

単一変位制約下における 一般的な最適性規準法に関する研究

THE STUDY OF GENERALIZED OPTIMALITY CRITERION METHOD UNDER SINGLE DISPLACEMENT CONSTRAINT

古川浩平* 菊池英明**

By Kohei FURUKAWA and Hideaki KIKUCHI

Although the mathematical programming methods for optimum design of structures have been progressed rapidly, there are still many problems in the application to actual structural design. This is mainly due to the fact that the structures tend to become larger and more complex, and more computational time is required to obtain the optimum design. The optimality criterion method have been inovated to overcome these problems. Therefore, the method is noted for a quick convergence, but has less applicability. In this study, the authors developed the generalized optimality criterion method under single displacement constraint which can also apply the optimum design for truss and frame structures under static and dynamic loading conditions. Some design examples are presented to demonstrate the convergency and applicability of the method developed herein.

1. 緒論

近年電子計算機の発達に伴って構造物の最適設計が能率的、機能的に行われるようになり、これまでの設計者の勘に頼っていた設計法に比べ、客観的で信頼性の高い結果が得られるようになってきた。しかし過去に行われた計算機を用いた最適設計法の大多数は数理計画法を応用しているため、構造物の大規模・複雑化に伴う設計変数の増加により、最適解への収束性が悪くなり、計算時間も著しく増加する欠点を持つ。近年この問題点を克服するために、非数理計画手法である最適性規準法に関する研究が数多く行われるようになってきた。この最適性規準法は収束性には優れているが、設計対象構造物の応答特性に基づいて最適性の規範が決められているため、汎用性が小さいという弱点を持つ。

本研究ではこれらの点をふまえ、最適性規準法の収束性の良さを保持した上でより汎用的な手法の開発を試みる。外力を受ける構造物の変位制約下における最適性規準は、一般に多変位制約問題を解くことより得られる。しかし実際の橋梁構造物等の設計を考えた場合、外力に関する規定や支持条件などを考えると、そのほとんどが構造物の最大変位点をあらかじめ推定でき、その最大変位点の変位を制約とした設計を行ってよく、単一変位制約問題として取り扱えば十分である。それに加え、単一変位制約問題とすることで最適性規準が単純化され、計算手法の簡略化が可能である。その反面、多変位制約問題に対しては規準の性質上十分に対応できない場合が生じる。

本研究では最適性規準の一般性と手法の簡略化を考え、まず静的外力を受ける構造物の単一変位制約下に

* 工博 山口大学助教授 工学部建設工学科 (〒755 山口県宇部市常盤台2557)

** 九州大学大学院 工学研究科 水工土木学専攻 (〒812 福岡市東区箱崎8-10-1)

おける汎用的な最適性規準を導き、次いでこの規準が既に発表されているトラス構造物の最適性規準と同一であることを示す。更に動的外力を受ける構造物の変位制約下の最適性規準を導き、静的外力下の最適性規準とは応答が異なるためその導き方が異なるだけで、その考え方は同じであることを示す。それを用いて、トラス・ラーメン構造物、静的・動的外力下で変位・応力・最小断面積制約を網羅した一般的な手法の開発を行う。この時、応力に関する最適性規準としては全応力設計法の考え方をを用いる。これらの各制約を統合する設計手法としては、包絡法の考えを用いて一般的な最適性規準法を確立する。

2、静的外力下における最適性規準

2.1 最適性規準の定式化

本研究で取り扱う最適化問題の目的関数は、次式で示される構造物の総重量 W により与えられる。

$$W = \sum A_i \cdot l_i \cdot \rho_i \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

ここに、 A_i, l_i, ρ_i はそれぞれ i 要素の断面積、要素長、単位体積重量である。構造物のある点の変位 δ_j が与えられた許容変位 δ_a となる最小重量構造物は、目的関数 W と等号制約 $\delta_a - \delta_j = 0$ より形成される次のラグランジュ関数 L の停留点を求めることにより得られる。

$$L = \sum A_i \cdot l_i \cdot \rho_i + \lambda (\delta_a - \delta_j) \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

ここに、 λ はラグランジュ乗数である。マトリックス解析法を用いれば着目点 j の変位 δ_j は次式で表される。

$$\delta_j = \mathbf{B}_j^T \cdot \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}_j^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

ここに、 $\mathbf{K}$ は剛性マトリックス、 $\mathbf{P}$ は荷重ベクトル、 $\mathbf{B}_j$ は変位着目点 j に1がはいり残りはゼロのベクトル、 $\boldsymbol{\delta}$ は変位ベクトルである。式(3)を式(2)に代入し、両辺を A_i で偏微分することにより式(2)の停留点を求めれば次式となる。

$$\partial L / \partial A_i = l_i \cdot \rho_i - \lambda \mathbf{B}_j^T \cdot \partial \boldsymbol{\delta} / \partial A_i = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

式(4)の $\partial \boldsymbol{\delta} / \partial A_i$ を求めるには、式(3)の両辺を断面積 A_i で偏微分することにより次のように求められる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial A_i} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i} \boldsymbol{\delta} \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

ここで、剛性マトリックス $\mathbf{K}$ の各要素は、軸力部材の時断面積 A_i の1次関数となり、曲げ部材の時断面積 A_i の2次関数となることから、 γ を軸力部材の時1、曲げ部材の時2の定数とすると次式¹⁾となる。

$$\partial \mathbf{K} / \partial A_i = \gamma \mathbf{K}_i / A_i \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

