

相関がある場合の全確率分布安全性指標

FULL-DISTRIBUTION SAFETY INDEX FOR MULTIPLE FAILURE MODES INCLUDING CORRELATED VARIABLES

長 尚*

By Takashi CHOU

In this decade many researchers have contributed to the development of the calculation technique of the safety index.

The purpose of this paper is threefold: to illustrate a effective procedure for calculating the full-distribution safety index in which the past studies are synthetically taken into account, to derive a general equation to give the correlation coefficient between two failure modes by which the above procedure can be applied for multiple failure modes including nonnormal correlated variables and to present a method for generating random numbers of such variables.

It is shown by some examples that the proposed method are very usefull.

1. まえがき

破壊基準関数を構成している変数間に相関がある場合とか、破壊基準関数が複数個あり式間に相関がある場合の安全性指標 β (本文では個々の確率変数の確率分布の形を考慮に入れた全確率分布安全性指標を対象とする) の計算にはこれらの相関を考慮する必要がある。個々の変数の確率分布と破壊基準関数との関連でこれまでに計算効率の良い方法で実質的に解かれているケースを表-1 に○, ⊙ (破壊確率と完全に対応) 印で示す。本文では残りのケースも対象にした解法, すなわち確率変数の中に非正規変数を含みかつ非線形な破壊基準関数が複数個ある場合の解法について提案し計算例を示す。また相関のある非正規変数を乱数によって発生させる近似法について提案し, これを利用して全確率分布安全性指標について吟味する。

2. 既往の研究成果を総合的に取り入れた, 全確率分布安全性指標 β の計算手順

本文で提案する方法を明確にするために, これまでに発展してきたこの方面の研究成果^{1)~11)} を総合的に取り入れた, 最も効率の良い計算手順 (表-1 の○, ⊙印の部分に相当する全確率分布安全性指標 β の) を図-1 に示す。この図-1 中で用いられている記号は次の通りである。

$$x \text{ (確率変数)} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$\bar{x} \text{ (確率変数の平均値)} = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2 \ \cdots \ \bar{x}_n]^T \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

* 工博 信州大学教授 工学部土木工学科 (〒380 長野市若里 500番地)

C_x (共分散)

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

σ_x (標準偏差)

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{x_1} & & & \\ & \sigma_{x_2} & & 0 \\ & 0 & \cdot & \\ & & & \sigma_{x_n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ρ (相関係数)

$$= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \rho_{n1} & \cdot & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

表-1 既往の研究で解かれているケース

破壊基準関数		個々の確率変数の確率分布			
個数	形	正規変数のみ		非正規変数を含む	
		変数間に 相関なし	変数間に 相関あり	変数間に 相関なし	変数間に 相関あり
単一	線形	◎ SL1	◎ SL2	○ SL3	○ SL4
	非線形	○ SN1	○ SN2	○ SN3	○ SN4
複数	線形	○ PL1	○ PL2	PL3	PL4
	非線形	○ PN1	PN2	PN3	PN4

$$g(x) \text{ (破壊基準関数)} = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad \cdots \quad g_m(x)] \quad \cdots (6)$$

$$f \text{ (確率密度関数)} = [f_1(x_1) \quad f_2(x_2) \quad \cdots \quad f_n(x_n)] \quad \cdots (7)$$

$$F \text{ (分布関数)} = [F_1(x_1) \quad F_2(x_2) \quad \cdots \quad F_n(x_n)] \quad \cdots (8)$$

ϕ (標準正規分布の確率密度関数), Φ (同分布関数), ρ_{kl} (モード k と l 間の相関係数)

x^{0k} (k 破壊基準関数に対する各繰返し段階における確率変数の初期値)

$$= [x_1^{0k} \quad x_2^{0k} \quad \cdots \quad x_n^{0k}] \quad \cdots (9)$$

この他の記号の定義は図中に記入してある。

なおこの図中で, x^1 の値が振動した場合, すなわち $\Delta x^0 \Delta x^1 < 0$ となった時には,

$$x^1 = 0.5 \Delta x^1 + x^0 \quad \cdots (10)$$

とする必要がある。

図-1に見られるように, 全確率分布安全性指標 β を求める実際の計算は, 標準化空間ではない元空間で行われ, また各確率変数間の相関を除く対角化の計算も不要で, 極めて計算が簡単で効率が良い。これは, 各確率変数が正規分布で, かつ破壊基準関数が線形の場合に成立する手順を, 各確率変数が非正規で, かつ破壊基準関数が非線形の一般の場合に拡張したものである。この拡張を可能にするために, Rackwitz & Fiessler の提案した, 各確率変数の正規裾野近似 (normal tail approximation) と, 各破壊基準関数の標準化空間における設計点 (収束点) での線形化とが導入されている。そのため, 表-1の○印に当たる場合は, 破壊確率との完全な対応はない。しかし先に指摘した⁶⁾ように, 一般に構造物の安全性の問題ではこの対応はかなり良い。

