

不均一弾性地盤上の矩形板の曲げの一解析法

BENDING ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATE ON NON-UNIFORMLY ELASTIC FOUNDATIONS

松田 浩* 崎山 毅**

By Hiroshi MATSUDA and Takeshi SAKIYAMA

The problem on bending of rectangular plates on elastic foundations has been studied by many investigators. However it has been hardly carried out to study bending of rectangular plates on non-uniformly elastic foundations.

In this paper, the semi-analytical method is developed to study bending problems of rectangular plates with variable thickness on nonlinear elastic foundations, and of rectangular plates on non-uniformly elastic foundations. The semi-analytical solutions are obtained by converting the differential equations into the integral equations and applying the numerical integration.

Comparisons with numerical results obtained by other investigators are made, and it is confirmed that the semi-analytical solutions are accurate enough for practical usage.

1、まえがき

本論文は、弾性地盤上の変厚矩形板の曲げの一解析法として、その基礎微分方程式の解析的近似解に基づく計算手法を提示し、非線形弾性地盤上の変厚板および不均一性を有する弾性地盤上の矩形板の曲げ解析への応用性について検討したものである。

弾性地盤上の変厚矩形板の一般的な基礎微分方程式は任意関数として与えられる板剛度、板厚および地盤反力係数などの諸変数を係数とする、いわゆる変数係数の連立偏微分方程式となるため、その解析解を求めることは、ほとんど不可能であると考えられる。

一方、弾性地盤上の等厚板の曲げ問題に関しては、いくつかの数値解法および近似解法が提案されてきている。

能町¹⁾は、重調和微分式のGreenの積分を媒介として、有限フーリエ変換を利用して、いわゆる、解析的境界要素法というべき方法を用いて弾性基礎にある四辺四隅自由な矩形板の曲げについて解析を行なった。倉田ら²⁾は、差分法を応用した逐次近似解法を用いて、非線形ばね基礎上の矩形板の曲げ解析を行なった。北村ら³⁾は、固有振動モードを利用した級数解による方法を用いて、弾性基礎上の矩形板に関して一連の研究を進めている。

FEMを利用した解析は、Cheungら⁴⁾によって始められ、Henry⁵⁾は、弾性地盤上の平板の大変形問題

* 工修 長崎大学助手 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

** 工博 長崎大学助教授 工学部構造工学科 (〒852 長崎市文教町 1-14)

を、FEMを用いて解析した。Svec⁶⁹⁾は、FEMによって4辺単純支持なる境界条件をもつ厚板の解析を行った。

また、園田ら⁷⁰⁾⁷¹⁾は線形粘弾性地盤上の平板の曲げ問題について、自由振動問題における固有関数を用いて一連の研究を進め、その解析法をせん断変形の影響を考慮した矩形厚板の解析に適用し、相対2辺が単純支持された矩形板の一般解を誘導している。

以上のように、弾性地盤上の平板の曲げ問題に関する解析法として、多くの研究が行なわれてきているが、矩形板の変断面性状あるいは、地盤反力係数の場所的不均一性を考慮した弾性地盤上の平板の解析例は、ほとんど見受けられない。

本研究は、地盤反力係数の場所的不均一性を考慮した弾性地盤上の変厚矩形板の曲げ解析法として、(1)基礎微分方程式の積分方程式への変換と、(2)積分方程式の近似解法の応用とにより、その近似解を求め、それに基づく直接的かつ半解析的な計算手法を提示するとともに、非線形弾性地盤上の変厚板あるいは、場所的不均一性を有する弾性地盤上の矩形板の断面力および変形の解析を行ない、その挙動特性を明らかにしたものである。

本解析法によれば、任意の境界条件、荷重条件、板厚分布および場所的不均一性をもつ弾性地盤上の矩形板を一般的に解析することができる。また、板剛度や板厚、地盤反力係数の場所的变化が不規則で関数表示できない場合についても、矩形板の縦、横の等分割線の交点におけるこれらの諸量が与えられれば、諸量が規則的な場合と同様に解析することができる。

2、弾性地盤上の矩形板の基礎微分方程式

平板のせん断力を Q_y 、 Q_x 、ねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_y 、 M_x 、たわみ角を θ_y 、 θ_x 、たわみを w とすれば、図-1に示すような弾性地盤上の変厚板を含む一般的な矩形板の曲げに関する基礎微分方程式は、次の(1.a)～(1.h)の連立偏微分方程式となる。これらの式は、せん断変形の影響を考慮したReissnerの平板曲げ理論において、板厚方向の直応力 σ_z の効果を無視して定式化したものである。

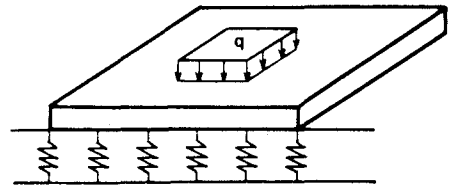


図-1 弾性地盤上の矩形板

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - k_v w = 0 \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{M_x}{D} \quad (1.e)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{2}{D(1-\nu)} M_{xy} \quad (1.f)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = \frac{Q_x}{Gt_s} \quad (1.g)$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{M_y}{D} \quad (1.d)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = \frac{Q_y}{Gt_s} \quad (1.h)$$