ここに $\mathbf{K}_i$ は i 要素に関連した部分にのみ値が入り残りはゼロの剛性マトリックスである。式(4)に式(5)、(6)を代入し、変形することにより、次式を得る。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\gamma \mathbf{B}_j^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_i \boldsymbol{\delta}}{A_i \cdot l_i \cdot \rho_i} \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

ラグランジュ乗数 λ は定数であるため、全ての要素において式(7)に示す λ が等しくなったときに最小重量構造物を得ることができる。式(7)の $1/\lambda$ を ν_{ij}^* とおくことにより

$$\nu_{ij}^* = \frac{\gamma \mathbf{B}_j^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}_i \boldsymbol{\delta}}{A_i \cdot l_i \cdot \rho_i} \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

よって、構造物の重量を最小にする最適性規準は、式(8)に示す ν_{ij}^* が全要素ですべて等しくなることと表現できる。

2.2 仮想変位の原理による最適性規準

トラスの仮想変位の原理を用いることにより、着目点変位 δ_j は次のように表される²⁾。

$$\delta_j = \sum \frac{\bar{F}_i F_i}{A_i E_i} l_i \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここに E_i は i 要素の弾性係数、 F_i は実荷重系における i 要素の内力、 $\bar{F}_i$ は仮想荷重系における i 要素の内力である。式(9)を式(2)に代入し、断面積で微分することにより、次式が得られる²⁾。

$$\partial L / \partial A_i = l_i \rho_i - \lambda \frac{\bar{F}_i F_i l_i}{A_i^2 E_i} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

またマトリックス解析法より $\bar{F}_i \cdot F_i$ は次式のように表現できる。

$$\bar{F}_i F_i = \frac{A_i E_i}{l_i} \bar{\delta}^T K_i \delta \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $\bar{\delta}$ は仮想荷重系における変位ベクトル、 δ は実荷重系における変位ベクトルである。式(10),(11)より

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\bar{\delta}^T K_i \delta}{A_i l_i \rho_i} \quad \dots \dots \dots (12)$$

式(12)による各要素の $1/\lambda$ を ν_{12}^s と置くことにより次式を得る。

$$\nu_{12}^s = \frac{\bar{\delta}^T K_i \delta}{A_i l_i \rho_i} \quad \dots \dots \dots (13)$$

よって、構造物の重量を最小とするトラスの仮想変位に基づいた最適性規準は式(13)に示す ν_{12}^s がすべて等しくなることと表現できる。

2.3 ν_{11}^s 、 ν_{12}^s の関係

仮想荷重系における荷重ベクトルを $\bar{P}$ とすると、マトリックス解析法により次式が得られる。

$$\bar{\delta} = K^{-1} \bar{P} \quad \dots \dots \dots (14)$$

式(14)の両辺を転置すると

$$\bar{\delta}^T = (K^{-1} \bar{P})^T = \bar{P}^T K^{-1} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$\bar{P}$ は仮想荷重系であり変位着目点 j のみに 1 がはいり残りはゼロのベクトルである。これに対し式(8)の B_j は単一変位制約下の場合、変位制約点 j のみに 1 がはいり残りはゼロのベクトルである。従って単一変位制約下においては $\bar{P}$ と B_j は同じベクトルであることがわかる。よって式(8)は式(15)を用いて次のように表すことができる。

$$\nu_{11}^s = \frac{\gamma B_j^T K^{-1} K_i \delta}{A_i l_i \rho_i} = \frac{\gamma \bar{\delta}^T K_i \delta}{A_i l_i \rho_i} = \gamma \nu_{12}^s \quad \dots \dots \dots (16)$$

軸力部材のとき $\gamma = 1$ であるから ν_{11}^s と ν_{12}^s とはトラス構造物においては等しい。以上より規準 ν_{11}^s は、単一変位制約下においてはトラス構造物の応答から得られた規準 ν_{12}^s と同じであることがわかる。また式(8)はラーメン構造物に対しても適用できることからより一般的な最適性規準であると言える。

3. 動的な外力下における最適性規準

動的な外力をうける構造物の剛性はその固有値で表すことができる。構造物の固有値は固有振動数を ω とすると、レイリー商により次式で表される。

$$\omega^2 = x^T K x / x^T M x \quad \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 M は質量マトリックス、 x は動的変位ベクトルである。構造物の固有振動数 ω が与えられた許容値 ω_a となる最小重量構造物は、目的関数 W と等号制約 $\omega_a^2 - \omega^2 = 0$ より形成される次式のラグランジ

ユ関数Lの停留値を求めればよい。

$$L = \sum A_i l_i \rho_i + \lambda (\omega_a^2 - \omega^2) \quad \dots \dots \dots (18)$$

部材断面の変化が動的変位に及ぼす影響は小さいとして無視し、式(6) の関係を用いると、式(18)の停留値は次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_i} &= l_i \rho_i - \lambda \frac{(\mathbf{x}^t \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i} \mathbf{x})(\mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}) - (\mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x})(\mathbf{x}^t \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial A_i} \mathbf{x})}{(\mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x})^2} \\ &= l_i \rho_i - \lambda \frac{\gamma \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} = 0 \quad \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

式(19)を変形し、 $1/\lambda_i$ を ν_i^D と置くことにより、次式を得る。

$$\frac{1}{\lambda} = \nu_i^D = \frac{\gamma \mathbf{x}^t \mathbf{K}_i \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x}^t \mathbf{M}_i \mathbf{x}}{A_i l_i \rho_i \cdot \mathbf{x}^t \mathbf{M} \mathbf{x}} \quad \dots \dots \dots (20)$$