3. 二つの破壊モード間の相関係数

モード k と l 間の相関係数 ρ_{kl} は次式によって求められる。

$$\rho_{kl} = (z_k^* \cdot z_l^*) / (\beta_k \beta_l) \quad \cdots (11)$$

ここに, z_k^* , z_l^* は k , l 破壊基準関数に対する標準化空間における設計点である。ところでこの

ままでは、計算を元空間で実行することはできない。そこで各確率変数は正規分布で、かつ破壊基準関数が線形であると仮定して、式 (11) を変形することを考える。

まず、破壊基準関数を、

$$g(\mathbf{x}) = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{x} \quad \dots (12)$$

とする。ここに、

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \quad (13)$$

で、 a_0 、 $\mathbf{a}$ は定数である。

ここで変数 $\mathbf{x}$ を平均値 $\bar{\mathbf{x}}$ 、分散 $\mathbf{1}$ の標準化変数 $\mathbf{u}$ で表現すると次のようになる。

$$\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{x}} \quad \dots (14)$$

この標準化変数 $\mathbf{u}$ は相関があるので、直交変換マトリックス $\mathbf{t}$ を用いてお互いに相関のない変数 $\mathbf{y}$ で $\mathbf{u}$ を表現し、これを用いて式 (14) を書き直すと次のようになる。

$$\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{t} \mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}} \quad \dots (15)$$

この $\mathbf{y}$ の平均値は $\mathbf{0}$ であるが、標準偏差が $\mathbf{1}$ でない (変数 $\mathbf{x}$ の相関係数の固有値が分散) ので、標準化変数 $\mathbf{z}$ を用いて、

$$\mathbf{y} = \sigma_{\mathbf{y}} \mathbf{z} \quad \dots (16)$$

と置いて、式 (15) に代入すると次のようになる。

$$\mathbf{x} = \sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{t} \sigma_{\mathbf{y}} \mathbf{z} + \bar{\mathbf{x}} \quad \dots (17)$$

ここに、 $\sigma_{\mathbf{y}}$ は $\mathbf{y}$ の標準偏差 (変数 $\mathbf{x}$ の相関係数の固有値の平方根を対角要素にもつ正方行列) である。

したがって標準化空間で表現された破壊基準関数は、式 (17) の関係を式 (12) に入れることにより、次のようになる。

$$g(\mathbf{z}) = b_0 + \mathbf{b}^T \mathbf{z} \quad \dots (18)$$

ここに、

$$b_0 = a_0 + \mathbf{a}^T \bar{\mathbf{x}} \quad \dots (19)$$

$$\mathbf{b} = \sigma_{\mathbf{y}}^T \mathbf{t}^T \sigma_{\mathbf{x}}^T \mathbf{a} \quad \dots (20)$$

である。

この場合の標準化空間での設計点及び安全性指標 β は次のようになる。

$$\mathbf{z}^* = -(\mathbf{b}_0 \ \mathbf{b}) / (\mathbf{b}^T \mathbf{b}) \quad (21)$$

$$\beta = b_0 / \sqrt{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \quad \dots (22)$$

