

## 曲げ荷重を受けるラーメンの座屈解析

## BUCKLING ANALYSIS OF FRAMES UNDER BENDING LOADS

林 正 \*

By Masa HAYASHI

Elastic buckling of rigid frames subjected to bending loads is investigated by an analytical method. Vertical loads placed on the cross beam of a frame produce primary bending moments in the members and primary bending deformation before buckling. In this paper, the effect of the bending moments and the deformation on the buckling strength of the frame with inclined columns or cross beams are examined. The equations of buckling condition are formulated by the theoretical method using a linearized procedure related to the incremental axial forces as well as bending moments or rotation angles of members at the instant of buckling. Numerical calculations are performed, and it is found that the buckling strength of the frames with inclined columns is considerably reduced by the presence of the primary bending moments.

## 1. ま え が き

ラーメンの弾性座屈荷重については多くの公式が求められているが<sup>1)</sup>, 大部分の式は座屈前に曲げ変形が生じない荷重状態に対する式である。座屈前に生じる初期曲げモーメントによる影響を考慮したラーメンの座屈解析は、2 ヒンジ門形ラーメンについての Chwalla の研究<sup>2)</sup>が著名であり、これに対する Bleich の考察<sup>3)</sup>や Lu の研究<sup>4)</sup>, 山形ラーメンについての藤本の研究<sup>5)</sup>などがある。しかし、道路橋に多く使用されている斜め柱の  $\pi$  形ラーメンについての研究は見受けられないし、さらに、線形固有値問題として定式化された初期曲げ変形を考慮した一般的な座屈解析法は報告されていない。

ラーメンなどの骨組構造物の座屈荷重は、マトリックス構造解析法によって容易に求めることができるが、幾何剛性行列を用いて求めた座屈荷重は近似解で、正確な値を得るためにはある程度の部材分割を必要とする。さらに、座屈前に生じる曲げ変形の影響は幾何剛性行列に考慮されていない。また、座屈荷重（または座屈条件式）を一般的な公式の形で表わすことができないので、座屈特性を調べるためのパラメトリック解析に用いるには不便である。

本研究では、曲げ荷重を受けて座屈前に変形が生じるラーメンについて、この初期曲げ変形による影響を考慮した一般的な座屈解析法を提案し、骨組形状が簡単なラーメンの座屈条件式を具体的に陽な形で求められることを示す。解析では、四連モーメント法（またはたわみ角法）による通常の線形座屈解析に用いられる式を使用するが、座屈前に生じる断面力や変形量と分岐座屈後のそれらの増分量を区別し、増分理論によ

\* ) 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系 (〒949-54 長岡市上富岡町1603-1)

る定式化によって初期曲げモーメントや初期変位の影響を考慮することができる。本解析法と通常の座屈解析法との相違点は、座屈時における初期軸力の増分を考えたことであり、各部材に軸方向力のみが作用して初期曲げ変形が起きない場合には両解析法の式は一致する。座屈条件式の誘導では、通常の計算式に軸力による微分演算を追加するだけであるので、本解析法は汎用性のある一般的な解法であるといえる。

本解析法の妥当性を示すために、Chwallaが連立微分方程式を解いて求めた2ヒンジ門形ラーメンの座屈条件式を誘導する。また、汎用性を示すために固定門形ラーメン、柱脚ヒンジの山形ラーメンと台形及びπ形ラーメンについて座屈条件式を求める。これらの式は超越方程式になるが、荷重倍数を未知変数とする1変数の問題であるので、小型計算機によって容易に解を求めることができる。

最後に、上記のラーメンについて、骨組形状と剛性に関するパラメータの値と荷重条件を変化させて数値計算を行い、座屈荷重に及ぼす初期曲げ変形の影響を調べる。

2. 初期変形を考慮した座屈解析

(1) 解析上の仮定

図-1 (a) に示すように、対称なラーメンのはり上に荷重が対称に作用して初期曲げ変形が生じている場合には、図-1 (b) のような水平移動座屈が起きることがある。本研究では、このような分岐座屈問題を扱うことにし、初期曲げ変形が進行して屈服する非弾性不安定現象は考えない。なお、ラーメンの形状によっては座屈前に節点が変位する場合もあるので、部材に生じる初期曲げモーメントとともに、座屈前に生じる骨組形状の変化も考慮する。

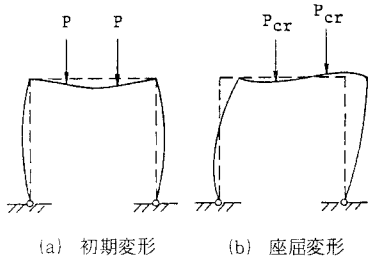


図-1 変形様式

座屈解析において次の仮定を用いる。

- ① 座屈前のラーメンの弾性挙動は線形である。
- ② 分岐点における力のつり合いは座屈直後の形状で考えて、このときの増分変位（座屈変位）は微小で線形化できるものとする。

上記の仮定は通常の線形座屈解析に用いられる仮定であるが、本研究では通常の座屈解析で無視されている座屈前の変形による影響を考慮するために、①の仮定は厳密には成立しない<sup>\*</sup>。しかし、実際のラーメン構造物では座屈前の幾何学的非線形性は比較的小さいことと、特に線形固有値問題として定式化するために①の仮定が成り立つものとした。なお、全体形状に関する初期不整は入力データで与えることができるので解式の定式化では考慮する必要はないが、各部材は初期曲りのない直線材とする。

(2) 座屈条件式

はり一柱の微分方程式の解析解を用いて定式化される座屈たわみ角法や四連モーメント法などによる剛性方程式または弾性方程式を、一般的に次式のように表わす。

[ A ( N ) ] X = P ( N ) (1)

ここに、行列Aは剛性行列または撓性行列で、部材の軸方向力Nの関数である。Xは未知の変数ベクトルで、その成分はたわみ角法では節点回転角と部材回転角、四連モーメント法では材端モーメントと部材回転角である。右辺のPは荷重ベクトルで、部材上に荷重が作用する場合にはNの値に依存する。

軸力Nは独立変数Xに従属するので、式(1)はXに関する非線形方程式であり、仮定①、②を用いずに厳密に解けば、軸力による幾何学的非線形性を考慮したラーメンの弾性挙動を追跡することができる。

式(1)を初期変形を考慮した分岐座屈解析に用いるために、XとNを分岐点における値と考え、分岐座

\* 座屈前の非線形性を考慮すると有限変位理論による特異点問題としての非線形固有値解析<sup>6)</sup>が必要になり、線形固有値問題としての座屈解析の簡便さが失われる。

屈後のこれらの増分量を  $\Delta X$ ,  $\Delta N$  とする。仮定②により、式(1)を分岐点において線形化すると次式が得られる。

$$[\mathbf{A}(\mathbf{N})] \Delta X + [\Delta \mathbf{A}(\mathbf{N})] \mathbf{X} = [\partial \mathbf{P}^T / \partial \mathbf{N}] \Delta \mathbf{N} \quad (2)$$

ここに、 $^T$  は転置を表わす。行列  $\Delta \mathbf{A}$  の要素  $\Delta a_{ij}$  は  $\mathbf{A}$  の要素  $a_{ij}$  を軸力の増分  $\Delta N$  で線形化したもので、次式で与えられる。

$$\Delta a_{ij} = \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial N} \right\}^T \Delta N \quad (3)$$

