_1 、 p_2 は式(5)と式(41)により求める。一般に、関数 $h(B_1, B_2)$ は比較的単調な曲線となるから、たとえばはさみ打ち法によって容易に $h(B_1, B_2) = 0$ を解くことができる。このようにして未知変数を算定すれば、これ以後の計算は上記a)の場合と同じ手順となる。ただし、収束計算の途中で求める各未知変数の値が、式(44)の条件を満足するように判定する必要がある。

(2) 2つの平均値が等しい場合

$A_1 = A_2 = A$ という条件のもとであてはめを行う。この場合には、 B_1 と B_2 を用いて E を最小化すると都合が良く、式(14)、(15)に相当する関係式は次式となる。

$$\frac{\partial E}{\partial B_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_2} = 0 \dots\dots\dots(47)$$

また、未知変数の数は p_1 、 p_2 、 A 、 B_1 、 B_2 の5つであり、積率による関係式は1次と2次のみを使う。したがって、用いる方程式は式(5)、(38)、(39)と式(47)となる。まず、式(38)より $A = A_1 = A_2$ を求め、さらにこの結果と式(5)を式(39)へ代入する。

$$A = A_1 = A_2 = \widetilde{M}_1 \dots\dots\dots(48)$$

$$\widetilde{M}_2 = (\widetilde{M}_1)^2 + B_2^2 + p_1(B_1^2 - B_2^2) \dots\dots\dots(49)$$

a) $B_1^2 \neq B_2^2$ の場合

式(49)より p_1 を求める。

$$p_1 = \frac{\widetilde{M}_2 - (\widetilde{M}_1)^2 - B_2^2}{B_1^2 - B_2^2} \quad (B_1^2 \neq B_2^2) \dots\dots\dots(50)$$

次に、 $B_1 - B_2$ 平面上で E の等高線を作り、収束計算によって最適解を求める。

b) $B_1^2 = B_2^2$ の場合

この場合は、異なる種類の原構成関数を用いる時のみ混合分布としての意味があるが、実際の問題としてモデル化に使用することは少ない。式(38)、(39)を用いて容易に $A_1 = A_2$ 、 $B_1 = B_2$ の値が決まる。 $\gamma_1 \neq \gamma_2$ の場合には、式(5)と式(40)を用いて p_1 、 p_2 を算定するが、もし $\gamma_1 = \gamma_2$ の場合にはさらに4次の積率に関する方程式を導入する必要がある。4次の積率には、分布の尖度が関係する。しかし、通常の構造工学の分野で利用するモデル化ではこのような場合は非常に稀少であり、ここでは以上の点を指摘するとどめておく。なお、この場合には最小2乗法による関係式を使用せず、積率法による関係式のみを用いてあてはめができる。

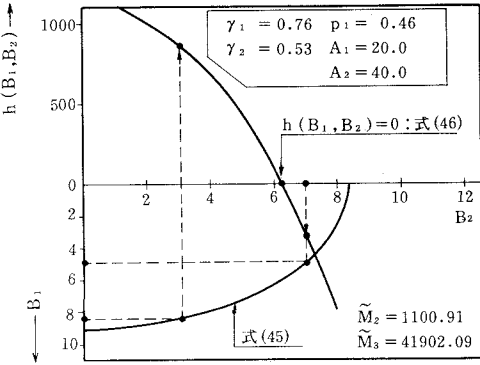


図-13 B_1 と B_2 の収束計算例

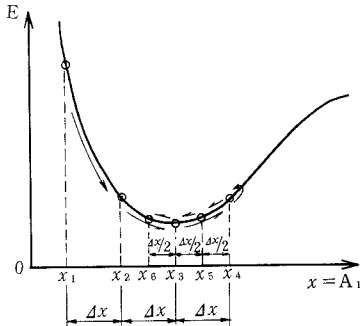


図-14 ころがり法の原理

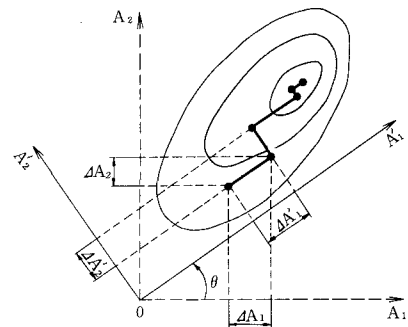


図-15 座標軸の回転ところがりの方

6. 最適解への収束計算について

本研究のあてはめ法では、式(7)で定義した2乗推定誤差 E を最小とする未知変数を求める。そのための方程式は、たとえば式(14)、(15)として与えられるが、直接この方程式を解くのではなく $A_1 - A_2$ 平面上で E の値を逐次評価し、収束計算によって解く。ここでは、そのための収束計算の方法を「ころがり法」と呼ぶことにし、その方法を説明する。