これらの式 (21)、(22) の関係を、式 (11) に用いると、モード k と l 間の相関係数 ρ_{kl} は次のように表される。

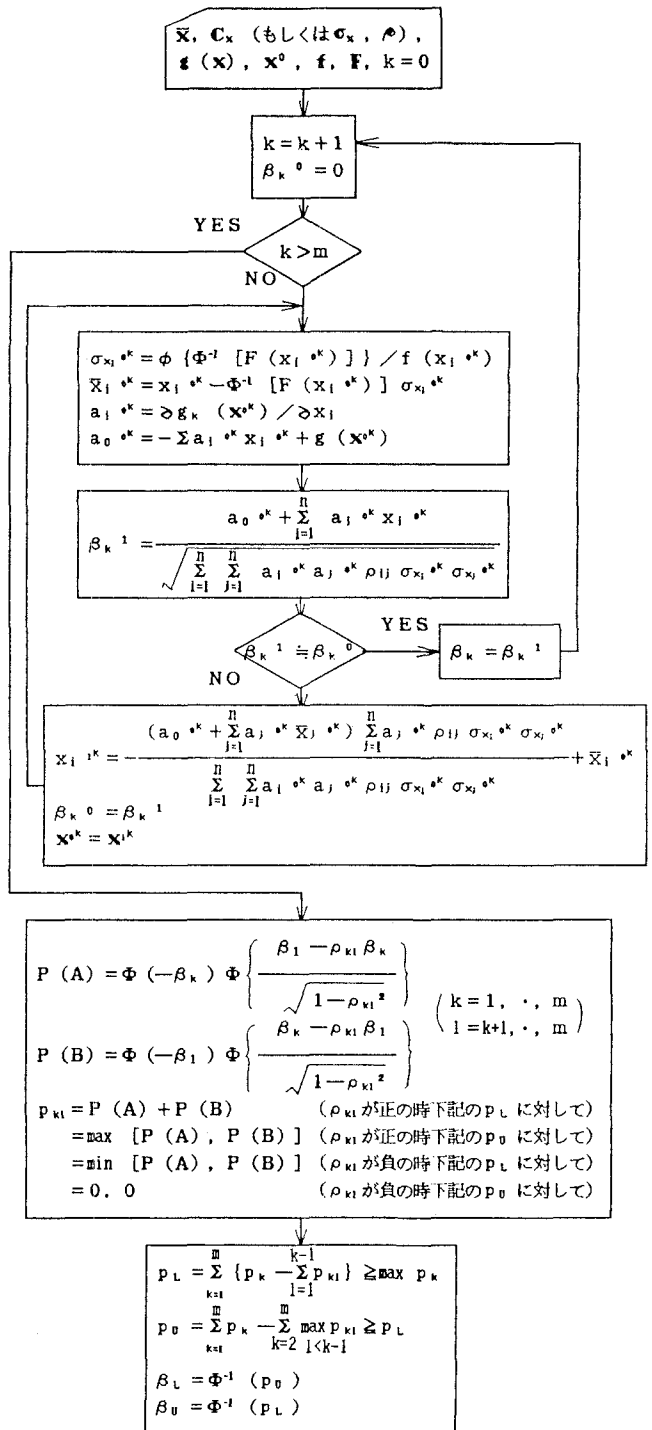


図-1 全確率分布安全性指標 β を求める手順

$$\rho_{kl} = \mathbf{b}^k \mathbf{T} \mathbf{b}^l / \sqrt{(\mathbf{b}^k \mathbf{T} \mathbf{b}^k) (\mathbf{b}^l \mathbf{T} \mathbf{b}^l)} \quad \dots \dots \dots (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^k \mathbf{T} \mathbf{b}^l &= \mathbf{a}^k \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_x \mathbf{t} \boldsymbol{\sigma}_y \boldsymbol{\sigma}_y \mathbf{T} \mathbf{t} \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_x \mathbf{T} \mathbf{a}^l = \mathbf{a}^k \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}_x \boldsymbol{\rho} \boldsymbol{\sigma}_x \mathbf{T} \mathbf{a}^l \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^k a_j^l \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \quad \dots \dots \dots (24) \end{aligned}$$

であるから、式 (23) は次のようになり、各確率変数が正規分布で、破壊基準関数が線形の場合には、モード k と l 間の相関係数 ρ_{kl} も元空間で計算が可能となる。

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^k a_j^l \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^k a_j^k \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^l a_j^l \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \right)}} \quad \dots \dots (25) \end{aligned}$$

なお、この特殊のケースである、変数が2個で、変数間には相関のない場合については、次式のように既に誘導されている。⁸⁾

$$\rho_{kl} = (a_1^k a_1^l \sigma_{x_1}^2 + a_2^k a_2^l \sigma_{x_2}^2) / (a_1^{k^2} \sigma_{x_1}^2 + a_2^{k^2} \sigma_{x_2}^2) (a_1^{l^2} \sigma_{x_1}^2 + a_2^{l^2} \sigma_{x_2}^2) \quad \dots \dots (26)$$

さてここで、Rackwitz & Fieβler の提案した、各確率変数のいわゆる正規裾野近似と、破壊基準関数の標準化空間における設計点での線形化を導入すると、各確率変数が非正規分布でかつ破壊基準関数が非線形である、一般的な場合に対して、モード k と l 間の相関係数 ρ_{kl} は、形式的には次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^{0k} a_j^{0l} \rho_{ij} \sigma_{x_i}^{0k} \sigma_{x_j}^{0l}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^{0k} a_j^{0k} \rho_{ij} \sigma_{x_i}^{0k} \sigma_{x_j}^{0k} \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^{0l} a_j^{0l} \rho_{ij} \sigma_{x_i}^{0l} \sigma_{x_j}^{0l} \right)}} \quad (27) \end{aligned}$$

この式は厳密には成立しない。何故ならば、モードが異なると同じ変数でも、正規分布に換算している点が違うので、平均値と標準偏差が異なり、もはや確率変数として同じではないことになり、式 (11) が成り立たなくなるからである。しかし ρ_{kl} の誤差の安全性指標 β に及ぼす影響は比較的少ないから近似式としては十分使用できるものと考えられる。