よって動的外力下における最適性規準は、式(20)に示す ν_i^D を全要素で等しくすることと表現できる。式(8) と式(20)は外力が異なるため構造解析部分が異なるが、その結果求められた ν_{ii}^S と ν_i^D は全く同じ意味を持つものであり、 ν_{ii}^S あるいは ν_i^D を全要素で等しくした構造物が最小重量構造物となる。

4、一般的な最適設計手法

本研究では式(8) あるいは式(20)の ν_i を全要素で等しくすることの他に、次の条件も満たさなければならない。

$$\text{変位制約} \quad \delta_j \leq \delta_a \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$\text{応力制約} \quad |\sigma_i| \leq \sigma_a \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$\text{最小断面積制約} \quad A_i \geq A_{\min} \quad \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 σ_i はi要素の応力、 σ_a は許容応力、 $A_{\min}$ は許容最小断面積である。4、では以上4つの条件を満足するための一般的な最適化手法の定式化を行う。この場合、すでに3、で述べたように、式(8) あるいは式(20)の ν_i は外力が異なるため構造解析は異なるが、その結果得られた最適性規準 ν_i は全く同じ意味を持つものであり、以下の一般的な最適設計手法は、静的・動的外力、トラス・ラーメン構造物に共通した定式化である。

まず、変位制約下における一般的な最適化手法の定式化を行う。式(8) あるいは式(20)の最適性規準の分布は最適剛比分布と同じ傾向を示していることはすでに明らかになっている¹⁾。そのため断面変更を ν_i に比例した形で行うことによって最適解へ収束させることができる。n,n+1 を繰り返し回数とすると、断面変更前後の重量を等しくさせ、かつ最適剛比分布に漸近させるには、次式の断面変更を行えばよい。

$$A_i^{n+1} = \frac{\sum A_j^n l_j \rho_j}{\sum A_j^{n+1} l_j \rho_j} \nu_i^a A_i^n = \frac{\sum A_j^n l_j \rho_j}{\sum \nu_j^a A_j^n l_j \rho_j} \nu_i^a A_i^n \quad \dots \dots \dots (24)$$

ここに、aは収束性と安全性を高めるための定数である。式(24)の断面変更は ν_i の均等化だけであるため、式(8) あるいは式(20)の条件しか満たしていない。そこで式(21)をも満たすために次のことを考える。まずn,n+1 サイクルにおける構造物の固有振動数と変位の間に次のような関係を仮定する³⁾。

$$(\omega^{n+1})^2 \delta^{n+1} = (\omega^n)^2 \delta^n \quad \dots \dots \dots (25)$$

一般の構造物においては固有振動数 ω は次式のように表される。

$$\omega^2 = k/m \quad \dots \dots \dots (26)$$

ここに、kはばね定数、mは質量である。トラス構造物においてはkは断面積Aの1次式で、ラーメン構造物では断面2次モーメントIの1次式で表され、かつIがAの2次式で表されることを考え合わせると、式

(25)は次式となる。

$$\frac{(A_{i1}^{n+1})^r}{m^{n+1}} \delta^{n+1} = \frac{(A_{i1}^n)^r}{m^n} \delta^n \quad \dots \quad (27)$$

ここに、 r はトラス構造物の時1、ラーメン構造物の時2の定数である。 $n, n+1$ サイクルの間で m が変化しないと考えると、 $n+1$ サイクル目で許容変位 δ_a に収束しなければいけないことから、

$$A_{i1}^{n+1} = \left(\frac{\delta^n}{\delta_a} \right)^{1/r} A_{i1}^n = \left(\frac{\delta^n}{\delta_a} \right)^b A_{i1}^n \quad \dots \quad (28)$$

ここに b はトラス構造物の時1、ラーメン構造物の時0.5の定数である。既に式(24)で全要素の ν_i を等しくするように断面変更がなされているため式(24)の A_{i1}^{n+1} を式(28)の A_{i1}^n に代入することにより ν_i を一定にし、かつ変位を許容変位に収束させる断面変更は次式となる。

$$A_{i1}^{n+1} = \left(\frac{\delta^n}{\delta_a} \right)^b \frac{\sum A_{j1}^n l_j \rho_j}{\sum \nu_j^a A_{j1}^n l_j \rho_j} \nu_i^a A_{i1}^n \quad \dots \quad (29)$$

式(8)あるいは式(20)の全要素の ν_i が等しくなるという条件の判定を、 ν_i のばらつきを示す指標 η を用いて次のように行う。

$$\eta = (\sum (\nu_i - \bar{\nu})^2 / m_e)^{1/2} / \bar{\nu} \leq 0.08 \quad \dots \quad (30)$$

ここに $\bar{\nu}$ は ν_i の平均値、 m_e は要素数である。この条件を満たしていれば最小重量との差が0.2%以下の差であることが既に確かめられている¹⁾。