ここに、 $q = q(x, y)$ ：横荷重強度、 E ：弾性係数、 G ：せん断弾性係数、 ν ：ポアソン比、 $t_s = h/1.2$ 、 $h = h(x, y)$ ：板厚、 $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ ：板剛度、 $k_v = k_v(x, y)$ ：地盤反力係数、

ここで、断面力 Q_y 、 Q_x 、 M_{xy} 、 M_y 、 M_x および変形 θ_y 、 θ_x 、 w に関して、次の無次元量 $X_1 \sim X_8$ 、

$$(X_1, X_2) = \frac{a^2}{D_0(1-\nu^2)} (Q_y, Q_x), (X_3, X_4, X_5) = \frac{a}{D_0(1-\nu^2)} (M_{xy}, M_y, M_x), (X_6, X_7) = (\theta_y, \theta_x), X_8 = \frac{w}{a}$$

を導入すれば、式(1.a)～(1.h)は、次の式(2.a)～(2.h)のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X_1}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_2}{\partial \eta} &= -\bar{q} + \bar{k}_v X_8 \quad \cdots \cdots (2.a) & \nu \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} &= I X_5 \quad \cdots \cdots (2.e) \\
 \frac{\partial X_3}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_8}{\partial \eta} &= \mu X_2 \quad \cdots \cdots (2.b) & \frac{\partial X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_6}{\partial \eta} &= J X_3 \quad \cdots \cdots (2.f) \\
 \frac{\partial X_4}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial X_3}{\partial \eta} &= \mu X_1 \quad \cdots \cdots (2.c) & \frac{\partial X_8}{\partial \eta} + X_7 &= \kappa X_2 \quad \cdots \cdots (2.g) \\
 \frac{\partial X_6}{\partial \zeta} + \nu \mu \frac{\partial X_7}{\partial \eta} &= I X_4 \quad \cdots \cdots (2.d) & \frac{\partial X_8}{\partial \zeta} + \mu X_6 &= \mu \kappa X_1 \quad \cdots \cdots (2.h)
 \end{aligned}$$

ここに、 $x = a\eta$ 、 $y = b\zeta$ 、 a, b ：矩形板の横、縦の辺長、 h_0 ：基準板厚、 q_0 ：基準荷重強度、 $\mu = b/a$ 、

$$\begin{aligned}
 \bar{q} &= \mu K_1 \frac{q_0}{q_0}, \quad K_1 = \frac{q_0 a^3}{D_0 (1-\nu^2)}, \quad \bar{k}_v = \mu K_2 \frac{k_v}{k_{v0}}, \quad K_2 = \frac{k_{v0} a^3}{D_0 (1-\nu^2)}, \quad k_{v0} : \text{基準地盤反力係数} \\
 I &= \mu (1-\nu^2) \left(\frac{h_0}{h} \right)^3, \quad J = 2\mu (1+\nu) \left(\frac{h_0}{h} \right)^3, \quad \kappa = \frac{1}{10} \frac{E}{G} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \frac{h_0}{h}, \quad D_0 = \frac{E h_0^3}{12 (1-\nu^2)} : \text{基準板剛度},
 \end{aligned}$$

式(2.a)～(2.h)を用いて、分布荷重や集中荷重などの任意の横荷重を受け、任意の境界条件をもつ、弾性地盤上の変厚矩形板の曲げ解析が行なわれる。

3、基礎微分方程式の近似解

基礎微分方程式(2.a)～(2.h)は、板厚、板剛度および地盤反力係数を変数係数とする連立偏微分方程式となるため、任意の荷重条件および境界条件のもとでその解析解を一般的に得ることはほとんど不可能であると考えられる。したがって、本論文においては、図-2に示すような、矩形板の縦横の等分割線の交点を対象として、これらの離散点における基礎微分方程式の近似解を求めることとする。

図-2に示すように、矩形板を横、縦方向にそれぞれ m, n 等分し、これらの等分割線の交点の集合体とみなす。ここで、任意の交点 (i, j) に関連する矩形領域 $0 \leq \eta \leq \eta_i$ 、 $0 \leq \zeta \leq \zeta_j$ に注目し、これを領域 $[i, j]$ と表記することとする。また、図中の◎印を付けた交点を任意領域 $[i, j]$ の主要点、○印を付けた交点を内部従属点、●印を付けた交点を境界従属点と称して区別することとする。

はじめに、基礎微分方程式(2.a)～(2.h)の各式を領域 $[i, j]$ において面積分し、積分方程式に変換する。次に、等間隔の数値積分法の応用により、これらの積分方程式を離散表示すれば、無次元化された断面力および変形の主要点における値 X_{pij} に関する連立方程式が得られる。

この連立方程式を解くことにより、領域 $[i, j]$ における、主要点の諸量 X_{pij} と境界従属点および内部従属点の諸量 X_{pfg} との間の関係式が求められ、式(3)となる。なお、式(3)の導出過程の詳細は文献(10)を参照されたい。