以上により、表-1で、○もしくは◎印のついていないケースについても、図-1に示すような元空間での計算で、全確率分布安全性指標 β を求めることができる。

次に、図-1に示すモード k と l 間の同時破壊確率 p_{kl} は Ditlevsen の提案になるものであるが、場合によっては範囲が大きいものがあり、 β_L 、 β_0 の範囲がかなり大きくなるので、以下この p_{kl} の近似計算法について考える。

Ditlevsenが誘導した p_{kl} の式の根拠は、図-2に示されている。すなわち図-2を参照して、次の関係があることを利用している。

$\max [P(A), P(B)] \leq p_{kl} \leq P(A) + P(B)$ ($\rho_{kl} > 0$ の時) (28)

$0 \leq p_{kl} \leq \min [P(A), P(B)]$ ($\rho_{kl} < 0$ の時) (29)

さて、図-1中の $P(A)$ 、 $P(B)$ の式を参照すると、次のことが言える。まず $\rho_{kl} = 1$ のとき、

$\min [P(A), P(B)] = 0$ または $0.5 (P(A) + P(B))$ (30)

$$a = \frac{\beta_k - \rho_{kl} \beta_l}{\sqrt{1 - \rho_{kl}^2}} \quad b = \frac{\beta_l - \rho_{kl} \beta_k}{\sqrt{1 - \rho_{kl}^2}}$$

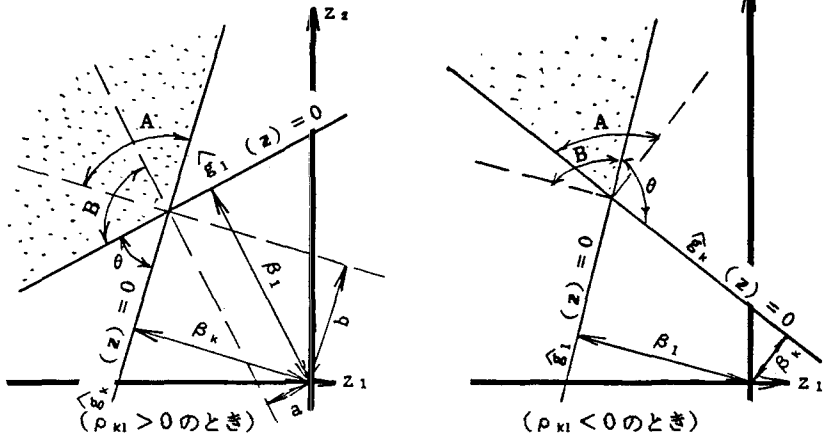


図-2 z空間におけるモード k, l

であるから、

$$p_{kl} = \max [P(A), P(B)] = P(A) + P(B) \quad (31)$$

と書くことができる。また $\rho_{kl} = 0$ のときには

$$p_{kl} = P(A) = P(B) = 0.5 (P(A) + P(B)) \quad (32)$$

となる。さらに $\rho_{kl} = -1$ のときには

$$p_{kl} = 0 \quad (33)$$

である。

これらの式 (31) ~ (33) と、 p_{kl} は図-2で重複している部分 (図中に・印がついてる部分) の面積に比例するものと仮定すると、 p_{kl} の近似式として次の式が考えられる。

$$p_{kl} = \alpha_p \{P(A) + P(B)\} \geq \max [P(A), P(B)] \quad (\rho_{kl} > 0 \text{ のとき}) \quad (34)$$

$$\alpha_N \{\min [P(A), P(B)]\} \quad (\rho_{kl} < 0 \text{ のとき}) \quad (35)$$

ここに、

$$\alpha_p = \left(1 - \frac{\cos^{-1} \rho_{kl}}{\pi}\right), \quad \alpha_N = 2 \alpha_p \quad (36), (37)$$

しかし実際に幾つかの例についてシミュレーションにより比較してみると、この α_p 、 α_N よりも ρ_{kl} をそれぞれ、 $\rho_{kl} > 0.5$ のときには1により近く、 $0.5 > \rho_{kl} > -0.5$ のときは0により近く、 $\rho_{kl} < -0.5$ のときには-1により近くした方が良く合う。そこで、式 (36) 中の ρ_{kl} の代わりに次の ρ_{kl}' を用いることにする。

$$\rho_{kl}' = \rho_{kl}^q \quad (\rho_{kl} > 0 \text{ のとき}), \quad -|\rho_{kl}|^q \quad (\rho_{kl} < 0 \text{ のとき}) \quad (38)$$

ここに、

$$q = \rho_{kl}^2 - 2.5 |\rho_{kl}| + 2 \quad (39)$$

とする。

このような扱いは、変数が非正規とか破壊基準関数が非線形の場合には、全確率分布安全性指標から求まる破壊確率に若干の誤差が含まれること、また確率分布に関する情報が必ずしも十分でないことを勘案すると、許せるものと考えられる。