次に応力制約及び最小断面積制約下における一般的な最適化手法を定式化する。式(22)の応力制約を有する最適化問題における最適性規準として古くから全応力設計法が用いられている。この手法は静的あるいは動的応力のみでも、静的、動的両応力を考慮する場合でも適用でき、また収束が速く数回の繰返し計算で収束することは良く知られている事実である。本研究においても応力制約における最適性規準法として全応力設計法を用いる。全応力設計法による断面変更は次式で表すことができる。

$$A_{i2}^{n+1} = (\sigma_i / \sigma_{ai})^c A_{i2}^n \quad \dots \quad (31)$$

ここに c は収束性を高めるための定数、 σ_i 、 σ_{ai} は各要素 i の実応力と許容応力である。

式(23)の最小断面積制約を有する最適化手法については次式を用いればよい。

$$A_{i3}^{n+1} = A_{\min} \quad \dots \quad (32)$$

ここに、 $A_{\min}$ は許容最小断面積である。

以上で、各要素の変位、応力、最小断面積制約を満たし、かつ各制約条件下で最小重量となる A_{i1}^{n+1} 、 A_{i2}^{n+1} 、 A_{i3}^{n+1} が求まったわけであるが、実際の設計においてはこれら3制約のすべてを満たす必要がある。そのため包絡法の考え方を用い $n+1$ サイクルの断面積を次式で求める。

$$A_{i1}^{n+1} = \max (A_{i1}^{n+1}, A_{i2}^{n+1}, A_{i3}^{n+1}) \quad \dots \quad (33)$$

本設計法の手順は次のように表すことができる。

- ① ある断面 A_{i1}^n で静的あるいは動的解析を行い、 δ_j 、 σ_j 、 ν_j を求める。
- ② 収束条件を満足しているか否かの判定を行い、収束していれば計算をストップする。そうでなければ③に行く。
- ③ 式(29),(31),(32)より A_{i1}^{n+1} 、 A_{i2}^{n+1} 、 A_{i3}^{n+1} を計算する。
- ④ 式(33)より A_{i1}^{n+1} を求め、 $A_{i1}^n = A_{i1}^{n+1}$ として①に戻る。

この時、注意を要する点が1つ存在する。 A_{i2}^{n+1} 、 A_{i3}^{n+1} が A_{i1}^{n+1} より大きい場合、式(30)によって ν_i のばらつきを表す指標 η を計算する際、その要素を取り除く必要がある。その要素は応力や最小断面積制約で断面の大きさが決まり、 ν_i の大きさとは関係なく断面積が決定され ν_i による断面変更が行われな

5、数値計算例及び考察

本章では、まず4、で定式化を行った一般的な最適性規準法を用い、静的外力をうける単一変位制約条件下のトラス構造物に適用し、その収束性などの検討を行う。次いで、多変数制約もしくは応力制約下の最適設計問題として取り扱われている構造物に対しても本手法を適用し、その有効性を検討する。動的な外力下における最適化問題に対しては、すでに筆者らが多くの研究¹⁾³⁾⁴⁾⁵⁾を発表していることもあり、ここでは主として静的な外力下におけるトラス構造物の最適化問題を対象として取り扱う。

5.1 単一変位制約下でのトラス構造物による収束性の検討

a) 6部材トラスにおける計算例

本研究で提案した一般的な最適性規準による収束値が全域的最適解に収束したかどうかを判断するため、大久保⁶⁾らの最適設計例を引用し比較検討する。計算例に用いる6部材トラスを図-1に示す。計算例で用いる初期値、許容変位、単位体積重量は大久保らと同じ値を使用する。部材の許容引張応力度 $\sigma_{ta} = 1400 \text{ kgf/cm}^2$ 、許容圧縮応力度 $\sigma_{ca} = -1300 \text{ kgf/cm}^2$ 、材料の単位体積重量は計算を簡単にするため $\rho = 1.0 \text{ kg/cm}^3$ 、断面積の初期値として全部材とも $A = 10.0 \text{ cm}^2$ 、 $P = 20 \text{ tf}$ を用いる。この計算結果を表-1に示す。

Case 1は許容変位 $\delta_a = 0.27 \text{ cm}$ とした例で全要素とも、許容応力に収束している。設計変数である部材断面積の最適解は両手法でわずかに違っているが、これは両手法の収束精度の違いによるため、本手法では

$$0.999 \leq \frac{\delta}{\delta_a}, \frac{\sigma}{\sigma_a} \leq 1.000 \quad \dots \dots \dots (34)$$

としているが、大久保らの研究では

$$\frac{\delta}{\delta_a}, \frac{\sigma}{\sigma_a} \leq 1.005 \quad \dots \dots \dots (35)$$

としているためであろう。目的関数である構造物の重量は収束精度による誤差を除けば、ほとんど同一値に収束していると考えられる。本手法ではわずか2回で最適解へ収束しており本手法の収束性が良いことがわかる。

Case 2は許容変位 $\delta_a = 0.25 \text{ cm}$ と厳しくした例で、両手法とも要素1、2、4は応力制約により、残りの要素は変位制約で断面が決まっている。この場合も部材断面積、構造物重量とも同じ値に収束していることがわかる。本手法による収束までに要する構造解析の回数は6回であり、変位、応力制約がアクティブであるにもかかわらずその収束性は非常に良好である。