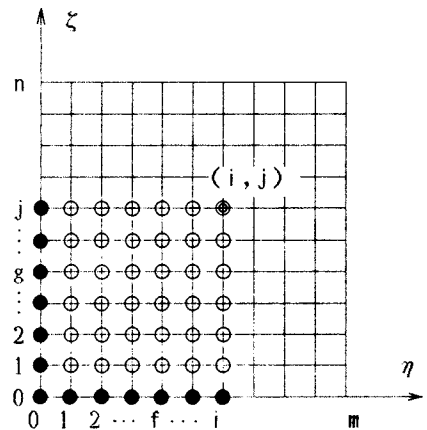


図-2 矩形板の離散点

$$X_{pij} = \sum_{l=1}^8 \left\{ \sum_{f=0}^i \sum_{j=0}^n \beta_{if} A_{pl} [X_{lfo} - X_{lfj} (1 - \delta_{jl})] + \sum_{g=0}^i \beta_{ig} B_{pl} [X_{lgo} - X_{lgj} (1 - \delta_{gj})] \right. \\ \left. + \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i \beta_{if} \beta_{ig} C_{plfg} X_{lfg} (1 - \delta_{fi} \delta_{gj}) \right\} - \sum_{f=0}^i \sum_{g=0}^i \beta_{if} \beta_{ig} A_{pl} \bar{q}_{fg} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $p=1,2,\dots,8$ 、 $i=1,2,\dots,m$ 、 $j=1,2,\dots,n$ 、 $\beta_{if}=\alpha_{if}/m$ 、 $\beta_{ig}=\alpha_{ig}/n$ 、

$\delta_{ij}=\text{Kronecker's delta}$ 、 A_{pl} 、 B_{pl} 、 C_{plfg} ：Appendix参照

係数 β_{if} 、 β_{ig} は数値積分法における重み係数である。本論文においては、等分割数値積分法として、台形公式を用いることとする。このとき、

$$\alpha_{if} = \begin{cases} 0.5 & (f=0, i) \\ 1 & (f \neq 0, i) \end{cases} \quad \alpha_{ig} = \begin{cases} 0.5 & (g=0, j) \\ 1 & (g \neq 0, j) \end{cases}$$

領域 $[i, j]$ を最小領域 $[1, 1]$ から始めて、順次、領域を拡大しつつ、各領域の主要点の諸量 X_{pij} を式(3)により求め、これを次の領域の内部従属点における諸量 X_{pfg} として、式(3)の右辺に逐次代入してゆけば、各領域の内部従属点の諸量はすべて消去され、結局、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} はこの領域の境界従属点における諸量 X_{rfo} ($r=1,3,4,6,7,8$)、 X_{sog} ($s=2,3,5,6,7,8$)のみによって表わされることになり、次式のように整理される。

$$X_{pij} = \sum_{d=1}^6 \left(\sum_{f=0}^i a_{1pijfd} \cdot X_{rfo} + \sum_{g=0}^i a_{2pijgd} \cdot X_{sog} \right) + q_{pij} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、

$$a_{hpijud} = \sum_{l=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [a_{hlikou} - a_{hlikud} (1 - \delta_{ki})] \right. \\ + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pl} [a_{hliou} - a_{hliud} (1 - \delta_{lj})] \\ \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{plkl} a_{hlikud} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \right\} \\ q_{pij} = \sum_{l=1}^8 \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pl} [q_{liko} - q_{likj} (1 - \delta_{ki})] \right. \\ + \sum_{l=0}^j \beta_{jl} B_{pl} [q_{liol} - q_{liil} (1 - \delta_{lj})] \\ + \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} C_{plkl} q_{likl} (1 - \delta_{ki} \delta_{lj}) \left. \right\} \\ - \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j \beta_{ik} \beta_{jl} A_{pl} \bar{q}_{kl}$$

$p=1\sim 8$ 、 $i=1\sim m$ 、 $j=1\sim n$ 、 $f=0\sim i$ 、 $g=0\sim j$ 、 $d=1\sim 6$ 、 $h=1, 2$ 、 $u=f$ ($h=1$ のとき) or g ($h=2$ のとき)

$$a_{1rioid} = 1, \quad a_{2sojld} = 1$$

$$a_{110j01} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{22i001} = \frac{\kappa_{00}}{\kappa_{i0}} \bar{\alpha}_i, \quad a_{140j03} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\alpha}_j, \quad a_{25i003} = \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\alpha}_i$$

$$a_{12i0k5} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{210jl4} = \frac{1}{\kappa_{0j}} \bar{\beta}_{jl}, \quad a_{15i0k3} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{i0}} \bar{\beta}_{ik}, \quad a_{240jl3} = \nu \frac{\bar{D}_{00}}{\bar{D}_{0j}} \bar{\beta}_{jl}$$

$$a_{12i0k6} = \frac{1}{\kappa_{i0}} \bar{r}_{ik}, \quad a_{210jl6} = \frac{1}{\mu \kappa_{0j}} \bar{r}_{jl}, \quad a_{15i0k5} = \frac{1}{\bar{D}_{i0}} \bar{r}_{ik}, \quad a_{240jl4} = \frac{1}{\mu \bar{D}_{0j}} \bar{r}_{jl}$$

$$\bar{\alpha}_i = (-1)^i, \quad \bar{\beta}_{ik} = \delta_{ik} + (-1)^{i+1} \cdot \delta_{0k}, \quad \bar{r}_{ik} = \frac{4m(-1)^{i+k}}{1 + \delta_{ik} + \delta_{0k}}, \quad \bar{D}_{i0} = \frac{D_0}{D_{i0}}$$

$$s = d + \delta_{1f} + \delta_{2f} + 2(\delta_{3f} + \delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f}), \quad r = d + \delta_{2f} + \delta_{3f} + 2(\delta_{4f} + \delta_{5f} + \delta_{6f})$$