4. 変数間に相関がある任意分布に従う変数を乱数で発生させる方法

いま標準化正規変数を $\mathbf{z}$ とし、これを乱数で発生させると、相関のある多変数正規乱数は、式 (17) より得られる。しかし、この方法は固有値問題を解いて、変換マトリックス $\mathbf{L}$ を求めなければならない。そこでもっと簡単に相関をつける、次のような別な方法が提案^{(12),(13)}されている。

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}' \mathbf{z} + \bar{\mathbf{x}} \quad \dots \dots \dots (40)$$

この式中の $\mathbf{C}'$ のエレメント c_{ij}' は、変数 $\mathbf{x}$ の共分散 $\mathbf{C}_x$ を利用して次のような手順で作る。

$$(1) \ c_{ii}' = \text{Cov}(x_i, x_i) / \sqrt{\sigma_{x_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (41)$$

$$(2) \ c_{ij}' = (\text{Cov}(x_i, x_j) - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}' c_{jk}') / c_{jj}' \quad (k < j < i \leq n) \quad \dots \dots \dots (42)$$

$$c_{ii}' = \sqrt{(\sigma_{x_i}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}'^2)} \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (43)$$

$$(3) \ c_{ij}' = 0 \quad (i < j \leq n) \quad \dots \dots \dots (44)$$

さて変数間に相関がある任意分布に従う変数を乱数で発生させる方法はまだ開発されていない。そこでここでは、相関だけは正規分布と同じとみなして、上記の方法を利用した近似的な方法について提案する。

いま、任意確率分布の分布関数を F_i とし、変数間に相関がないものとする、標準化正規乱数 z_i を用いて、次式から変数 x_i を作ることができる。

$$x_i = F_i^{-1} [\Phi(z_i)] \quad \dots \dots \dots (45)$$

ここで、すべての変数は相関のある正規分布であると考え、正規乱数は式 (40) により求められる。これに対応する標準化変数 $\mathbf{z}'$ は、

$$\mathbf{C}' \mathbf{z} = \sigma_x \mathbf{z}' \quad \dots \dots \dots (46)$$

の関係から、

$$\mathbf{z}' = \sigma_x^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{z} \quad \dots \dots \dots (47)$$

から得られる。この $\mathbf{z}_i'$ を式 (45) の z_i の代わりに用いると、相関だけは正規分布と同じとみなした、近似的な相関のある任意確率分布乱数が得られる。なお式 (47) の具体的な計算式は次のようになる。

$$z_i' = \sum_{j=1}^n c_{ij}' z_j / \sigma_{x_i} \quad \dots \dots \dots (48)$$

式 (40) はすべての変数が正規分布の場合にのみ成立するものである。したがって、本法は一近似法である。しかし本法により実際に乱数を発生させた結果（後述）では、各変数の周辺分布とそのパラメータ（平均値、分散等）及び相関の条件はほぼ満たされている。周辺分布と相関の条件だけから結合確率密度関数は定まらない。しかし互いに相関のある非正規変数の結合確率密度関数として、周辺分布と相関だけを満足する近似式が用いられている⁽¹⁴⁾ことも考えると、本法は使用に耐えるものと言える。

5. 計算例及び考察

(1) 二つの破壊モードの同時破壊確率 p_{ki} について

3章の最後で二つの破壊モードの同時破壊確率 p_{ki} の近似的な取り扱いについて述べた。この妥当性をみるために若干の計算例によって比較する。変数は三個の正規変数で、平均値、変動係数は次に示すように、

$$\bar{\mathbf{x}} = [1.0 \ 1.0 \ 1.0]^T, \quad \mathbf{V} = [0.2 \ 0.1 \ 0.2]^T \quad \dots \dots \dots (49)$$

とし、種々なモードの組み合わせについて、本法と、十分な精度が得られるようなモンテカルロ法（以下M法という）により、各モードの破壊確率及び同時破壊確率を計算した結果を表一2に示す。なお表中備考欄に Ditlevsen の提案した式

表一2 同時破壊確率の比較

モードの種別	方法	P_1	P_2	ρ_{12}	P_{12}	$P_{12}^L \sim P_{12}^U$
$2x_1+3x_2-3x_3$ $x_1-x_2+0.417x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.040293 .040273	.000	.000210 .000201	.000210 ~ .000210
$2x_1+3x_2-3x_3$ $x_1-x_2+0.35x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.067619 .067587	.044	.000435 .000436	.000435 ~ .000858
$2x_1+3x_2-3x_3$ $3x_1-x_2-x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.059175 .059115	.660	.003176 .003469	.002965 ~ .0041983
$2x_1+3x_2-3x_3$ $x_1+2x_2-2x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.020613 .020623	.993	.005223 .005221	.005223 ~ .005223
$2x_1+3x_2-3x_3$ $x_1-2x_2+x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.020613 .020543	-.57	.0 .0	.0 ~ .0
$2x_1+3x_2-3x_3$ $-x_1-2x_2+5x_3$	本法 M法	.005223 .005221	.027146 .027055	-.91	.0 .0	.0 ~ .0