Case 3は許容変位 $\delta_a = 0.23 \text{ cm}$ とさらに厳しくした例である。全要素とも変位制約により断面が決定され、この例の場合も部材断面積、構造物重量とも同じ値に収束していることがわかる。本手法の収束回数は6回である。この計算例は6変数問題であり、初期値において目的関数値、差分を用いてその微係数を求めるだけで7回の構造解析を必要とすることを考えると、本手法の収束性が非常に良好であることがわかる。図-2にCase 1~Case 3の構造物の重量収束状況を示す。この図からわかるように、非常になめらかに収束しており、かつはじめの数回の繰返しで最適解の近傍に収束していることがわかる。大久保らの論文では初期値により得られる最適解が少しずつ異なり、初期値による解の影響がわずかながらある。これに対して本研究で示した一般的な最適性規準法の場合では、初期値による解への影響はなく、本例においても初期値に関係なく同じ値に収束した。

b) 他のトラス構造物における計算例

次に、設計変数の数と収束性の関係を調べるため、設計変数の数がより多いトラス構造物に対して一般的

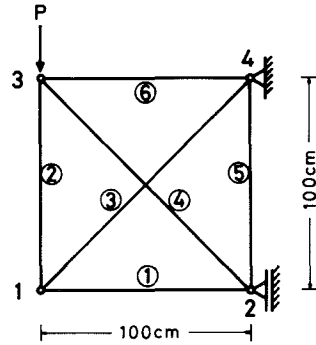


図-1 計算例に用いた6部材トラス

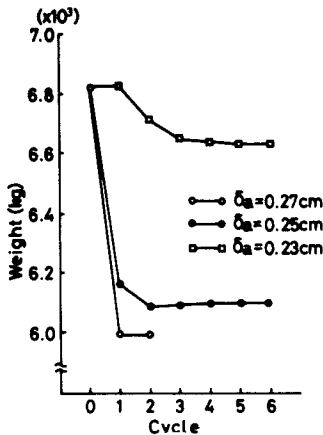


図-2 6部材トラスの重量収束状況

な最適性規準法を適用し考察を行う。計算例としているのは図-3に示す14部材トラスと図-4に示す17部材トラスであり、この最適化はKhot, Berke⁷⁾が行っている。計算例に用いる許容応力度 $\sigma_a = 50000 \text{ lbf/in}^2$ 、単位体積重量 $\rho = 0.288 \text{ lb/in}^3$ 、弾性係数 $E = 30 \times 10^6 \text{ lbf/in}^2$ 、最小断面積 $A_{\min} = 0.1 \text{ in}^2$ であり、これらはKhotらが用いたものと同じである。

図-3の14部材トラスにおける最適設計結果を表-2に示す。Case 1は節点5の許容変位 $\delta_a = 0.75 \text{ in}$ とした例で、要素1, 2, 3, 4, 6, 7は変位制約より、残りの要素は応力制約により決定されている。Case 2は節点9の許容変位 $\delta_a = 2.25 \text{ in}$ とした例で、すべての要素が変位制約により決定されている。表-2から明らかにように両ケースとも部材断面積、構造物重量ともにKhotら⁷⁾の結果と同じ値に収束している。収束回数はCase 1の場合7回、Case 2の場合8回である。

図-4に示した17部材トラスを対象として、以下の2Caseについて最適設計を行った。Case 1は節点5の許容変位 $\delta_a = 0.75 \text{ in}$ とした例で、最適解における各要素のアクティブな制約を図-5に示す。図中の太実線は変位制約が、太破線は応力制約が、細破線は最小断面積制約がアクティブであることを示す。図より明らかにように要素1, 3, 6, 7, 15は変位制約により、要素5, 9, 11, 13, 14, 17は応力制約により、残りの要素は最小断面積制約により決定されている。Case 2は節点9の許容変位 $\delta_a = 2.01 \text{ in}$ とした例で、要素2, 4, 8, 10、

表-1 6部材トラスの計算結果

Case			1		2		3	
変位制約点			3 (鉛直方向)					
許容変位 (cm)			0.27		0.25		0.23	
許容応力 (kgf/cm ²)			$\sigma_{ta}=1400$				$\sigma_{ca}=-1300$	
初期断面積 A (cm ²)			10.0					
計算手法			大久保	本手法	大久保	本手法	大久保	本手法
最適	断面積 A _{opt} (cm ²)	1	7.74	7.70	7.59	7.78	7.82	8.31
		2	7.75	7.70	7.59	7.78	7.82	8.31
		3	10.32	10.11	10.54	10.97	11.07	11.69
		4	10.64	10.88	11.01	10.75	12.38	11.69
		5	7.01	7.15	7.65	7.45	8.73	8.31
		6	7.01	7.15	7.65	7.45	8.73	8.31
適解	応力 σ (kgf/cm ²)	1	-1300	-1299	-1300	-1299	-1207	-1213
		2	-1298	-1298	-1300	-1299	-1207	-1213
		3	1401	1401	1324	1326	1206	1200
		4	-1300	-1300	-1301	-1299	-1205	-1200
		5	1400	1399	1324	1326	1209	1213
		6	1400	1399	1324	1326	1209	1213
解	鉛直方向 変位 δ (cm)	1	-0.195	-1.195	-0.188	-0.188	-0.172	-0.172
		2	-0.066	-0.067	-0.063	-0.063	-0.057	-0.053
		3	-0.257	-0.257	-0.250	-0.250	-0.229	-0.229
		4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	重量 W(kg)		5934.8	5937.0	6094.2	6093.0	6625.2	6631.6