式(4)は、変厚矩形板の縦横の等分割線の交点における、基礎微分方程式(2.a)～(2.h)の離散表示された近似解である。この解式中に含まれる境界従属点の6個ずつの諸量 X_{rfo} 、 X_{sog} はいわゆる積分定数であり、境界条件によって決定されるべきものである。また、任意の領域 $[i, j]$ の主要点における諸量 X_{pij} を、この領域の境界従属点における諸量 X_{rfo} 、 X_{sog} に関係づける要素 a_{hpijud} は、伝達マトリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するものである。なお、式(4)の近似解を求める方法の詳細については、文献(10)を参照されたい。

4、積分定数と境界条件

基礎微分方程式 (2.a)~(2.h) の近似解(4)に含まれる積分定数 X_{rfo} および X_{sog} は、具体的には、それぞれ、平板の $\xi=0$ および $\eta=0$ なる辺上の等分割点 $(f, 0)$ および $(0, g)$ における断面力および変形を表わす。各分割点において6個ずつの積分定数が存在するが、平板の境界辺の支持条件に応じて、これらの中のいずれか3個の積分定数は既知となる。残りの3個の未知なる積分定数の値は、残りの辺の境界条件によって決定される。

図-3および図-4は、各々、4辺自由板および対辺単純支持他対辺自由板の積分定数と境界条件を示している。これらの各図において、(a)図は、平板全体を対象とした場合である。(d)図および(c)図は、それぞれ、左右または上下の1軸対称性をもつ平板の1/2部分を対象とした場合である。また、(b)図は、左右および上下の2軸対称性をもつ平板の1/4部分を対象とした場合である。各図において、隅角部の分割点の積分定数および境界条件は、 $\square$ で囲まれている。なお、隅角点における積分定数および境界条件は、その隅角点において交差する2境界辺上の諸量間の関係を考慮して定められる。詳しくは、文献(10)を参照されたい。

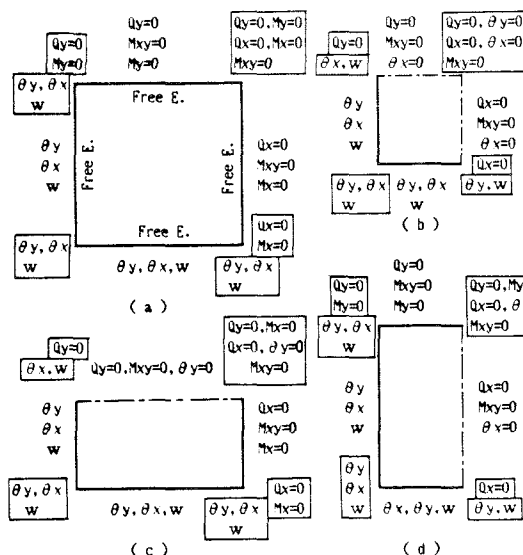


図-3 積分定数と境界条件
(4辺自由板)

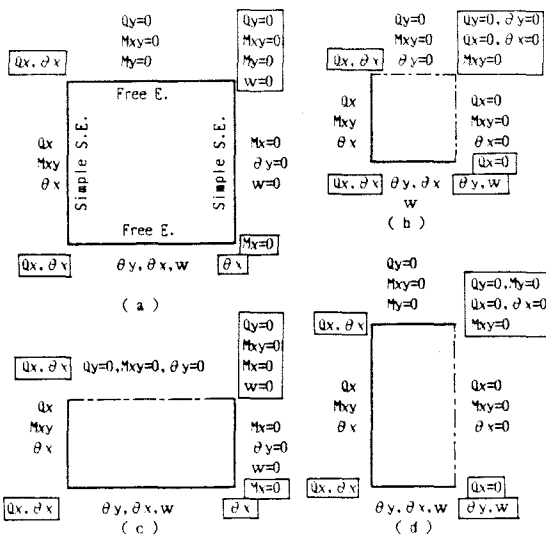


図-4 積分定数と境界条件
(対辺単純支持他対辺自由板)

4、数値解析結果

(1) 線形弾性地盤上の等厚薄板

はじめに、線形弾性地盤上の等厚薄板に関して、本解析法による数値解の収束性および精度を明らかにするために、集中荷重を受ける4辺自由なる正方形板について、変形の解析を行なった。その結果を文献(3)の解析結果とともに表-1に示す。

同表より、本解析法による数値解は、分割数 m の増加とともに収束性に一様性があることが認められる。

表-1 集中荷重を受ける4辺自由正方形板の
中央点のたわみ ($\nu=0.225$)

m	K^*	10	100	1000
4		0.03753	0.008449	0.001392
8		0.04333	0.01073	0.002411
12		0.04508	0.01171	0.002944
16		0.04586	0.01220	0.003244
20		0.04628	0.01249	0.003428
4-8-12*		0.04663	0.01262	0.003448
Ref.3		0.04686	0.01284	0.003598

* Extrapolated Values, $K^*=a^4k_v/D$ (WD/pa^2)