E の等高線に関する図-4の模式図や図-9の計算例から推察できるように、 $A_1 - A_2$ 平面に垂直に E を表わす縦軸を加えて立体曲面を想定する。この曲面は唯一つのくぼみを有する凹形曲面となり、その最下点が A_1, A_2 の最適解となる。もし、くぼみが2つ以上存在する場合には、式(14)、(15)を満足する解が2つ以上あることになり、最適解に到達することが困難なことがある。たとえば観測データの数で十分ではなく、その結果あてはめが不安定な場合に2つ以上の解が存在することが考えられる。そのような場合には使用する観測データを改善するものとして、ここでは唯一の極小点を持つ E について考えることにする。

ここでの計算方法は、この曲面の初期値の点から逐次低い方へと試行錯誤的に解を進めて行くもので、いわば点が曲面に沿って微少距離ずつ前進と後退を繰り返しながらころげ落ちる様子に似ている。

図-11に示した混在型の適用例で、ある A_2 において A_1 軸に沿ってこの曲面を切った断面を図-14に示す。初期値 x_1 からスタートして Δx ずつ E の値が小さくなる方向へ進み、 E の値が相対的に大きくなったら、その微少距離の半分ずつ逆方向に進む。この手順を繰り返せば、確実に最下点に到達することができる。次に、その点から A_2 に対して同様の試行を順次繰り返せば、最終的に凹面の最下点に達する。つまり、 A_1, A_2 の最適解が求まる。

もし、等高線が座標軸に対してある傾きを持った細長いみぞ状になっていると、反復の回数が増えるために収束が遅くなることがある。この点を改善するために、ここでは A_1, A_2 軸に沿って進むのではなく、座標軸の回転を行い、回転した軸に沿って進むようにした。図-15に示すように回転角 θ によって回転した軸 A'_1, A'_2 のうち、 A'_1 軸に沿って微少距離 $\Delta A'_1$ 進む時には、 A_1, A_2 軸に沿う移動距離 $\Delta A_1, \Delta A_2$ を

$$\Delta A_1 = \Delta A'_1 \cos \theta, \Delta A_2 = \Delta A'_1 \sin \theta \quad \dots\dots\dots(51)$$

とする。同じく、 A'_2 軸に沿って進む時には次のようにする。

$$\Delta A_1 = -\Delta A'_2 \sin \theta, \Delta A_2 = \Delta A'_2 \cos \theta \quad \dots\dots\dots(52)$$

$\theta = 0$ の場合が、 A_1, A_2 軸に沿って進むことになる。

図-11に示した適用例の等高線と初期値を図-16に示す。また、回転角 θ を変えて収束の速度を比較した結果を図-17に示す。この例では等高線のみぞの傾きは約40度であり、この傾きに近い θ において収束が速くなっている。しかしながら、実用的に混合分布のあてはめをするには、まず大略の等高線を作成し、その最下点付近に初期値を設定するとともに、大略の回転角を設定して計算することになる。

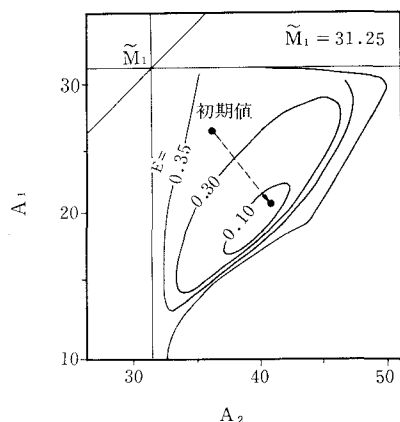


図-16 2乗推定誤差の等高線の計算例
(混在型混合分布)