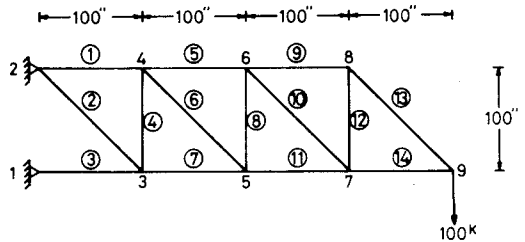


図-3 計算例に用いた14部材トラス

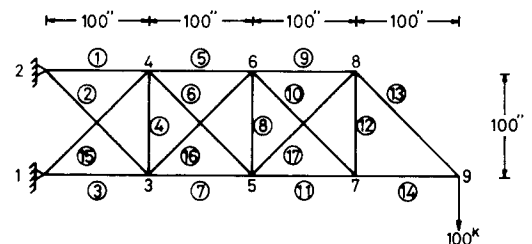


図-4 計算例に用いた17部材トラス

12.16 は最小断面積制約により、その他の要素は変位制約により決定されている。これらの収束回数は両ケースとも8回であり、その解はKhotら⁷⁾の解と一致している。この例でも明らかなように、本研究で提案した手法は、変位・応力・最小断面積制約のいずれか、またはそれらのいくつかが同時にアクティブとなってもスムーズに収束している。また設計変数が増加しても収束性に変化はなく、非常に少ない構造解析の回数で最適解を求めることができる。

5.2 多変位制約問題・応力制約問題における適用例

ここでは、単一変位制約問題だけではなく多変位制約問題・応力制約問題といった他の制約下における問題へ本手法の適用性を検討する。計算例として従来から非常に良く用いられる図-6に示す10部材トラスを例に取り、本研究で提案した一般的な最適性規準法の収束性を検討する。計算例に用いる初期値その他はKhot⁸⁾と同じ値とし、部材の許容応力度 $\sigma_a = 25000 \text{ lbf/in}^2$ 、材料の単位体積重量 $\rho = 0.11 \text{ lb/in}^3$ 、最小断面積 $A_{\min} = 1.0 \text{ in}^2$ 、許容変位 $\delta_a = 2.0 \text{ in}$ 、断面積の初期値として $A = 1.0 \text{ in}^2$ を用いる。この計算結果を表-3に示す。

Case 1は許容変位 $\delta_a = 2.0 \text{ in}$ で多変位制約問題として取り扱われている問題への適用例である。本手法では変位制約点を節点2の鉛直方向とした。要素5は応力制約により、要素2, 8, 10は最小断面積により、残りの要素は変位制約により決定されている。表-3から明らかなように、本手法では局所的最適解に収束していることがわかる。これは、多変位制約問題では節点1, 2の鉛直方向の変位が許容変位に収束するが、本手法は、単一制約問題として取り扱っているため、節点2の変位しか許容変位に収束しない。そのため両者の剛性分布の違いが収束値の差に表れたものと考えられる。本設計手法は最適性規準の一般性と簡略性を考え単一変位制約として定式

表-2 14部材トラスの計算結果

Case			1		2	
計算手法			Khot	本手法	Khot	本手法
変位制約点			5 (鉛直方向)		9 (鉛直方向)	
許容変位 δa (in)			0.75		2.25	
許容応力 σa (lbf/in ²)			50000			
初期断面積 A (in ²)			10.0			
最適	断面積 A_{opt} (in ²)	1	8.693	8.681	12.000	11.986
		2	7.097	7.110	5.656	5.667
		3	14.195	14.068	16.000	15.964
		4	5.018	5.055	4.000	4.012
		5	4.000	4.002	8.000	8.003
		6	7.097	7.112	5.656	5.667
		7	8.693	8.681	12.000	11.986
		8	2.000	2.001	4.000	4.012
		9	2.000	2.001	4.000	4.012
		10	2.828	2.829	5.656	5.667
		11	4.000	4.002	8.000	8.003
		12	2.000	2.001	4.000	4.012
		13	2.828	2.829	5.656	5.667
		14	2.000	2.001	4.000	4.012
最適解	応力 σ (lbf/in ²)	1	34511	34523	25000	24893
		2	19925	20058	25002	25040
		3	-28178	-27759	-25000	-24837
		4	-19926	-20277	-25000	-25108
		5	50000	49975	25000	24972
		6	19925	20058	25002	25040
		7	-28178	-34523	-25000	-24893
		8	-50000	-49975	-25000	-25108
		9	50000	49975	25000	25108
		10	50001	49975	25000	25040
		11	-50000	-49975	-25000	-24972
		12	-50000	-49975	-25000	-25109
		13	50000	49975	25000	25040
		14	-50000	-49975	-25000	-25108
最適解	鉛直方向 変位 δ (in)	1	0.000	0.000	0.000	0.000
		2	0.000	0.000	0.000	0.000
		3	-0.226	-0.226	-0.250	-0.249
		4	-0.293	-0.293	-0.333	-0.333
		5	-0.750	-0.750	-0.750	-0.749
		6	-0.916	-0.916	-0.833	-0.832
		7	-1.907	-1.905	-1.417	-1.414
		8	-2.074	-2.072	-1.500	-1.498
		9	-3.398	-3.394	-2.250	-2.248
重量 W (lb)		2162.12	2162.10	2894.40	2896.78	

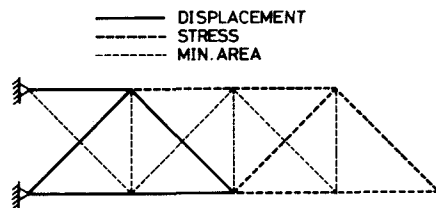


図-5 17部材トラスにおけるアクティブな制約 (Case 1)

化されており、多変位制約が同時にアクティブになることは考慮していないため、それが違いになったものと考えられる。しかしこの収束値の差は重量でわずか2.8%と小さく、単一変位制約という簡易化を行っても、十分良い値が得られることがわかる。また収束に要した構造解析の回数は15回である。