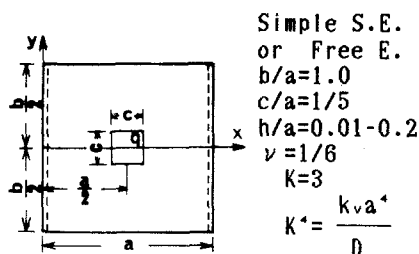


図-5 部分分布荷重を受ける弾性地盤上の矩形板

また、8~12 分割程度の比較的粗い分割のもとでも十分に実用性のある解が得られている。さらに、一様な収束性がある場合の外挿公式(文献(11))による推定収束値は、文献(3)の解析結果とよく一致していることが示されている。

なお、数値解の比較に用いた文献(3)の解析結果は、せん断変形の影響を無視したKirchhoffの薄板曲げ理論に基づいている。一方、本論文に用いた基礎式(1.a)~(1.h)は、せん断変形の影響を考慮したReissnerの平板曲げ理論に基づくものである。したがって、これらの両者の比較のために、ここでは、本法による解析においてはせん断変形の影響を十分に無視できる薄板を取り扱い、板厚 h と辺長 a との比を $h/a=0.01$ とする。

表-2 部分分布荷重を受ける対辺単純支持他対辺自由板

h/a	m	$x=a/2, y=0$			$x=a/2, y=b/2$	
		w	M_x	M_y	w	M_x
0.01	10	0.5036	0.7072	0.4482	0.3445	0.3481
	20	0.5263	0.7977	0.5332	0.3473	0.3493
	10-20	0.5339	0.8279	0.5615	0.3482	0.3497
	Ref.9*	0.5345*	0.8244*	0.5603*	0.3487*	0.3488*
0.05	10	0.5083	0.7081	0.4470	0.3432	0.3514
	20	0.5319	0.7966	0.5344	0.3456	0.3540
	10-20	0.5398	0.8261	0.5635	0.3464	0.3549
	Ref.9	0.5407	0.8236	0.5615	0.3464	0.3552
0.10	10	0.5224	0.7053	0.4469	0.3415	0.3549
	20	0.5487	0.7959	0.5357	0.3436	0.3595
	10-20	0.5575	0.8261	0.5653	0.3443	0.3610
	Ref.9	0.5581	0.8197	0.5621	0.3443	0.3593
0.15	10	0.5453	0.6987	0.4471	0.3400	0.3563
	20	0.5758	0.7861	0.5351	0.3419	0.3598
	10-20	0.5860	0.8152	0.5644	0.3425	0.3610
	Ref.9	0.5866	0.8130	0.5622	0.3425	0.3613
0.20	10	0.5768	0.6896	0.4470	0.3387	0.3555
	20	0.6131	0.7765	0.5348	0.3403	0.3593
	10-20	0.6252	0.8055	0.5641	0.3408	0.3606
	Ref.9	0.6258	0.8037	0.5618	0.3409	0.3610
Multiplier		$10^{-3}qa^4/D$	$10^{-2}qa^2$		$10^{-3}qa^4/D$	$10^{-2}qa^2$

* The values are obtained from thin plate theory.

表-3 部分分布荷重を受ける4辺自由板

h/a	m	$x=a/2, y=0$		$x=0, y=a/2$	$x=a/2, y=b/2$	
		w	M_x	w	w	M_x
0.01	10	0.6872	0.5041	0.2628	0.4284	0.1695
	20	0.7076	0.5959	0.2480	0.4235	0.1871
	10-20	0.7144	0.6265	0.2431	0.4219	0.1930
0.10	10	0.7017	0.5006	0.2618	0.4253	0.1819
	20	0.7257	0.5973	0.2472	0.4203	0.1864
	10-20	0.7337	0.6295	0.2423	0.4186	0.1930
0.20	10	0.7444	0.4959	0.2550	0.4181	0.1864
	20	0.7787	0.5891	0.2404	0.4130	0.1969
	10-20	0.7901	0.6202	0.2355	0.4113	0.2004
Multiplier		$10^{-3}qa^4/D$	$10^{-2}qa^2$	$10^{-3}qa^4/D$	$10^{-2}qa^2$	

(2) 線形弾性地盤上の矩形厚板

(1)の数値計算例では、薄板を取り扱っているが、本論文で用いた基礎式(1.a)~(1.h)は、せん断変形の影響を考慮したReissnerの平板曲げ理論に基づくものである。したがって、矩形厚板に対して本解法による数値解の精度を調べるために、まず、図-5に示すような、部分分布荷重を受ける対辺単純支持他対辺自由板について、

断面力および変形の解析を行なった。表-2に、 $m=10, 20$ のときの数値計算結果とそれらの数値を用いて外挿公式によって求めた推定収束値(10-20)を、文献(9)の結果とともに、表-2に示す。同表より、外挿式による推定収束値は、文献(9)の結果とよく一致していることが認められる。