ここで、座屈後の形状についての力のつり合い条件から、 $\Delta N$  と  $\Delta X$  の関係式を求めれば、式(2)の左辺第2項と右辺の荷重項を次式のように変形することができる。

$$[\Delta \mathbf{A}(\mathbf{N})] \mathbf{X} = [\mathbf{J}(\mathbf{N}, \mathbf{X})] \Delta \mathbf{X}, \quad [\partial \mathbf{P}^T / \partial \mathbf{N}] \Delta \mathbf{N} = [\mathbf{Q}(\mathbf{N})] \Delta \mathbf{X} \quad (4.a, b)$$

式(4)を式(2)に代入すると、次の  $\Delta X$  に関する同次方程式が得られる。

$$[\mathbf{A}(\mathbf{N}) + \mathbf{J}(\mathbf{N}, \mathbf{X}) - \mathbf{Q}(\mathbf{N})] \Delta \mathbf{X} = 0 \quad (5)$$

仮定①により、1個の未知パラメータ(荷重倍率)を用いれば  $\mathbf{N}$  と  $\mathbf{X}$  は線形解析により既知となるので、式(5)の固有値方程式を解いて座屈荷重を求めることができる。

さて、座屈条件式は式(5)の係数行列の行列式を零とおいて求められるが、座屈前の初期変形が対称な場合には、この行列式を2つの式の積に因数分解することができる。これらの式は、式(5)を対称な増分量と逆対称の増分量に関する2組の同次方程式に分けた場合のそれぞれの係数行列の行列式に等しい。

対称モードに対する式は、図-1(a)の対称な初期曲げ変形様式を表わす式で分岐座屈に対する式ではない<sup>\*</sup>。これに対して、逆対称モードの式が図-1(b)の水平移動を伴う座屈変形様式を表わす。なお、対称な荷重項  $\mathbf{Q}$  は対称モードの式に含まれて、逆対称モードの式には含まれない。

初期曲げ変形を無視した通常の線形座屈解析では、初期曲げ変形の項  $\mathbf{X}$  と部材上に作用する中間荷重を省略するので、式(2)または式(5)は

$$[\mathbf{A}(\mathbf{N})] \Delta \mathbf{X} = 0 \quad (6)$$

となる。したがって、この場合の座屈条件式は次式で与えられる。

$$|\mathbf{A}(\mathbf{N})| = 0 \quad (7)$$

初期曲げ変形を受けるラーメンの分岐座屈の一般的な解法として、たわみ角法による解法が文献5)、7)に示されている。この解法では、仮定①を用いずに式(1)と(7)を連立させて求められる荷重を座屈荷重とする、いわゆる非線形固有値解析の手法を用いている。

変分原理によれば、分岐点などの特異点問題の解は全ポテンシャル  $\pi$  の第1変分と第2変分を零とした非線形連立方程式から求められる。仮定④が成立すれば  $\delta \pi = 0$  と  $\delta^2 \pi = 0$  の条件式は独立になり、④が成立しなければ2つの式を連立させて解く必要があるが、いずれにせよ仮定①とは無関係に、座屈時には  $\delta^2 \pi = 0$  が満足されなければならない。しかるに、初期変形を考慮する場合には、第2変分から導かれる式は式(5)であり、この式が式(6)と異なる理由は、式(2)の誘導から明らかなように、部材の軸力  $\mathbf{N}$  を変分を受ける独立変数  $\mathbf{X}$  の関数としなかったことによる。一方、本解析法では、 $\mathbf{N}$  を  $\mathbf{X}$  の従属変数としたことにより、変屈条件式に初期曲げ変形の項  $\mathbf{X}$  を考慮することができた。

### (3) 四連モーメント法による定式化

初期曲げ変形を考慮した座屈条件式を解析的に求めるために、四連モーメント法を用いる。

図-2(a)のように、2本の部材AB、BCが節点Bで剛結されている場合の座屈四連モーメント式は次式で与えられる<sup>8)</sup>。

\* 対称モードが初期曲げ変形様式と異なる場合には分岐座屈を表わすが、通常の平面ラーメンでは、対称モードの式はもとの方程式1)で対称変形を仮定した場合の非線形方程式を線形化したこと以外に意味をもたない。

$$\frac{l_{AB}}{I_{AB}} (F_{AB} M_{AB} - D_{AB} M_{BA}) + \frac{l_{BC}}{I_{BC}} (D_{BC} M_{BC} - F_{BC} M_{CB})$$

$$= E (R_{AB} - R_{BC}) - \left( \frac{l_{AB}}{I_{AB}} H_{BA} - \frac{l_{BC}}{I_{BC}} H_{BC} \right) \quad (8)$$

ここに、

$$D = (1 - z \cot z) / z^2, \quad F = (z \operatorname{cosec} z - 1) / z^2 \quad (9)$$

$$z^2 = N l^2 / EI$$

$l$  : 部材長,  $E I$  : 部材の曲げ剛性,  $N$  : 軸方向圧縮力,  $M$  : 材端モーメント,  $R$  : 部材回転角,  $H$  : 中間荷重項である。 $N$ は圧縮を

正とし,  $N = 0$  のときには  $D = 1/3$ ,  $F = 1/6$  になる。また, 回転量は時計回りを正とする。

式(8)と層方程式に角方程式, 節点方程式を用いると, 式(1)を次式のように表わすことができる。

$$[F_1(N)] M + [F_2(N)] R = H(N) \quad (11)$$

ここに, 列ベクトル  $N$ ,  $M$ ,  $R$  は部材軸力, 材端モーメント, 部材回転角であり,  $F_1$  と  $F_2$  は  $M$  と  $R$  の係数行列,  $H$  は荷重ベクトルである。 $M$  と  $R$  の次数は一般に異なるので,  $F_1$  と  $F_2$  の列数は一致しない。

式(11)を増分量について線形化して整理すると, 式(2)に対する式として次式が得られる。

$$[F_1(N)] \Delta M + [F_2(N)] \Delta R + [G_1(N, M) + G_2(N, R)] \Delta N = [\partial H^T / \partial N] \Delta N \quad (12)$$

ここに,  $G_1$ ,  $G_2$  はそれぞれ  $F_1$ ,  $F_2$  を  $\Delta N$  について線形化した行列である。

増分量に逆対称条件を用いて式(2)を整理する。このとき, 初期曲げ変形の対称性を考慮して適宜に組合せた2本の式の差を求めると右辺の荷重項は消去されて, 逆対称モードに対する式が求められる。

次に, 座屈後の形状についての力のつり合い条件から増分量間の関係式を求め, この式を用いて  $\Delta N$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta R$  から適宜に選んだ増分量を消去して方程式の数と未知増分量の数を一致させると増分量に関する同次方程式が得られ, この係数行列から座屈条件式が求められる。

次節での計算のために, 式(9)の導関数を求めておく。

$$\frac{dD}{dN} = -\frac{1}{2z^2 N} \left( 2 - z \cot z - \frac{z^2}{\sin^2 z} \right), \quad \frac{dF}{dN} = \frac{1}{2z^2 N} \left( 2 - z \operatorname{cosec} z - \frac{z^2 \cos z}{\sin^2 z} \right) \quad (13)$$

### 3. 座屈条件式

#### (1) 2 ヒンジ門形ラーメン

図-3(a)に示すように, 対称な2ヒンジ門形ラーメンのはり上に対称荷重  $p(x)$  が作用して, 対称な初期曲げ変形が生じている場合を考える。この場合には, 図-3(b)のような柱に部材回転角  $\Delta R$  が生じる水平移動座屈が起きる。