Case 2は応力制約下で取り扱われている問題への適用例である。この場合、要素9の許容応力度のみ50000lb/in²とし、他は25000lb/in²とする。本研究の一般的な最適性規準法では、応力制約に関しては全応力設計法を用いているため、単に応力制約問題として取り扱った場合、表-3のCase 3に示す全応力設計法による最適解に収束し、Case 2の大域的最適解に収束しない。従って、大域的最適解への収束を図るため、節点2に変位制約を設け、単一変位制約問題とすることにより、最適化を行った。その際、必要となる許容変位は全応力設計解における変位の値である8.1inを用いた。この場合Case 2に示すように、10回の繰り返しで大域的最適解とわずか0.5%差の解を得た。

このように、本手法は単一変位制約下で導かれたものであるが、多変位制約問題や応力制約問題に対しても適用可能で、しかも収束性は良好でそのアルゴリズムは簡単でありプログラミングも容易なため、構造最適化問題に対しては有効な手法ではないかと考えられる。

5.3 ラーメン構造物への適用例

静的外力下におけるラーメン構造物の計算例として、図-7に示す1スパン2層ラーメンを用いる。ラーメン構造物に関しては断面積Aと断面2次モーメントおよび断面係数Zとの関係として次式を用いる¹⁾。

$$A = 0.8 \cdot I^{1/2} \quad (36)$$

$$Z = 0.78 \cdot I^{3/4} \quad (37)$$

頂点の許容変位 $\delta_a = 3\text{cm}$ 、許容応

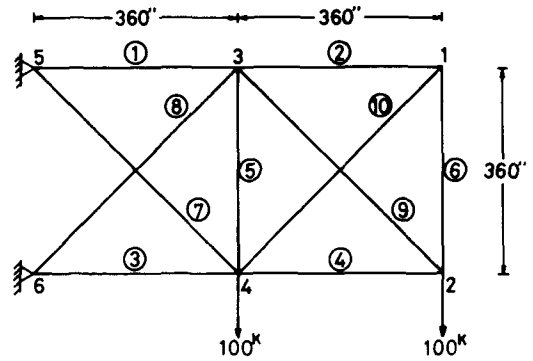


図-6 計算例に用いた10部材トラス

表-3 10部材トラスの計算結果

Case			1		2		3
計算手法			Khot	本手法	Khot	本手法	全応力設計
変位制約点			2 (鉛直方向)		—	2(鉛直方向) —	
許容変位 δa (in)			2.0		—	8.1	—
許容応力 σa(lbf/in ²)			25000		25000 (i=1,..,8,10) 50000 (i=9)		
初期断面積 A (in ²)			10.0				
最	断面積 Aopt(in ²)	1	30.521	32.844	7.900	7.903	4.11
		2	0.100	0.100	0.100	0.100	3.89
		3	23.199	21.697	8.100	8.158	11.89
		4	15.223	15.756	3.900	3.896	0.11
		5	0.100	1.033	0.100	0.100	0.10
		6	0.551	0.100	0.100	0.102	3.89
		7	7.457	5.544	5.798	5.863	11.16
		8	24.036	24.973	5.515	5.508	0.15
		9	21.528	22.416	3.677	3.703	0.10
		10	0.100	0.100	0.141	0.145	5.51
適	応力 σ (lbf/in ²)	1	6639	6838	25000	24972	24978
		2	-1313	-1155	24998	25010	25020
		3	-8507	19066	-25000	-24836	-25008
		4	-6578	6329	-25000	-25007	-24294
		5	25000	24571	-686	-629	-120
		6	-238	-116	24998	25010	25020
		7	18465	1906	25000	24753	25007
		8	-6899	-7370	-25000	-25000	-25082
		9	6578	6330	37500	37209	37793
		10	1858	1635	-25002	-25018	-24980
解	鉛直方向 変位 δ (in)	1	-2.000	-2.050	-7.200	-7.171	-7.199
		2	-1.991	-2.009	-8.099	-8.071	-8.100
		3	-0.736	-0.782	-2.700	-2.699	-2.705
		4	-1.636	-1.671	-2.699	-2.676	-2.700
		5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
		6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
重量 W(lb)			5060.85	5203.47	1497.6	1504.37	1725.2

力度 $\sigma_a = 1400 \text{ kgf/cm}^2$ として最適化を行った結果を表-4に示す。8回の繰返しで変位制約のみがアクティブな最適解が得られている。

動的外力下の適用例として図-8に示す2スパン3層ラーメンを用い、制約条件として頂点の許容変位 $\delta_a = 3 \text{ cm}$ 、許容応力度 $\sigma_a = 2380 \text{ kgf/cm}^2$ 、最小断面積 $A_{\min} = 10 \text{ cm}^2$ とする。また地震外力として大きさ200gal、その応答スペクトル曲線は図-9に示す本州四国連絡橋の動的解析に用いている減衰2%のスペクトルを用い、動的変位や動的応力の計算は自乗和平方根法を用いた。この構造物は筆者らが動的最適性規準を用い、別の設計手法ですでに最適化を行っている³⁾。本手法では、13回の繰返しで最上層の梁要素が応力制約で、他は変位制約で断面が決まった。

このように本手法は動的・静的外力下、トラス・ラーメン構造物を問わず適用することができ、かつ収束性が良いので、構造最適化問題に対して広い分野で利用可能である。

6、結 論

本研究ではトラス・ラーメン構造物、静的・動的問題にかかわらず適用できる単一変位制約下における一般的な最適性規準法を提案し、その手法の収束性、汎用的、有効性などについて考察を加えたものである。本研究の結果は次のようにまとめられる。