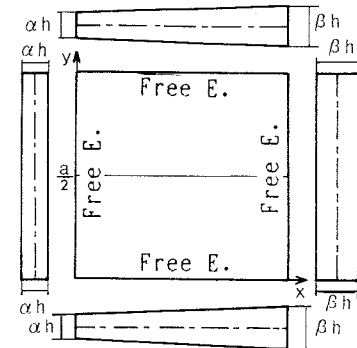
次に、図-5のような部分分布荷重および集中荷重を受ける4辺自由板について、断面力および変形の解析を行なった。これらの数値計算結果を表-3および表-4に示す。なお、示された諸量は、図-5に示す座標系における各点の断面力および変形である。表-4より、本解析法に基づく矩形厚板の断面力および変形の数値解は、薄板の場合と同様に様な収束性があることが認められる。なお、表2~表4において、10-20、8-12、4-8-12は、外挿式による推定収束値である。

表-4 集中荷重を受ける4辺自由板

h/a	m	x=a/2, y=0		x=0, y=a/2	x=a/2, y=b/2
		w	M _x	w	w
0.01	4	0.01580	0.08479	0.008171	0.01117
	8	0.01746	0.1475	0.006406	0.01062
	12	0.01794	0.1845	0.006077	0.01052
	16	0.01815	0.2110	0.005963	0.01049
	8-12	0.01832	0.2141	0.005814	0.01044
	4-8-12	0.01836	0.2198	0.005813	0.01044
0.10	4	0.01600	0.08459	0.008121	0.01110
	8	0.01789	0.1466	0.006377	0.01054
	12	0.01794	0.1845	0.006077	0.01052
	16	0.01815	0.2110	0.005963	0.01049
	8-12	0.01904	0.2134	0.005803	0.01036
	4-8-12	0.01911	0.2191	0.005804	0.01036
0.20	4	0.01660	0.08398	0.007971	0.01088
	8	0.01920	0.1451	0.006221	0.01033
	12	0.02028	0.1823	0.005888	0.01024
	16	0.02092	0.2089	0.005776	0.01020
	8-12	0.02114	0.2121	0.005622	0.01017
	4-8-12	0.02128	0.2179	0.005620	0.01017
Multiplier		Pa ² /D	P	Pa ² /D	

(3) 非線形弾性地盤上の変厚板

次に、非引張性非線形弾性地盤上の変厚矩形板に、中央点集中荷重が作用する場合に関して、断面力および変形の解析を行なった。非引張性を考慮する場合は、まず、圧縮にも引張にも同じように挙動すると仮定したWinkler基礎の場合を解析して、その結果、浮き上がりを生じた部分のばねを除去し、その系を解析し、さ



Case(1) $\alpha=0.8, \beta=1.2$ Case(2) $\alpha=0.4, \beta=1.6$

図-6 変厚矩形板(4辺自由板)

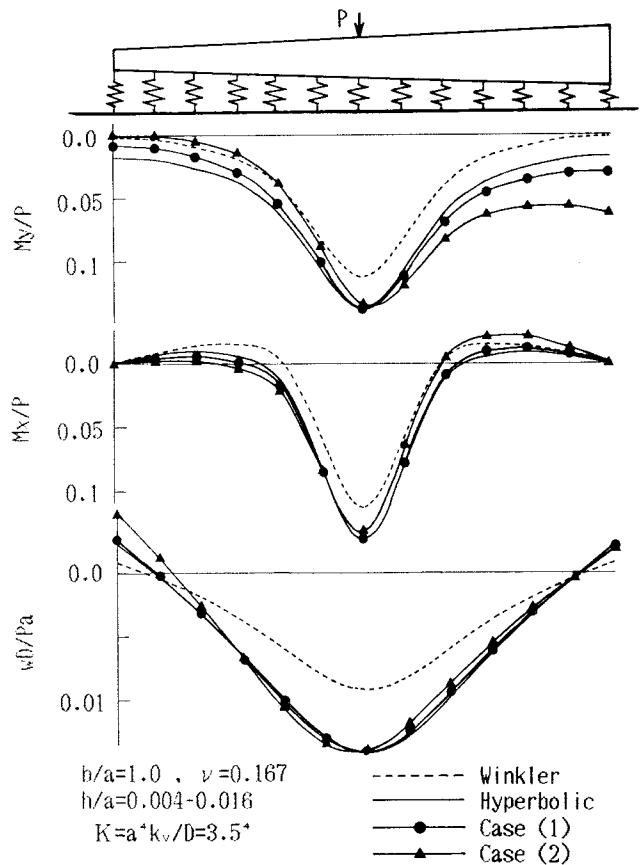


図-7 非線形弾性地盤上の変厚板の数値解析結果

らに、浮き上がりが生じた場合は、収束するまで繰り返し計算を行なう。また、非線形ばねの場合は、変形量に応じたばね反力を解析の中に取り込んで行なう。非線形ばねには、文献(2)に示されているような非線形的性質を有する双曲線形ばねを用いた。変厚板は、図-6に示すような、一方向(x方向)にのみ板厚が直線的に変化する場合を取り扱い、そのテーバ比は、図-6に示すように Case(1) $\alpha=0.8, \beta=1.2$ 、Case(2) $\alpha=0.4, \beta=1.6$ とした。それらの非線形弾性地盤上の変厚板の数値解析結果をWinkler基礎上および非線形弾性地盤上の等厚板($h/a=0.01$)の解析結果とともに図-7に示す。なお、図-7の曲げモーメントおよびたわみは、図-6の $y=a/2$ 断面上に関するものである。また、数値計算は12分割で行なった。