による、 $P_{12}^L \sim P_{12}^U$ の値が記されている。この表から、提案した同時破壊確率の近似法は ρ_{12} の種々な値に対しても、M法に近い値となっていることがわかる。

(2) Ang 等の PENT 法による例

Ang 等¹⁵⁾が PENT 法（モード間の相関が 0.6 以上を 1.0 に、0.6 未満を 0.0 とする近似解法）の説明で用いた、図一3に示す門形ラーメンの例は、変数はすべて正規変数で相関はなく、破壊基準関数もすべて線形である。

$$g_1(x) = 4x_1 + 2x_2 - 10x_3 - 15x_4 \quad (50)$$

$$g_2(x) = 4x_1 - 15x_4 \quad (51)$$

$$g_3(x) = 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 15x_4 \quad (52)$$

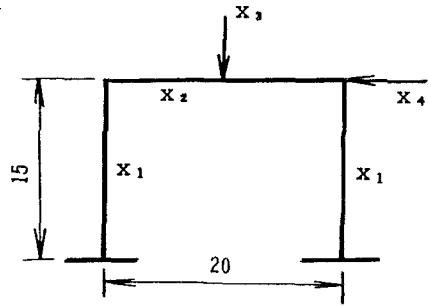
$$g_4(x) = 3x_1 + x_2 - 15x_4 \quad (53)$$

$$g_5(x) = 4x_2 - 10x_3 \quad (54)$$

$$g_6(x) = 2x_1 + 2x_2 - 15x_4 \quad (55)$$

$$g_7(x) = x_1 + 3x_2 - 10x_3 \quad (56)$$

$$g_8(x) = 2x_1 + 2x_2 - 10x_3 \quad (57)$$



図一3 門形ラーメンの例

ここでは比較のために、変数間に相関があり、かつ非正規

変数を含む若干のケース（表一1のPL1～PL4に当たる）についても計算を行った。結果をM法の結果と共に表一3～6に示す。なお、平均値、変動係数は

$$\bar{x} = [360 \ 480 \ 100 \ 50]^T, \quad V = [0.15 \ 0.15 \ 0.10 \ 0.30]^T \quad (58)$$

で、ワイブル分布の場合、下限値は、平均値－5（標準偏差）としてある。各確率変数が正規分布の場合、表一3、4に見られるように、各モードの安全性指標 β_i は、M法の結果と一致し、システムとしての安全性指標 β もほぼ一致している。確率変数に非正規分布が含まれる場合は表一5、6にあるように、M法と若干の差異はあるが、ほぼ妥当な結果と言えよう。なお β_0 は図一1中の p_{k1} を使用した場合の結果である。

次に、4章で提案した乱数の発生法の妥当性を見るために、本例において、 x_1 ：正規分布、 x_2 ：ワイブル分布、 x_3 ：対数正規分布、 x_4 ：極値Ⅰ型最大値分布とし、相関係数を、

表-3 門形ラーメンの計算結果

(x_1 : 正規, x_2 : 正規, x_3 : 正規, x_4 : 正規, 変数間相関なし)

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β	β_D
本法	1.82	2.21	2.26	2.83	3.02	3.23	3.28	3.30	1.82~ 1.74	1.82~ 1.70
M法	1.82	2.21	2.26	2.83	3.02	3.23	3.28	3.30	1.75	1.75
本/M	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.04~ 0.99	1.04~ 0.97

表-4 門形ラーメンの計算結果

(x_1 : 正規, x_2 : 正規, x_3 : 正規, x_4 : 正規, $\rho_{12}=0.5$, $\rho_{34}=0.8$)

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β	β_D
本法	1.47	2.21	1.89	2.65	3.02	2.96	3.00	2.82	1.47~ 1.45	1.47~ 1.45
M法	1.47	2.21	1.89	2.65	3.03	2.97	3.00	2.83	1.47	1.47
本/M	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00~ 0.99	1.00~ 0.97

表-5 門形ラーメンの計算結果

(x_1 : ワイブル, x_2 : ワイブル, x_3 : 対数正規, x_4 : 極値 I, 変数間相関なし)

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β	β_D
本法	1.83	2.04	2.17	2.39	2.78	2.63	3.04	3.07	1.83~ 1.69	1.83~ 1.61
M法	1.71	1.98	2.07	2.35	2.77	2.59	3.04	3.07	1.63	1.63
本/M	1.07	1.03	1.05	1.02	1.00	1.02	1.00	1.00	1.12~ 1.04	1.12~ 0.99

表-6 門形ラーメンの計算結果

(x_1 : ワイブル, x_2 : ワイブル, x_3 : 対数正規, x_4 : 極値 I, $\rho_{12}=0.5$, $\rho_{34}=0.8$)