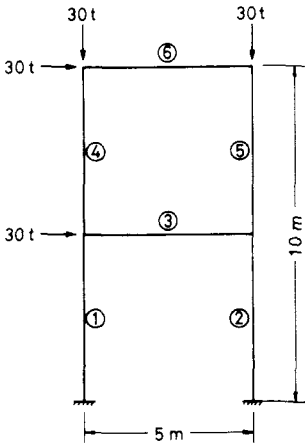


図-7 計算例に用いた1スパン2層ラーメン

表-4 静的外力下における
ラーメン構造物の計算結果

許容変位 $\delta_a(\text{cm})$	3.0	
許容応力度 $\sigma_a(\text{kgf/cm}^2)$	1400	
収束回数 (回)	8	
初期断面積 $A(\text{cm}^2)$	100	
最適断面積 $A_{\text{opt}}(\text{cm}^2)$	1	431
	2	307
	3	420
	4	224
	5	226
	6	211
応 力 $\sigma_i(\text{kgf/cm}^2)$	1	13715
	2	11946
	3	11477
	4	11936
	5	12257
	6	11409
注目点変位 $\delta(\text{cm})$	3.0	

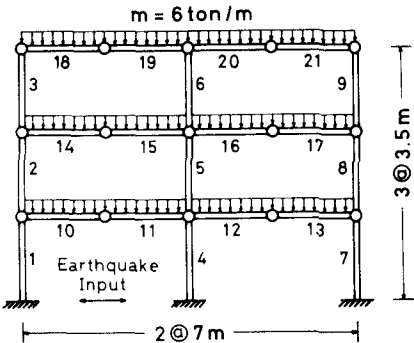


図-8 計算例に用いた2スパン3層ラーメン

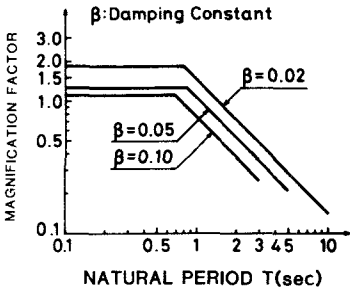


図-9 応答スペクトル曲線

- (1) 本研究で提案した単一変位制約下における一般的な最適性規準法は、単一変位制約下におけるトラス・ラーメン構造物に対して、静的・動的外力問題を問わず適用できる一般的な最適設計手法である。
- (2) 本研究で提案した設計手法の収束性は非常に良く、10回程度の繰り返し計算により最適解を得ることができる。しかもその収束性は設計変数の数とほとんど関係なく、設計変数の多い構造物に対して特に有効となる。
- (3) 本設計法は単一変位制約下はもとより多変位制約問題・応力制約問題に対しても最適解に近い解を少数回の繰り返しで得ることができる。
- (4) 本設計法は、そのアルゴリズムが簡単のため、プログラミングが容易である。

以上のように、本研究で確立した単一変位制約下における一般的な最適性規準法は構造最適化にあたり、非常に有効で、実用性のある設計法であることがわかる。また本手法の収束性とプログラミングの容易さの利点を生かし、数理計画法による最適化の初期値を求めるサブルーチンとして組み込むことも可能である。

本研究を行うにあたり、京都大学山田善一教授および山口大学會田忠義教授から、貴重な助言をいただいた。また山口大学中尾絵理子技官には作図や論文作成にあたり多くの手助けを得た。ここに記して深い感謝の意を表す。本研究の計算は山口大学情報処理センターのACOS 850を用いて行ったことを付記し謝意を表す。

参考文献

- 1) 山田善一・古川浩平・横田健一：動的荷重下における変位を制約とする最適性規準法に関する研究、土木学会論文報告集、第324号、pp. 51-60、1982年8月
- 2) Gellatly, R. A. and L. Berke : 最適性を規準とする設計計算法、最適構造設計、R. H. ギャラガー、O. C. ツィエンキービッツ 編、培風館、pp. 31-45、昭和52年6月
- 3) 古川浩平・山田善一・吉村洋司：動的最適性規準を用いた簡易最適耐震設計法に関する研究、土木学会論文報告集、第334号、pp. 63-70、1983年6月
- 4) 古川浩平・山田善一・横田健一：包絡法による簡易最適耐震設計法、日本鋼構造協会第17回大会研究集会マトリックス解析法研究発表論文集、pp. 305-310、1983年7月
- 5) 古川浩平・竹宮宏和・山田善一：変位制御ダンパーを有する多径間連続高架橋の最適耐震設計、土木学会論文報告集、第341号、pp. 51-57、1984年1月
- 6) 大久保禎二・松原光宏：可変計量法の構造最適化への適用、第29回構造工学シンポジウム論文集、pp. 125-132、1983年2月
- 7) Khot, N. S. and L. Berke : Structural Optimization Using Optimality Criteria Method, New Directions in Optimum Structural Design, E. Atrek, R. H. Gallagher, K. M. Ragsdell, O. C. Zienkiewicz, eds., John Wiley & Sons, pp. 47-74, 1984
- 8) Khot, N. S. : Optimality Criterion Methods in Structural Optimization, Foundations of Structural Optimization : A Unified Approach, A. J. Morris, ed., John Wiley & Sons, pp. 99-104, 1982

(1985年10月18日受付)