図-7より、テーバ比が大きくなるにつれ、 M_y に関しては、矩形板の変厚性上の影響が認められるが、 M_x, w に関しては、その影響がほとんどないことがわかる。また、等厚板の場合、地盤がここで用いたような、非線形性を有する双曲線形ばねの場合、Winkler基礎として計算した場合に対して、中央点のたわみに関しては、約1.5倍、中央点の曲げモーメントに関しては、1.2倍大きいことがわかる。

(4) 不均一な弾性地盤上の矩形厚板

前節(1)~(3)においては、弾性地盤のばね特性は線形あるいは非線形の差異こそあるけれども、全地盤にわたり地盤は均一であるとして解析を行なった。しかしながら、地盤特性が場所的に不均一な場合も存在しうるものと考えられるので、ここでは、図-8の上部に示しているように、無次元化された地盤反力係数 K の値が、左側半分が $k=3.0$ 、右側半分が $k=2.5$ あるいは $k=4.0$ のように場所的不均一性を考慮した弾性地盤上の矩形板の断面力および変形の解析を行なった。なお、矩形板は、中央点に集中荷重を受ける4辺自由板を取り扱った。その結果を図-5の $y=0$ 断面上の曲げモーメント、たわみおよび、 $y=b/2$ 断面上のたわみに関して、図-8に示す。

同図より、曲げモーメント M_y, M_x に関しては、無次元地盤反力係数の不均一性の影響は、極めて小さいが、たわみに関しては、その影響が、大きいことがわかる。

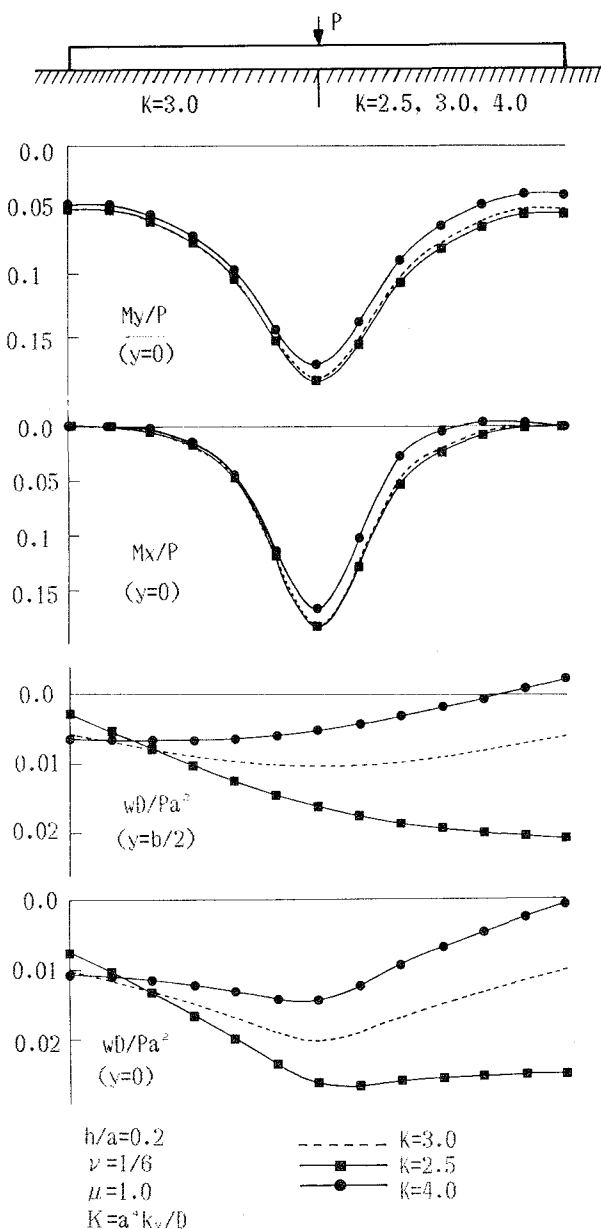


図-8 不均一弾性地盤上の矩形板数値解析結果

5、結語

偏微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用により、弾性地盤上の矩形板の挙動を支配する連立偏微分方程式の近似解を求め、これにもとづく、非線形弾性地盤上の変厚板あるいは不均一弾性地盤上の矩形板の曲げ問題の一般的な解法を提示した。数値解析の結果、以下のことが確認された。

(1) 矩形薄板および矩形厚板に関する既往研究結果と本解析法に基づく数値解析結果との比較により、本解法による数値解は収束性に一様性をもつこと、また、比較的粗い分割による解析においても実用上十分の精度をもつ解が得られること、そして、外挿式を用いることにより、さらに、精度の良い収束値を推定することができることなどが確認された。

(2) 非線形弾性地盤上の変厚矩形板に関して断面力および変形の解析を行ないその挙動を明らかにした。その結果、変断面性の影響は、 M_x 、 w に関しては、ほとんどなく、 M_y に関して、わずかではあるが認められる。また、Winkler基礎上および非線形弾性地盤上の等厚板に関して断面力および変形の解析を行なった結果、ばねの非線形性は、中央点のたわみに関して、その影響が比較的大きいことがわかった。

(3) 地盤反力係数の場所的不均一性を考慮した弾性地盤上の矩形板に関して、断面力および変形の解析を行ない、均一な弾性地盤上の矩形板との挙動特性の比較を行なった。その結果、不均一性の影響は、曲げモーメントに関しては、小さいが、たわみに関しては、大きいことがわかった。