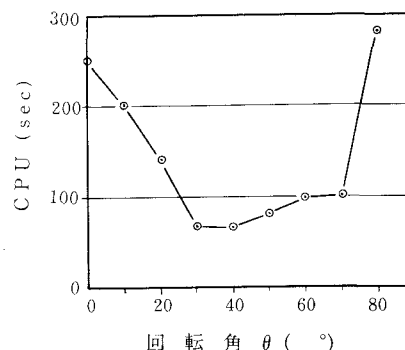


図-17 収束速度の比較

7. あとがき

本研究では、主として構造物設計を対象にした確率変数のモデル化において、より正確な評価のために必要と思われる混合分布のあてはめについて検討した。従来、この種の問題に対しては具体的な提案がなく、実際の問題として利用されることが少なかったように思われるが、本研究での検討により混合分布の基本的

な考え方が整理され、また具体的なあてはめの方法が得られた。ここでは、接合型と混在型とに分けて混合分布を定義し、それぞれの場合における解析的なあてはめの方法を示したが、どちらの場合にも数値解析による収束計算を必要とし、この種の問題がそれ程容易ではないことが明らかになった。しかし、たとえば荷重の評価などのような通常の問題であるならば、十分に実用的なあてはめができるようになった。このことは、本研究の有意義な成果である。今後、構造物設計を対象とする分野における確率変数のモデル化にあたって、基礎的な一手法として有用であると思われる。

一方、より実的にここでの成果を応用するためには、解の収束性の問題を中心として個々の問題に対して検討を深める必要がある。また、ここでは未知変数の数が6個程度までについて実的な解法が得られたが、3つ以上の原構成関数を用いる場合には従来のあてはめと同じように解決すべき問題が残るものと思われる。さらに、ここでは連続型の確率分布関数だけを念頭に置いたが、離散型分布へ適用するための研究が残されている。また、接合型と混在型のどちらを適用したら良いかについては、ここでは触れていない。解析の容易さの点では混在型が有利のように思われるが、これらの点を今後の課題としてさらに検討すべきかと思われる。

本研究での成果が、今後この方面の研究に対して多少なりとも寄与することができれば幸甚である。

参考文献

- 1) 第2回構造信頼性ワークショップ資料，東京，1985年 7月
- 2) 本州四国連絡橋公団：耐風設計基準（1976）・同解説，昭和51年 3月
- 3) 本州四国連絡橋公団：耐震設計基準・同解説，昭和52年 3月
- 4) 高岡宣善・星谷勝：信頼性理論と確率論の土木工学への応用，土木学会誌，Vol.60，No.8，PP. 61～69，1975年 8月
- 5) 古田均，K. S. Fu，J. T. P. Yao：知識工学——エキスパートシステム——の構造工学への応用，土木学会誌，Vol.70，No.9，PP. 28～33，1985年 9月
- 6) 藤野陽三・伊藤学・遠藤元一：シミュレーションに基づく道路橋設計活荷重の評価，土木学会論文報告集，第286号，PP.1～13，1979年 6月
- 7) 藤野陽三・伊藤学・酒井利夫：年最大風速記録による設計基本風速の算定に関する研究，土木学会論文報告集，第305号，PP. 23～34，1981年 1月
- 8) 阪神高速道路公団：設計荷重（HDL）委員会報告書，第2編，PP. 88～105，昭和59年 3月
- 9) 中島裕之・久保雅邦・石田良三：統計データに基づく混合分布の利用，土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集，I-97，1985年 5月
- 10) 本州四国連絡橋公団：垂水観測塔，風の10年集成，昭和50年 3月
- 11) 阪神高速道路公団・総合技術コンサルタント：下部工設計における荷重組合せに関する確率論的検討報告書，昭和57年 3月
- 12) 神田徹・藤田睦博：新大系土木工学26，水文学——確率論的手法とその応用，PP. 18～23，技報堂，1982年 1月
- 13) A. H-S. Ang，W. H. Tang，伊藤・亀田（訳）：土木建築のための確率統計の基礎，PP.259～270，丸善，1977年 6月
- 14) 伊理正夫：基礎の数学12，数値計算，PP. 39～99，朝倉書店，1984年12月
- 15) 森口繁一・宇田川鉦久・一松信：数学公式I，PP. 10～15，岩波書店，1963年 7月
- 16) R. S. Burdington，D. C. May，林・脇本（訳）：確率統計ハンドブック，PP.167～170，森北出版，1977年 4月
- 17) 石川浩・木村等：確率統計学入門，PP.135～188，香川大学，昭和55年 3月