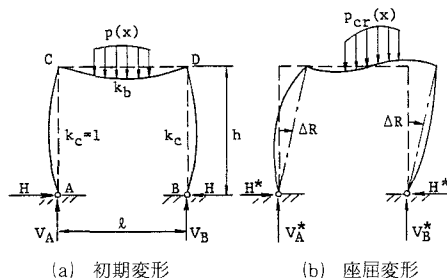


図-3 門形ラーメン

式(8)において, 材端モーメントを節点モーメント  $M_C$ ,  $M_D$  で表わして

$$-M_{CA} = M_{CD} = M_C, \quad -M_{DC} = M_{DB} = M_D \quad (14)$$

と置き換える。また, 式の誘導を分かり易くするために, 座屈変形後の諸量に\*印を付けて表わす。例えば,

$$M_C^* = M_C + \Delta M_C, \quad R_A^* = R_A + \Delta R_A, \quad H^* = H + \Delta H, \quad \text{etc.} \quad (15)$$

はりに作用する軸圧縮力  $N_b (=H)$  を考慮して, 座屈変形後の節点  $C$ ,  $D$  について三連モーメント式をたてると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (k_b D_A^* + D_b^*) M_C^* + F_b^* M_D^* - (EI_b / l) R_A^* &= H_{CD}^* \\ F_b^* M_C^* + (D_b^* + k_b D_b^*) M_D^* + (EI_b / l) R_B^* &= -H_{DC}^* \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、はりと柱の剛比  $k_b$ ,  $k_c$  を

$$k_b = (I_b / l) / (I_c / h), \quad k_c = 1 \quad (17)$$

とおいた。 $D^*$ ,  $F^*$  は座屈時における軸力の変化を考慮した場合の式 (9) の関数で、添字  $A$ ,  $B$  は左右の柱,  $b$  ははりを表わす。また、右辺の荷重項  $H_{CD}^*$ ,  $H_{DC}^*$  は次式ようになる。

満載等分布荷重:  $p(x) = q$

$$H_{CD} = -H_{DC} = \frac{q l^2}{z_b^3} \left( \frac{z_b}{2} - \tan \frac{z_b}{2} \right) \quad (18a)$$

2 点集中荷重:  $P$  (図-4)

$$H_{CD} = -H_{DC} = \frac{P l}{z_b^2} \left\{ 1 - \frac{\cos(1/2 - \alpha) z_b}{\cos(z_b/2)} \right\} \quad (18b)$$

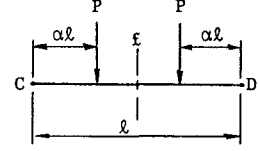


図-4 対称集中荷重

また、層方程式は次のようになる。

$$-M_C^* + M_D^* + h(N_A^* R_A^* + N_B^* R_B^*) = 0 \quad (19)$$

式 (16), (19) を増分量について線形化し、初期曲げ変形状態において

$$M_C = M_D, \quad N_A = N_B = P, \quad N_b = H, \quad R_A = R_B = 0, \quad 2P = \int_0^l p(x) dx \quad (20)$$

を考慮すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ k_b \frac{dD_A}{dN_A} \Delta N_A + \left( \frac{dD_b}{dH} + \frac{dF_b}{dH} \right) \Delta H \right\} M_C + (k_b D_A + D_b) \Delta M_C + F_b \Delta M_D - \frac{E I_b}{l} \Delta R = \frac{dH_{CD}}{dH} \Delta H \\ & \left\{ k_b \frac{dD_B}{dN_B} \Delta N_B + \left( \frac{dD_b}{dH} + \frac{dF_b}{dH} \right) \Delta H \right\} M_C + F_b \Delta M_C + (D_b + k_b D_B) \Delta M_D + \frac{E I_b}{l} \Delta R = \frac{dH_{CD}}{dH} \Delta H \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$-\Delta M_C + \Delta M_D + 2hP \Delta R = 0 \quad (22)$$

$D_A = D_B$  を考慮して、式 (21) の 2 式の和と差を求めると、前者が対称な増分量に対する式を表わし、後者が逆対称な増分に対する式を表わすことがわかる。そこで、水平移動座屈を表わす逆対称モードの次式

$$k_b \frac{dD_A}{dN_A} M_C (\Delta N_A - \Delta N_B) + (k_b D_A + D_b - F_b) (\Delta M_C - \Delta M_D) - 2 \frac{E I_b}{l} \Delta R = 0 \quad (23)$$

に、式 (22) と座屈前後における力のつり合い式

$$M_C = -hH, \quad \Delta N_A = -\Delta N_B = -2P(h/l) \Delta R \quad (24a, b)$$

を代入して次式を得る。

$$\left\{ 2k_b \frac{PHh^2}{l} \frac{dD_A}{dN_A} + Ph(k_b D_A + D_b - F_b) - \frac{E I_b}{l} \right\} \Delta R = 0$$

分岐座屈が起きるための条件  $\Delta R \neq 0$  より、座屈条件が求められる。式 (9), (10), (13), (17) を用いると次のようになる。

$$z_c \cot z_c + \frac{2Ph}{Hl} \left( \frac{z_b}{2} \cot \frac{z_b}{2} - 1 \right) + \frac{Hh}{Pl} \left( 2 - z_c \cot z_c - z_c^2 \operatorname{cosec}^2 z_c \right) = 0 \quad (25)$$

ここに、

$$z_b^2 = Hl^2 / EI_b, \quad z_c^2 = Ph^2 / EI_c \quad (26)$$

式 (25) は、Chwalla<sup>2)</sup> が連立微分方程式を解いて求めた式と同じである。また、Lu<sup>4)</sup> がたわみ角法を用いて同一の式を誘導している。

なお、分岐座屈が発生せずに対称な初期曲げ変形が持続する場合には、式 (20), (24a) が成り立つので、これらを式 (16) に代入すると対称変形に対する次の非線形方程式が得られる。

$$\frac{Hl}{Ph} (1 - z_c \cot z_c) + z_b \tan \frac{z_b}{2} + \frac{z_b^2}{Hh} H_{CD} = 0 \quad (27)$$

$H_{CD}$  に式 (18a) または (18b) を代入した式を、それぞれ Lu と Chwalla が求めている。

## (2) 固定門形ラーメン

固定門形ラーメンについて座屈条件式を求める。図-3を参照して、三連モーメント式と層方程式を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D_A^* M_A^* + F_A^* M_C^* + (E I_C / h) R_A^* &= 0 \\ k_b F_A^* M_A^* + (k_b D_A^* + D_b^*) M_C^* + F_b^* M_D^* - (E I_b / l) R_A^* &= H_{CD}^* \\ F_b^* M_C^* + (D_b^* + k_b D_b^*) M_D^* + k_b F_b^* M_B^* + (E I_b / l) R_B^* &= -H_{DC}^* \\ F_B^* M_D^* + D_B^* M_B^* - (E I_C / h) R_B^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28 a \sim d)$$

$$M_A^* - M_C^* + M_D^* - M_B^* + h (N_A^* R_A^* + N_B^* R_B^*) = 0 \quad (29)$$

ここに、固定端モーメント  $M_A^*$ ,  $M_B^*$  はそれぞれ時計回りと反時計回りを正とする。

式(28b)と(28c)及び式(28a)と(28d)の差を求め、これらの式を増分量について線形化した式に、式(29)とはりの力のつり合い式

$$M_C^* - M_D^* = P l - N_A^* l, \quad N_A^* + N_B^* = 2 P \quad (30 a, b)$$

を線形化した式を用いて節点モーメントの増分と  $\Delta N_B$  を消去すると次式が得られる。

$$\left[ \begin{array}{cc} 2 k_b \left( \frac{d D_A}{d N_A} M_C + \frac{d F_A}{d N_A} M_A \right) - l \{ k_b (D_A + F_A) + (D_b - F_b) \} & -2 \left( P h k_b F_A + \frac{E I_b}{l} \right) \\ 2 \left( \frac{d D_A}{d N_A} M_A + \frac{d F_A}{d N_A} M_C \right) - l (D_A + F_A) & -2 \left( P h D_A - \frac{E I_C}{h} \right) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \Delta N_A \\ \Delta R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (31)$$