また、本解法によれば、任意の境界条件をもつ矩形板に関して、荷重の分布状態や板厚、板剛度および地盤反力係数の場所的变化が不規則な場合でも、矩形板の縦横の等分割線の交点におけるこれらの諸量が与えられれば、諸量が規則的な場合と全く同様に解析することができる。

[Appendix]

$$\begin{array}{lll}
 A_{01} = \gamma_{01} & B_{01} = 0 & C_{01k1} = \mu(\gamma_{03} + \kappa_{11}\gamma_{07}) \\
 A_{02} = 0 & B_{02} = \mu\gamma_{01} & C_{02k1} = \mu\gamma_{02} + \kappa_{11}\gamma_{08} \\
 A_{03} = \gamma_{02} & B_{03} = \mu\gamma_{03} & C_{03k1} = J_{11}\gamma_{06} \\
 A_{04} = \gamma_{03} & B_{04} = 0 & C_{04k1} = I_{11}\gamma_{04} \\
 A_{05} = 0 & B_{05} = \mu\gamma_{02} & C_{05k1} = I_{11}\gamma_{05} \\
 A_{06} = \gamma_{04} + \nu\gamma_{05} & B_{06} = \mu\gamma_{06} & C_{06k1} = -\mu\gamma_{07} \\
 A_{07} = \gamma_{06} & B_{07} = \mu(\nu\gamma_{04} + \gamma_{05}) & C_{07k1} = -\gamma_{08} \\
 A_{08} = \gamma_{07} & B_{08} = \gamma_{08} & C_{08k1} = \gamma_{01}\overline{K_{v11}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 [\gamma_{0k}] = [\bar{\gamma}_{0k}]^{-1} & \beta_{1j} = \beta_{11} \cdot \beta_{jj} & \\
 \bar{\gamma}_{11} = \beta_{11} & \bar{\gamma}_{12} = \mu\beta_{jj} & \bar{\gamma}_{19} = -\overline{K_{v11}} \\
 \bar{\gamma}_{22} = -\mu\beta_{11} & \bar{\gamma}_{23} = \beta_{11} & \bar{\gamma}_{25} = \mu\beta_{jj} \\
 \bar{\gamma}_{31} = -\mu\beta_{11} & \bar{\gamma}_{33} = \mu\beta_{jj} & \bar{\gamma}_{34} = \beta_{11} \\
 \bar{\gamma}_{44} = -I_{11}\beta_{11} & \bar{\gamma}_{46} = \beta_{11} & \bar{\gamma}_{47} = \mu\nu\beta_{jj} \\
 \bar{\gamma}_{55} = -I_{11}\beta_{11} & \bar{\gamma}_{56} = \nu\beta_{11} & \bar{\gamma}_{57} = \mu\beta_{jj} \\
 \bar{\gamma}_{63} = -J_{11}\beta_{11} & \bar{\gamma}_{66} = \mu\beta_{jj} & \bar{\gamma}_{67} = \beta_{11} \\
 \bar{\gamma}_{71} = -\mu\kappa_{11}\beta_{11} & \bar{\gamma}_{76} = \mu\beta_{11} & \bar{\gamma}_{78} = \beta_{11} \\
 \bar{\gamma}_{82} = -\kappa_{11}\beta_{11} & \bar{\gamma}_{87} = \beta_{11} & \bar{\gamma}_{88} = \beta_{jj}
 \end{array}$$

参考文献

- 1) 能町：弾性基礎にある四辺四隅自由な矩形板の曲げについて、土木学会論文報告集、第32号、pp.26-32 1956
- 2) 倉田、高端、谷平：非線形ばね基礎上の周辺自由な平板の数値解析、土木学会論文報告集、第208号、pp.13-21 1972
- 3) 北村、桜井：弾性基礎上の4辺自由板の級数解、土木学会誌、Vol.64-3, pp.61-66 1979
- 4) Cheung, Y. K. and O. C. Zienkiewicz: Plates and Tanks on Elastic Foundation—An Application of Finite Element Method, Int. J. Solids and Structures, Vol.1, pp.451-461, 1965
- 5) Henry, t. y.: Flexible Plate Finite Element on Elastic Foundation, Jour. Structural Division Proc. ASCE, Vol.96 ST10, pp.2083-2101 1970
- 6) Svec, O. J.: Thick Plates on Elastic Foundations by Finite Element Method, Jour. Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.102, EM3, pp.461-477 1976
- 7) Sonoda, K. and H. Kobayasi: Rectangular Plates on Linear Viscoelastic Foundation, Jour. Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.106 EM2, pp323-338 1980
- 8) 園田、小林、石尾：線形粘弾性地盤上のはりの解析、土木学会論文報告集、第247号、pp.1-9 1976
- 9) Kobayasi, H. and K. Sonoda: Rectangular Thick Plates on Linear Viscoelastic Foundations, Proc. JSCE, No.341, pp.33-40 1984
- 10) 崎山、松田：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木学会論文報告集、第338号、pp.21-28 1983
- 11) Salvadri, M.: Numerical Computation of Buckling Loads by Finite Differences, Transactions ASCE Vol.116, pp.590-636 1951

(1985年10月18日受付)