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β	β_D
本法	1.51	2.04	1.85	2.32	2.78	2.54	2.77	2.62	1.51~ 1.47	1.51~ 1.45
M法	1.42	1.98	1.77	2.27	2.77	2.49	2.77	2.62	1.41	1.41
本/M	1.06	1.03	1.05	1.02	1.00	1.02	1.00	1.00	1.07~ 1.04	1.07~ 1.03

$$\rho_{11}=1.0, \rho_{12}=-0.5, \rho_{13}=0.2, \rho_{14}=0.1, \rho_{23}=0.4, \rho_{24}=-0.2, \rho_{34}=0.5 \quad (59)$$

として発生させた1万組の乱数の, 平均値, 変動係数, 相関係数は次の通りである。

$$\bar{\mathbf{X}} = [360.0 \ 480.2 \ 100.1 \ 50.0]^\top, \mathbf{V} = [0.15 \ 0.15 \ 0.10 \ 0.30]^\top \quad (60)$$

$$\rho_{11}=1.0, \rho_{12}=-0.49, \rho_{13}=0.20, \rho_{14}=0.10, \rho_{23}=0.41, \rho_{24}=-0.18, \rho_{34}=0.49 \quad (61)$$

このようにかなり極端な相関係数の場合でも, ほぼ満足できる結果が得られ, 周辺分布と相関係数の条件をほぼ満たす乱数が, 提案した方法で発生可能であるといえることができる。

(3) はりの例

これは, 次に示すようなはりの曲げ破壊とせん断破壊の二つのモードについての問題である。

$$g_1(\mathbf{X}) = \sigma_f Z E_{R1} - (M_D + M_L) E_S \quad (62)$$

$$g_2(\mathbf{X}) = \tau_f A_w E_{R2} - (S_D + S_L) E_S \quad (63)$$

ここに, σ_f : 鋼材の降伏点強度 (W), Z : 断面塑性係数 (N), E_{R1} : 曲げ強度算定修正係数 (N), M_D : 死荷重曲げモーメント (N), M_L : 活荷重曲げモーメント (LN), E_S : 断面力算定修正係数 (N), τ_f : 鋼材のせん断強度 (W), A_w : 鋼材のウェブの断面積 (N), E_{R2} : せん断強度算定修正

係数 (N), S_D : 死荷重せん断力 (N), S_L : 活荷重せん断力 (LN), とする。なお, カッコ内の記号は次のような確率分布の種類を示す。N : 正規分布, LN : 対数正規分布, W : ワイブル分布。ここで $S_D = \alpha M_D$ において, 二つの破壊基準関数を次のように表現する。

$$g_1(x) = x_1 x_2 x_3 - (x_4 + x_5) x_6 \dots\dots\dots (64)$$

$$g_2(x) = x_7 x_8 x_9 - (\alpha x_4 + x_{10}) x_6 \dots\dots\dots (65)$$

計算には次に示すような平均値及び変動係数を用いた。

$$\bar{x} = [2800 \text{ kgf/cm}^2 (274 \text{ MPa}) \quad 525.5 \text{ cm}^3 \quad 1.0 \quad 2.5 \text{ tf-m} (24.5 \text{ kN-m}) \quad 7.5 \text{ tf-m} (73.5 \text{ kN-m}) \\ 1.0 \quad 1600 \text{ kgf/cm}^2 (157 \text{ MPa}) \quad 14.08 \text{ cm}^3 \quad 1.0 \quad 12 \text{ tf} (118 \text{ kN})]^T \dots\dots (66)$$

$$V = [0.05 \quad 0.01 \quad 0.10 \quad 0.05 \quad 0.25 \quad 0.20 \quad 0.05 \quad 0.01 \quad 0.10 \quad 0.25]^T \dots\dots\dots (67)$$

ここでは, 変数の中に非正規変数があり, 変数間には相関があるものを含み, かつ破壊基準関数が非線形な例として二つのケース (表-1 のPN3, PN4 に当たる) について計算し, その結果を表-7 ~ 8 に示す。なお $\alpha = 1 \text{ m}^{-1}$ としてある。

この例では, 各モードの安全性指標, 同時破壊確率及び全体の安全性指標のいずれも, 本法とM法はほぼ一致した。

また表-8 のケースについて発生させた, 20万組の乱数の平均値, 変動係数及び相関係数は次のようである。

$$\bar{x} = [2800.5 \quad 525.5 \\ 1.00 \quad 2.500 \quad 7.50 \\ 1.00 \quad 1600.2 \quad 14.08 \\ 1.00 \quad 11.99]^T \dots\dots\dots (68)$$

$$V = [0.05 \quad 0.01 \quad 0.10 \quad 0.05 \quad 0.25 \quad 0.20 \quad 0.05 \quad 0.01 \quad 0.10 \quad 0.25]^T \dots\dots\dots (69)$$

$$\rho_{17} = 0.798, \rho_{24} = 0.400, \rho_{28} = 0.199, \rho_{48} = 0.201, \rho_{39} = 0.900, \rho_{510} = 0.898 \dots\dots\dots (70)$$