ここで、式(20)と  $M_A = M_B$  の関係を用いた。また、

$$M_C = M_A - H h \quad (32)$$

と式(9), (13), (17), (26)を式(31)に用いると、次の座屈条件式が求められる。

$$z_c \tan z_c + \frac{2 P h}{H l} \left( 1 - \frac{z_b}{2} \cot \frac{z_b}{2} \right) - \frac{H h}{P l} (2 + z_c \tan z_c - 2 \sec z_c) + \frac{M_A}{P l} z_c (\tan z_c - z_c \sec z_c) = 0 \quad (33)$$

## (3) 山形ラーメン

図-5のような集中荷重  $P$  を受ける2ヒンジ山形ラーメンの水平移動座屈を扱う。図中の○印の数字は部材番号を表す。座屈直後の状態について三連モーメント式をたてると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (k_2 D_1^* + D_2^*) M_C^* + F_2^* M_D^* - (E I_2 / l_2) (R_1^* - R_2^*) &= 0 \\ F_2^* M_C^* + (D_2^* + D_3^*) M_D^* - F_3^* M_E^* &= 0 \\ - (E I_2 / l_2) (R_2^* - R_3^*) &= 0 \\ F_3^* M_D^* + (D_3^* + k_2 D_4^*) M_E^* - (E I_2 / l_2) (R_3^* - R_4^*) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

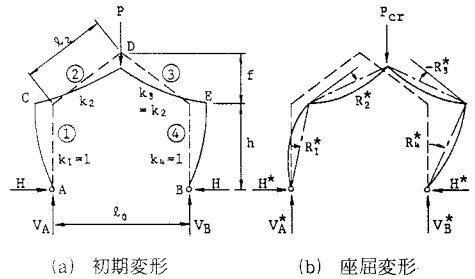


図-5 山形ラーメン

次に、 $R_1$ ,  $R_4$ を独立部材回転角に選んで、仮想変位  $\delta R_1$ ,  $\delta R_4$  による系全体の力のつり合い条件を求める

$$\left. \begin{aligned} - (1 + \eta) M_C^* + 2 \eta M_D^* - \eta M_E^* + h N_1^* R_1^* - \eta l_2 N_2^* R_2^* + \eta l_2 N_3^* R_3^* - W &= 0 \\ \eta M_C^* - 2 \eta M_D^* + (1 + \eta) M_E^* + \eta l_2 N_2^* R_2^* - \eta l_2 N_3^* R_3^* + h N_4^* R_4^* + W &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに、

$$k_2 = k_3 = I_2 h / I l_2, \quad \eta = h / 2 f, \quad W = P (l_0 h / 4 f) \quad (36)$$

また、角方程式は次のようになる。

$$R_2^* = -R_3^* = \eta (R_4^* - R_1^*) \quad (37)$$

式(37)を式(34), (35)に代入して $R_2^*$ ,  $R_3^*$ を消去すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} k_2 D_1^* + D_2^* & F_2^* & 0 & -k_2 (1+\eta) & k_2 \eta \\ F_2^* & D_2^* + D_3^* & F_3^* & 2k_2 \eta & -2k_2 \eta \\ 0 & F_3^* & D_3^* + k_2 D_4^* & -k_2 \eta & k_2 (1+\eta) \\ -(1+\eta) & 2\eta & -\eta & (z_1^*)^2 + K^* & -K^* \\ \eta & -2\eta & 1+\eta & -K^* & (z_4^*)^2 + K^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_C^* \\ M_D^* \\ M_E^* \\ \bar{R}_1^* \\ \bar{R}_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ W \\ -W \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} z_i^2 &= N_i h^2 / EI_1, \quad \bar{R}_i = R_i (EI_1 / h) \quad (i=1, 4) \\ z_i^2 &= N_i l_2^2 / EI_2 \quad (i=2, 3), \quad K^* = k_2 \eta^2 \{ (z_1^*)^2 + (z_3^*)^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式(38)を増分量について線形化し、初期変形の対称性を考慮して逆対称の増分量に対する式を求めると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} k_2 D_1 + D_2 & -k^2 \\ -1 & z_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_C \\ \Delta \bar{R}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

ここに,

$$b_{11} = k_2 M_C \frac{d D_1}{d N_1}, \quad b_{12} = M_C \frac{d D_2}{d N_2} + M_D \frac{d F_2}{d N_2}, \quad b_{21} = h R_1 \quad (41)$$

構造全体とはりCD材について得られる変形後の力のつり合い式

$$V_A^* l_0 - P \left( \frac{l_0}{2} - h R_1^* - f R_2^* \right) = 0, \quad N_2^* = \frac{f}{l_2} N_1^* + \frac{l_0}{2 l_2} H^* \quad (42)$$

に式(37)を代入して線形化すると次式を得る。

$$\Delta N_1 = -\frac{h}{l_0} P \Delta R_1 = -\frac{2}{l_0} z_1^2 \Delta \bar{R}_1, \quad \Delta N_2 = \frac{f}{l_2^2} \Delta N_1 \quad (43)$$

式(43)を式(40)に代入して整理すると

$$\begin{bmatrix} k_2 D_1 + D_2 & -k_2 - \frac{2}{l_0} z_1^2 (b_{11} + \frac{f}{l_2} b_{12}) \\ -1 & z_1^2 (1 - \frac{2}{l_0} b_{21}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta M_C \\ \Delta \bar{R}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

となるから、この係数行列の行列式を零とおいた式に、式(41), (9), (13)を順次代入して次の座屈条件式が求められる。

$$\left( 1 - \frac{2h}{l_0} R_1 \right) \left\{ z_1 \cot z_1 + \frac{N_1 h}{N_2 l_2} (z_2 \cot z_2 - 1) \right\} \left\{ \frac{2h}{l_0} R_1 - \frac{M_C}{N_1 l_0} \left( 2 - z_1 \cot z_1 - \frac{z_1^2}{\sin^2 z_1} \right) \right. \\ \left. - \frac{N_1 f h}{N_2 l_2^2} \left\{ \frac{M_C}{N_2 l_0} \left( 2 - z_2 \cot z_2 - \frac{z_2^2}{\sin^2 z_2} \right) - \frac{M_D}{N_2 l_0} \left( 2 - z_2 \operatorname{cosec} z_2 - \frac{z_2^2 \cos z_2}{\sin^2 z_2} \right) \right\} \right\} = 0 \quad (45)$$

ここに、線形値は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_C &= -H h, \quad M_D = P l_0 / 4 - H (f + h), \quad N_1 = P / 2, \quad N_2 = (P f + H l_0) / 2 l_2 \\ H &= \frac{P l_0}{8} \frac{3h + 2f}{h^2 (3 + k_2) + f (3h + f)}, \quad R_1 = -\frac{z_1^2 f l_0}{24 k_2} \frac{3 + 4k_2}{h_2 (3 + k_2) + f (3h + f)} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

#### (4) $\pi$ 形ラーメン

図-6(a)に示す2ヒンジ $\pi$ 形ラーメンに任意の対称荷重が作用する場合の図-6(b)の水平移動座屈を扱う。柱の部材回転角を独立回転角 $R$ に選べば、図-6(b)の座屈変形に対して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_4^* &= R_5^* \equiv R^*, & R_2^* &= -\frac{2s}{l_2} R^* \\ R_1^* &= R_3^* = \frac{s}{l_1} R^* \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

また、対称载荷の条件より、座屈前ではすべての部材回転角は零であるから、式(47)の関係は増分量  $\Delta R_i$  に対してそのまま成り立つ。

座屈後の状態について四連モーメント法により式をたてて、はり部材②の材端モーメントを節点方程式を用いて消去すると次式を導くことができる。

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & k_1 D_4^* & 0 & k_1 L_1 \\ -D_2^* & F_2^* & -(D_2^* + k_2 D_4^*) & F_2^* & -k_2 L_2 \\ -F_2^* & D_2^* & -F_2^* & (D_2^* + k_2 D_4^*) & k_2 L_2 \\ 0 & 1/3 & 0 & -k_1 D_5^* & -k_1 L_1 \\ L_2 - L_1 & L_2 - L_1 & L_2 & L_2 & K^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^* \\ M_3^* \\ M_4^* \\ M_5^* \\ \bar{R}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H_{DC} \\ H_{DE}^* \\ -H_{ED}^* \\ H_{EF} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

ここに、 $M_i^*$  は部材①の材端モーメントであり、式中の記号は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= 1-s/l_1, & L_2 &= 1+2s/l_2, & k_1 &= I_1 l_c / I_c l_1, & k_2 &= I_2 l_c / I_c l_2 \\ \bar{R}^* &= (EI_c / l_c) R^*, & z_i^* &= N_i l_i^2 / EI_i, & K^* &= (z_4^*)^2 + (z_5^*)^2 + k_2 (2s/l_2)^2 (z_2^*)^2 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$H_{CD} = -H_{EF} = \frac{l_1^2}{6} \int_0^1 p_1 \xi_1 (1 - \xi_1^2) d\xi_1, \quad H_{DE}^* = -H_{ED}^* = \left( \frac{l_2}{z_2^*} \right)^2 \int_0^1 p_2 \left( \xi - \frac{\sin z_2^* \xi}{\sin z_2^*} \right) d\xi_2 \quad (50)$$

式(48)の第1式と第4式を用いて  $M_1^*$  と  $M_5^*$  を消去し、さらに第3式から第2式を引くと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^* M_4^* + a_{12}^* M_5^* + a_{13}^* \bar{R}^* &= 0 \\ a_{21}^* M_4^* + a_{22}^* M_5^* + a_{23}^* \bar{R}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{11}^* &= k_2 D_4^* + (1+3k_1 D_4^*) (D_2^* - F_2^*), & a_{21}^* &= L_2 + 3k_1 D_4^* (L_2 - L_1) \\ a_{12}^* &= k_2 D_5^* + (1+3k_1 D_5^*) (D_2^* - F_2^*), & a_{22}^* &= L_2 + 3k_1 D_5^* (L_2 - L_1) \\ a_{13}^* &= 2k_2 L_2 + 6k_1 L_1 (D_2^* - F_2^*), & a_{23}^* &= K^* + 6k_1 L_1 (L_2 - L_1) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

図-7を参照して、座屈後の柱について次の力のつり合い式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} N_4^* &= V_A^* \sin \theta + H^* \cos \theta, & N_5^* &= V_B^* \sin \theta + H^* \cos \theta \\ M_4^* &= -V_A^* (s + h R_4^*) + H^* (h - s R_4^*) \\ M_5^* &= V_B^* (s - h R_5^*) - H^* (h + s R_5^*) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

また、座屈前においては、対称変形から次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B, & N_4 &= N_5 = V_A \sin \theta + H \cos \theta \\ R_4 &= R_5 = 0, & M_4 &= -M_5 = -V_A s + H h \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

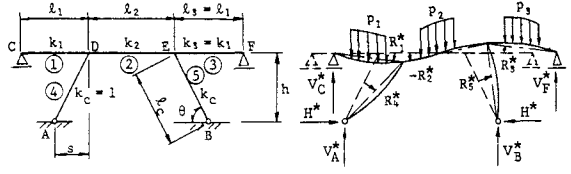
式(54)と  $z_4 = z_5$ ,  $D_4 = D_5$ ,  $\bar{R} = 0$  を考慮して式(51)を  $M_i$ ,  $\bar{R}$ ,  $N_i$  の増分量について線形化すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{11} (\Delta M_4 + \Delta M_5) + a_{13} \Delta \bar{R} + b_1 (\Delta N_4 - \Delta N_5) &= 0 \\ a_{21} (\Delta M_4 + \Delta M_5) + a_{23} \Delta \bar{R} + b_2 (\Delta N_4 - \Delta N_5) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ここに、 $a_{ij}$  は式(52)において座屈前の値を用いたものであり、 $b_i$  は次式で与えられる。

$$b_1 = M_4 \{ k_2 + 3k_1 (D_2 - F_2) \} (dD_4 / dN_4), \quad b_2 = 3k_1 M_4 (L_2 - L_1) (dD_4 / dN_4) \quad (56)$$

一方、式(53)を線形化して得られる次式



(a) 構造形式

(b) 座屈変形

図-6  $\pi$ 形ラーメン

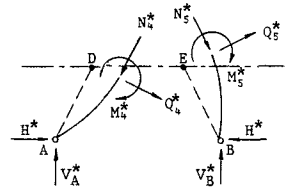


図-7 柱のつり合い

$$\Delta N_4 - \Delta N_5 = (\Delta V_A - \Delta V_B) \sin \theta, \quad \Delta M_4 + \Delta M_5 = -s (\Delta V_A - \Delta V_B) - 2 z_4^2 \Delta \bar{R} \quad (57)$$

を式(55)に代入して整理すると、次の同次方程式が求められる。

$$\begin{bmatrix} b_1 \sin \theta - s a_{11} & a_{13} - 2 z_4^2 a_{11} \\ b_2 \sin \theta - s a_{21} & a_{23} - 2 z_4^2 a_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta V_A - \Delta V_B \\ \Delta \bar{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

これより、初期曲げ変形を考慮した座屈条件式は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} & \left\{ z_4^2 + 2 k_2 \left( \frac{s}{l_2} \right)^2 z_2^2 \right\} \left\{ k_2 D_4 + (1 + 3 k_1 D_4) (D_2 - F_2) \right\} \\ & - k_2 \left( 1 + \frac{2s}{l_2} \right)^2 - 3 k_1 \left( 1 - \frac{s}{l_1} \right)^2 (D_2 - F_2) - 3 k_1 k_2 \left( \frac{s}{l_1} + \frac{2s}{l_2} \right)^2 D_4 \\ & - \frac{M_4}{N_4 l_2} \left[ \frac{V_A}{N_4} \{ k_2 + 3 k_1 (D_2 - F_2) \} \sin \theta - 3 k_1 \left( 1 + \frac{l_2}{2 l_1} \right) \left\{ (D_2 - F_2) - \frac{k_2}{z_4^2} \left( \frac{s}{l_1} + \frac{2s}{l_2} \right)^2 \right\} \right] \\ & \times \left( 2 - z_4 \cot z_4 - \frac{z_4^2}{\sin^2 z_4} \right) \sin \theta = 0 \quad (59) \end{aligned}$$