以上からも, 提案した非正規乱数の発生法は十分実用に耐えるものと思う。なお本例でもワイブル分布の下限值は, 平均値-5 (標準偏差) としてある。

6. まとめ

以上を要約すると次のようになる。

- (1) 既往の研究を総合的に取り入れた, 全確率分布安全性指標 β の効率の良い計算手順を示した。
- (2) 一般的で, 簡単な, モード間の相関係数の計算式を誘導し, 効率の良い計算手順で解ける範囲をすべてのケースに拡大した。
- (3) 複数個の破壊基準関数がある場合, 安全性指標の範囲を狭めるために, 同時破壊確率の近似計算法を提案した。
- (4) 各確率変数間に相関のある, 非正規乱数の近似的発生法を提案した。
- (5) 幾つかの計算例によって, 以上の提案の有効性が確認された。

表-7 はりの計算結果 (変数間相関なし)

	β_1	β_2	ρ_{12}	P_{12}	β	β_D
本法	1.43	1.56	0.3453	0.01154	1.16	1.20~ 1.15
M法	1.42	1.56		0.01275	1.15	1.15
本/M	1.01	1.00		0.91	1.01	1.04~ 1.00

表-8 はりの計算結果

($\rho_{17} = 0.8, \rho_{24} = 0.4, \rho_{28} = \rho_{48} = 0.2, \rho_{39} = \rho_{510} = 0.9$)

	β_1	β_2	ρ_{12}	P_{12}	β	β_D
本法	1.43	1.56	0.9293	0.04634	1.35	1.38~ 1.26
M法	1.42	1.55		0.04839	1.35	1.35
本/M	1.01	1.01		0.96	1.00	1.02~ 0.93

参考文献

- 1) Cornell, C.A. : Structural Safety Specifications Based on Second-Moment Reliability Analysis, Final Rep., IABSE Symp. on Concepts of Safety and Method of Design, pp. 235~246, 1969
- 2) Hasofer, A.M. and N.C. Lind : Exact and Invariant Second-Moment Code Format, Proc. of ASCE, Vol.100, No. EM1, pp. 111~121, 1974.
- 3) Rackwitz, R. and B. Fießler : Note on Discrete Safety Checking when using Non-normal Stochastic Models for Basic Variables, Sonderforschungsbereich 96, Technical University of Munich, 14, 1976.
- 4) Lind, N.C. : Formulation of Probabilistic Design, Proc. of ASCE, Vol.103, No. EM2, pp. 273~284, 1977.
- 5) Parkinson, D.B. : Solution for Second Moment Reliability Index, Proc. of ASCE, Vol.104, No.EM5, pp. 1267~1275, 1978.
- 6) Ditlevsen, O. : Narrow Reliability Bounds for Structural Systems, J. of Structural Mechanics, Vol.7, No.4, pp.453~472, 1979.
- 6) 長尚 : 安全性指標に関する若干の考察, 土木学会論文報告集, 第324号, pp.41~50, 1982.
- 7) Melchers, R.E. : Reliability of Parallel Structural Systems, Proc. of ASCE, J. of SE, Vol. 109, No.11, pp. 2651~2665, 1983.
- 8) Ang, A.H-S. and W.H. Tang : Probability Concepts in Engineering Planning and Design Vol.II, John Wiley and Sons, Inc., pp.333~470, 1984.
- 9) Ramachandran, K. : Discussion to Basic Analysis of Structural Safety, Proc. of ASCE, J. of SE, Vol.110, No. 10, pp.2554~2556, 1984.
- 10) Ramachandran, K. and I.A. Hosking : Reliability Approach to Stability Analysis of Soil/Rock Slopes, Proc. 5th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Vol.2, pp. 1019~1028, 1985.
- 11) 長尚 : 相関がある場合の安全性指標, 土木学会第40回年次学術講演会講演概要集第1部, pp. 241~242, 1985.
- 12) Anderson, T.W., : An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons, Inc., 1958.
- 13) 宮武修, 脇本和昌 : 乱数とモンテカルロ法, 森北出版, pp.25~27, 1978.
- 14) Grigoriu, M. : Crossing of Non-Gaussian Translation Processes, Proc. of ASCE, J. of EM, Vol.110, No. 4, pp.610~620, 1984.
- 15) Ang, A.H-S. and H-F. Ma : On the Reliability Analysis of Framed Structures, Proc. of the Specialty Conference on Probabilistic Mechanics and Structural Reliability, pp.106~111, 1979.

(1985年10月18日受付)