ここで、 $k_1=0$  とおけば台形ラーメンの座屈条件式が得られる。また、 $k_1=s=0$ ,  $\theta=90^\circ$ ,  $M_4=Hh$ ,  $N_4=V_A=P$  とおけば、2ヒンジ門形ラーメンの式(25)に一致する。

#### (5) 近似式

先に誘導した初期曲げ変形を考慮した座屈条件式に対して、初期曲げモーメントを無視して同一の軸方向圧縮力のみが作用する場合の近似式を求める。

門形ラーメンについては、図-8(a)に示す荷重状態を考えれば部材に軸方向力のみが作用する。ここに、水平荷重 $H$ は図-3(a)の荷重による水平反力に等しい。この場合の水平移動座屈に対する条件式は式(25)より次式のようなになる。

$$z_c \cot z_c + \frac{2PH}{Hl} \left( \frac{z_b}{2} \cot \frac{z_b}{2} - 1 \right) = 0 \quad (60)$$

固定門形ラーメンに対しては、式(33)より次のようになる。

$$z_c \tan z_c + \frac{2PH}{Hl} \left( 1 - \frac{z_b}{2} \cot \frac{z_b}{2} \right) = 0 \quad (61)$$

2ヒンジ山形ラーメンの場合には、式(46)の $N_1$ ,  $N_2$ を用いて図-8(b)の荷重状態に対する座屈条件式は、式(45)より次のようになる。

$$z_1 \cot z_1 + \frac{N_1 h}{N_2 l_2} (z_2 \cot z_2 - 1) = 0 \quad (62)$$

2ヒンジ $\pi$ 形ラーメンでは、図-6の対称荷重による柱の軸方向圧縮力 $N_4$ と水平反力 $H$ を図-8(c)のように作用させる。このときの座屈条件式は、式(59)において $M_4=0$ とおいた式で与えられる。

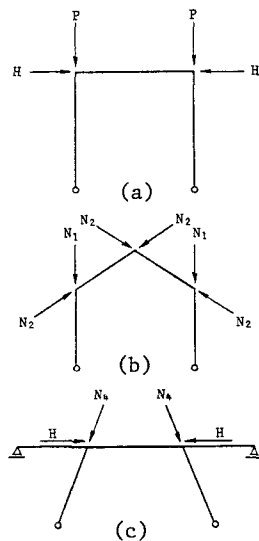


図-8 軸圧縮荷重

## 4. 数値計算

数値計算により、ラーメンの座屈係数 $r$ を求める。座屈荷重 $P_{cr}$ は、柱の部材長 $l_c$ と曲げ剛性 $EI_c$ を用いて次式で与えられる。

$$P_{cr} = r (EI_c / l_c^2) \quad (63)$$

#### (1) 門形ラーメン

図-3に示した2ヒンジ門形ラーメンと固定門形ラーメンの曲げ圧縮荷重による水平移動座屈について計

算する。荷重は、初期曲げモーメントの影響が最も現われるはりの中央点に集中荷重  $2P$  を載荷した場合と、はり上に等分布荷重  $p$  ( $p l = 2P$  とする) を満載した場合の 2 通りを考える。なお、比較のために、図-8 (a) のように 2 個の集中荷重  $P$  を柱頭に載荷し、 $H = 0$  とした場合の水平移動荷重を求める。このときの座屈条件式は次式で与えられる<sup>1)</sup>。

2 ヒンジ:  $z_c \tan z_c - 6 k_b = 0$ ,      固 定:  $z_c \cot z_c + 6 k_b = 0$       (64 a, b)

曲げ荷重による影響を調べるために、次の 3 つの解法による  $r$  の値を求める。

- ① 式 (64) による値
- ② 式 (60) または式 (61) による値 (図-8 (a))
- ③ 式 (25) または式 (33) による値 (図-3)

式 (64) では、座屈荷重ははりの剛比  $k_b$  の値のみに依存するが、はり上に荷重が作用する場合には 2 つのパラメータ  $k_b$  と  $h/l$  の値に依存する。そこで、 $h/l = 0.5, 1, 2$  の場合について  $k_b = 0.1 \sim 10$  の範囲で  $r$  の値を求めた。その計算結果の一部を表-1 に示す。

座屈荷重に及ぼす初期曲げモーメントの影響は、②と③の比較により  $k_b \div 1$  のときに最も大きい、その影響は 3% 以下である。また、①と②の値よりはりに作用する軸方向圧縮力  $H$  による影響は  $k_b, h/l$  がともに小さいとき程大きくて、はりの圧縮力が柱の圧縮力の 40% 以上 ( $H/P \geq 0.4$ ) になると座屈荷重は 5% 以上低下し、特に  $h/l$  の小さい固定門形ラーメンでは著しく低下する。

表-1 門形ラーメンの座屈係数

|     | $h/l$ | $k_b$ | Two - Hinged |       |       |       |       |       | Fixed |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     |       |       | 0.1          | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    | 0.1   | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    |
| 2P  | 0.5   | ①     | 0.497        | 0.842 | 1.422 | 1.821 | 2.104 | 2.387 | 3.534 | 4.375 | 6.030 | 7.379 | 8.434 | 9.549 |
|     |       | ②     | 0.466        | 0.806 | 1.399 | 1.812 | 2.102 | 2.387 | 2.587 | 3.538 | 5.479 | 7.133 | 8.365 | 9.548 |
|     |       | ③     | 0.465        | 0.801 | 1.372 | 1.763 | 2.045 | 2.360 | 2.589 | 3.570 | 5.617 | 7.359 | 8.591 | 9.635 |
|     |       | ②     | 0.489        | 0.833 | 1.416 | 1.819 | 2.103 | 2.387 | 3.323 | 4.182 | 5.905 | 7.323 | 8.418 | 9.549 |
|     |       | ③     | 0.488        | 0.827 | 1.388 | 1.769 | 2.047 | 2.360 | 3.355 | 4.259 | 6.089 | 7.567 | 8.647 | 9.636 |
|     |       | ②     | 0.495        | 0.840 | 1.421 | 1.821 | 2.104 | 2.387 | 3.483 | 4.328 | 6.000 | 7.365 | 8.430 | 9.549 |
|     | 2     | ③     | 0.494        | 0.834 | 1.392 | 1.771 | 2.047 | 2.360 | 3.525 | 4.418 | 6.195 | 7.614 | 8.660 | 9.636 |
|     |       | ②     | 0.476        | 0.818 | 1.407 | 1.815 | 2.102 | 2.387 | 2.925 | 3.833 | 5.678 | 7.221 | 8.389 | 9.548 |
|     |       | ③     | 0.475        | 0.814 | 1.388 | 1.782 | 2.064 | 2.369 | 2.933 | 3.866 | 5.783 | 7.377 | 8.540 | 9.606 |
|     |       | ②     | 0.492        | 0.836 | 1.418 | 1.820 | 2.104 | 2.387 | 3.396 | 4.248 | 5.948 | 7.342 | 8.423 | 9.549 |
| p l | 1     | ③     | 0.491        | 0.832 | 1.399 | 1.786 | 2.065 | 2.369 | 3.420 | 4.303 | 6.073 | 7.505 | 8.576 | 9.607 |
|     |       | ②     | 0.496        | 0.841 | 1.421 | 1.821 | 2.104 | 2.387 | 3.500 | 4.344 | 6.010 | 7.370 | 8.431 | 9.549 |
|     |       | ③     | 0.495        | 0.836 | 1.401 | 1.787 | 2.065 | 2.369 | 3.529 | 4.404 | 6.140 | 7.535 | 8.584 | 9.607 |
|     |       | ②     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     | 2     | ②     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     |       | ③     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     |       | ②     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     |       | ③     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     |       | ②     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|     |       | ③     |              |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

(2) 山形ラーメン

図-5 に示した 2 ヒンジ山形ラーメンの水平移動座屈について計算する。座屈係数は次の 4 つの解法によって求める。

- ① 式 (62) による値 (図-8 (b))
- ② 式 (45) において、 $R_1 = 0$  とした値
- ③ 式 (45) において、 $M_c = M_b = 0$  とした値
- ④ 式 (45) による値

文献 5) に示された 5 つの山形ラーメンについて、上記の解法による  $r$  の値を表-2 に示す。

表-2 山形ラーメンの座屈係数

| Case                   | a     | b     | c     | d     | e     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $h/l_0$                | 1     | 0.5   | 1/3   | 0.2   | 0.2   |
| $f/l_0$                | 0.5   | 0.25  | 1/6   | 0.2   | 0.2   |
| $I_b/I_c$<br>( $k_b$ ) | 1     | 1     | 1     | 1     | 3     |
| ①                      | 1.414 | 0.894 | 0.633 | 0.371 | 1.114 |
| ②                      | 3.214 | 2.585 | 2.039 | 1.129 | 2.605 |
| ③                      | 3.147 | 2.551 | 2.023 | 1.122 | 2.581 |
| ④                      | 3.040 | 2.439 | 1.929 | 1.078 | 2.441 |
| Ref.5)                 | 2.987 | 2.411 | 1.917 | 1.073 | 2.422 |
| Ref.5)                 | 3.210 | 2.577 | 2.033 | 1.085 | 2.547 |

初期曲げ変形を無視した①の値は、④の値よりも 5.2~7.6% 大きい。また、座屈前の部材回転角を無視した②の値も④の値より 4.6~6.6% 大きい、座屈前の曲げモーメントを無視して部材回転角を考慮した③の値は 0.5~1.8% 大きい (いずれも危険側の誤差) だけである。

表-2 の最後の行は文献 5) で「正解」として与えられた値で、式 (1) と (7) を連立させて求められた座屈係数である。この値は、 $d$  の場合を除けば本解法の①または②の値に最も近くて、その差は 2% 以内である。

以上の計算例では、座屈前の曲げモーメントよりも部材回転角による影響の方が大きいことがわかる。なお、はりに作用する軸方向圧縮力  $N_2$  を無視した場合の誤差は、 $d$  で 49%、その他のケースで 9～23% 大きくなる。

### (3) 台形及び $\pi$ 形ラーメン

2 ヒンジ台形ラーメンと、図-6の  $\pi$  形ラーメンについて計算する。水平移動座屈に対する座屈係数の値を次の3つの解法によって求める。

- ① 柱頭の節点 D, E に、それぞれ鉛直集中荷重  $P$  を受ける場合
- ② 式(59)において  $M_4=0$  とした値(図-8(c))
- ③ 式(59)による値

水平移動座屈荷重は、総荷重が同じ場合には全径間に荷重を分散して載荷するよりも中央径間のはりにのみ載荷する方が小さくなる。また、等分布荷重よりも集中荷重による方がわずかながら小さくなることから、③では鉛直集中荷重  $2P$  を中央径間のはりの中央点に載荷した。②では③の荷重による水平反力  $H$  と柱の軸方向圧縮力  $N_4$  に等しい荷重を図-8(c)のように作用させた。

まず、台形ラーメンでは3つのパラメータ  $k_2$ ,  $\theta$ ,  $h/l_2$  が座屈荷重に影響する。パラメータの値を変えて計算した結果を表-3に示す。②と③の数値から、座屈前の曲げモーメントによる影響は  $k_2 \approx 1$ ,  $\theta = 75^\circ$  のときに最も現われ、また  $h/l_2$  の値が大きい程大きく影響し、 $h/l_2 = 0.2, 0.5, 1, 2$  のときにそれぞれ②の値に最大 2, 3, 5, 8% 危険側の誤差が生じる。

一方、①と②を比較すると、 $k_2$ ,  $h/l_2$  が小さくなる程①の値は②(または③)の値よりも大きくなる。これは、はりと柱に作用する軸圧縮力の違いによるものであって、 $\theta$  が  $60^\circ$  前後のときに  $r$  の値に最も大きな差が生じて、その差は数十パーセントになることがある。

表-3 台形ラーメンの座屈係数

| $\theta$ | $k_b$ | $h/l_2 = 0.2$ |       |       |       |       |       | $h/l_2 = 0.5$ |       |       |       |       |       |
|----------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          |       | 0.1           | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    | 0.1           | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    |
| 30°      | ①     | 0.351         | 0.635 | 1.167 | 1.526 | 1.747 | 1.933 | 0.657         | 1.148 | 1.918 | 2.317 | 2.528 | 2.690 |
|          | ②     | 0.220         | 0.408 | 0.801 | 1.124 | 1.395 | 1.796 | 0.527         | 0.934 | 1.614 | 2.021 | 2.291 | 2.610 |
|          | ③     | 0.220         | 0.408 | 0.800 | 1.122 | 1.393 | 1.795 | 0.527         | 0.934 | 1.612 | 2.017 | 2.287 | 2.607 |
| 45°      | ①     | 0.430         | 0.780 | 1.446 | 1.913 | 2.211 | 2.470 | 0.773         | 1.355 | 2.311 | 2.856 | 3.163 | 3.410 |
|          | ②     | 0.236         | 0.446 | 0.913 | 1.328 | 1.694 | 2.263 | 0.576         | 1.033 | 1.853 | 2.403 | 2.797 | 3.282 |
|          | ③     | 0.236         | 0.446 | 0.911 | 1.323 | 1.685 | 2.256 | 0.576         | 1.031 | 1.842 | 2.382 | 2.771 | 3.269 |
| 60°      | ①     | 0.495         | 0.885 | 1.607 | 2.111 | 2.445 | 2.746 | 0.817         | 1.417 | 2.409 | 3.010 | 3.372 | 3.682 |
|          | ②     | 0.257         | 0.491 | 1.026 | 1.509 | 1.928 | 2.544 | 0.604         | 1.082 | 1.955 | 2.567 | 3.015 | 3.557 |
|          | ③     | 0.257         | 0.490 | 1.021 | 1.494 | 1.903 | 2.525 | 0.604         | 1.078 | 1.927 | 2.512 | 2.947 | 3.521 |
| 75°      | ①     | 0.525         | 0.914 | 1.598 | 2.070 | 2.393 | 2.701 | 0.716         | 1.224 | 2.064 | 2.608 | 2.964 | 3.293 |
|          | ②     | 0.287         | 0.550 | 1.148 | 1.666 | 2.076 | 2.587 | 0.579         | 1.022 | 1.817 | 2.378 | 2.782 | 3.231 |
|          | ③     | 0.287         | 0.549 | 1.138 | 1.636 | 2.032 | 2.560 | 0.577         | 1.015 | 1.779 | 2.305 | 2.695 | 3.186 |
| $\theta$ | $k_b$ | $h/l_2 = 1$   |       |       |       |       |       | $h/l_2 = 2$   |       |       |       |       |       |
|          |       | 0.1           | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    | 0.1           | 0.2   | 0.5   | 1     | 2     | 10    |
| 30°      | ①     | 1.142         | 1.915 | 2.826 | 3.152 | 3.297 | 3.403 | 2.056         | 3.105 | 3.759 | 3.913 | 3.977 | 4.023 |
|          | ②     | 1.013         | 1.715 | 2.585 | 2.939 | 3.138 | 3.352 | 1.932         | 2.938 | 3.599 | 3.781 | 3.881 | 3.993 |
|          | ③     | 1.013         | 1.714 | 2.579 | 2.932 | 3.132 | 3.349 | 1.931         | 2.934 | 3.591 | 3.773 | 3.875 | 3.991 |
| 45°      | ①     | 1.332         | 2.261 | 3.495 | 4.011 | 4.257 | 4.440 | 2.438         | 3.835 | 4.940 | 5.231 | 5.353 | 5.441 |
|          | ②     | 1.125         | 1.939 | 3.099 | 3.660 | 3.992 | 4.354 | 2.220         | 3.538 | 4.660 | 5.003 | 5.189 | 5.390 |
|          | ③     | 1.124         | 1.933 | 3.067 | 3.612 | 3.946 | 4.334 | 2.216         | 3.512 | 4.591 | 4.932 | 5.130 | 5.369 |
| 60°      | ①     | 1.374         | 2.326 | 3.672 | 4.318 | 4.652 | 4.913 | 2.605         | 4.149 | 5.582 | 6.015 | 6.205 | 6.343 |
|          | ②     | 1.151         | 1.986 | 3.259 | 3.949 | 4.373 | 4.823 | 2.340         | 3.791 | 5.248 | 5.750 | 6.015 | 6.285 |
|          | ③     | 1.148         | 1.968 | 3.169 | 3.810 | 4.231 | 4.759 | 2.326         | 3.705 | 5.001 | 5.476 | 5.779 | 6.191 |
| 75°      | ①     | 1.044         | 1.761 | 2.865 | 3.507 | 3.895 | 4.231 | 1.824         | 2.991 | 4.487 | 5.154 | 5.495 | 5.763 |
|          | ②     | 0.934         | 1.600 | 2.672 | 3.331 | 3.759 | 4.186 | 1.707         | 2.827 | 4.311 | 5.007 | 5.388 | 5.729 |
|          | ③     | 0.930         | 1.579 | 2.578 | 3.176 | 3.592 | 4.109 | 1.692         | 2.748 | 4.033 | 4.641 | 5.042 | 5.581 |

$\pi$  形ラーメンでは、前述の3つのパラメータの他に側径間の剛比  $k_1$  とスパン比  $l_1 : l_2 : l_1$  の値が座屈荷重に影響する。ここでは等径間 ( $l_1 = l_2$ ) の場合について計算した結果を図-9, 10に示す。

座屈係数に及ぼす初期曲げモーメントの影響は台形ラーメンの場合と異なり、 $\theta$  が小さくて  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $h/l_2$  が大きい程著しい。図に示したデータ以外の計算結果も含めて調べると、 $\theta \geq 60^\circ$  で  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $h/l_2$  がとも

に1以上の場合に初期曲げモーメントの影響が10%以上現われる。特に、 $\theta$ が小さいときには20%を超えることがあり、 $\theta=30^\circ$ のときには $h/l_2=0.5$ でも $k_1, k_2$ が2以上になると $r$ の値は10%以上小さくなる。

次に、①と②の値は $\theta$ が $90^\circ$ に近い場合を除いて差が認められることから、座屈解析では荷重位置を正確に扱う必要があることがわかる。

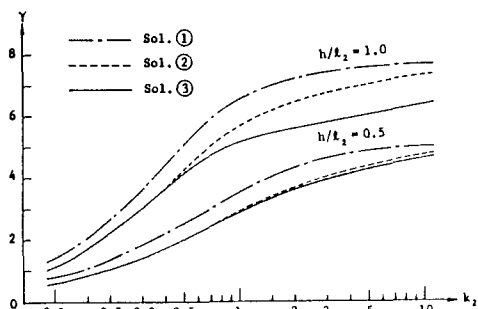


図-9  $\pi$ 形ラーメンの座屈係数 ( $k_1=1, \theta=45^\circ$ )

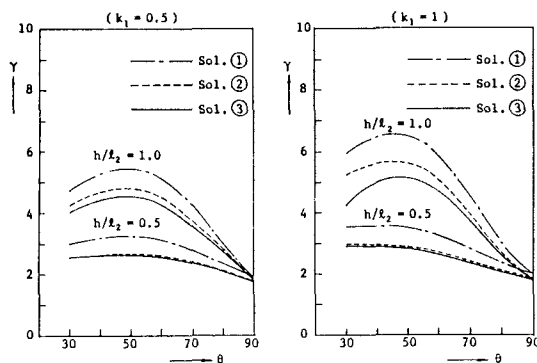


図-10  $\pi$ 形ラーメンの座屈係数 ( $k_2=1$ )

## 5. 結 語

ChwallaやLuが増分量についての式を組立てて座屈前の曲げモーメントの影響を考慮したラーメンの座屈条件式を誘導したのに対し、本研究では従来からの線形座屈解析に用いられている式を増分量について線形化する数学的手法を用いたので汎用性のある解析法である。また、このような線形固有値解析の手法によって、初期曲げモーメントのみならず初期変形も考慮することができた。この解析手法をマトリックス構造解析法に応用すれば、さらに一般的な曲げ荷重が作用する場合の座屈解析法を開発することができる。

数値計算の結果から、門形ラーメンのような長方形ラーメンでは、はり上に作用する曲げ荷重による影響は一般的に無視できる程度に小さいものと思われるが、柱が傾斜したラーメンではこの影響を無視できない場合のあることがわかった。アーチ系構造物では古くからこの影響は指摘されていたが<sup>9), 10)</sup>、ラーメン構造物についてはあまり配慮されていなかったようであり、さらに検討する必要がある。

謝 辞：本研究に着手する端緒を与えていただいた土木学会 座屈設計のガイドライン作成小委員会（委員長 福本啓士）の諸先生方に謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) C. R. C of Japan: Handbook of Structural Stability, Corona Publishing Co. Ltd., 2-23~2-56, 1971.
- 2) Chwalla, E.: Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen, Der Bauingenieur, Vol. 19, 1938.
- 3) Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill Book Co., New York, pp. 227~231, 1952.
- 4) Lu, Le-Wu: Stability of Frames under Primary Bending Moments, Proc. ASCE, Vol. 89, ST3, 1963.
- 5) 藤本盛久: 剛節骨組の弾性安定について, 日本建築学会論文集, No. 48, 1954.
- 6) 前田幸雄・林 正: 構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法, 第11回JSSCマトリックス解析法研究発表論文集, 1977.
- 7) 仲・加藤・藤本・菅野: 座屈論, 新訂建築学大系 12, 彰国社, pp. 445~447, 1968.
- 8) 前出 3) の pp. 196~210.
- 9) 西脇威夫: アーチ系橋の耐力, 橋梁と基礎, Vol. 5, No. 7, 1971.
- 10) 前田幸雄・林 正: リブアーチにおける変形の影響, 土木学会論文報告集, No. 299, 1980.