

非軸対称荷重下の軸対称JOINT 要素 に関する若干の考察

SOME INVESTIGATIONS ON THE AXISYMMETRIC JOINT ELEMENT UNDER NON-AXISYMMETRIC LOADING

* * *

小堀為雄 近田康夫

By Tameo KOBORI and Yasuo CHIKATA

In this paper, the axisymmetric joint element under non-axisymmetric loading was formulated according to the formulation of 4-nodes iso-parametric axisymmetric element in semi-analytical procedure. The same axisymmetric joint element had been formulated directly by Kobori and Chikata. Some investigations concerning about the application of the joint element were also made in this paper. The investigations deal with the releasing stresses, the convergence check, the adopted value of joint stiffness and the adopted number of Fourier harmonics. The investigations give usefull informations in the applications of the axisymmetric joint element to various problems.

1. まえがき

杭基礎やフーチングの設計において、杭と地盤あるいはフーチングと地盤との間の不連続面をどのように取り扱うか、ということは大変興味深くまた重要な課題でもあると考えられる。このような、不連続面の取り扱い、有限要素法を用いて解析を行う場合に、'joint要素'と呼ばれる特殊要素を併用することにより比較的容易に達成される。joint要素には種々のものが提案されているが、Goodman ら¹⁾によるもの、もしくはそれに若干の改良を加えたものを用いることが多い。

一方、杭やフーチングの有限要素解析においては、その形状特質をよりよく表現するために軸対称体としてモデル化することが多いが、一般に荷重条件が軸対称条件を満たさないことから、'半解析的手法'²⁾を用いることになる。'半解析的手法'とは、円筒座標系において、変位、荷重を円周方向にFourier級数表示することにより、三角関数の直交性を利用して平衡方程式を調和成分ごとに分離し、有限個の2次元問題に変換する手法である。この半解析的手法の適用に際しても、不連続面の表現にはjoint要素が、しかも軸対称joint要素が必要となる。これまでに、提案されている軸対称joint要素は、Ghaboussi ら³⁾、Heuze ら⁴⁾、中井ら⁵⁾、Zienkiewicz ら⁶⁾そして小堀ら⁷⁾によるものがあるが前3者は軸対称問題のみを対象としており非軸対称荷重が作用する場合の解析には適用できない。一方、後2者は半解析的手法への適用を意図したもので、Zienkiewicz らのものはアイソパラメトリック要素を利用し、有限要素厚みを有している。小堀らの

* 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野2丁目40-20)

** 工修 金沢大学助手 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野2丁目40-20)

ものはGoodman らのjoint 要素を改良した初期要素厚み 0, ポアッソン比 0 の要素である。

本報告では, 小堀らが直接的に導出した軸対称joint 要素の要素剛性マトリックスが, 一般の回転体アイソパラメトリック要素を用いた半解析的手法の定式化において要素厚みを 0 に漸近させることによって得られることを示すとともに, このjoint 要素の適用に関する若干の考察を行うものである。

2 joint要素の剛性マトリックスの導出

円筒座標系 (r, z, θ) において, 長方形断面を有する 4 節点 (線) 回転体アイソパラメトリック要素を考える。FIG.1 に示すように, 回転断面において, 要素中心を原点として局部座標系 (ξ, η) をとる。従って, 変位や荷重は (r, z, θ) 系または (ξ, η, θ) 系で表現できる。いま, 非軸対称荷重が, $\theta = 0$ 断面に関して対称である場合を考える。変位の r, z および θ 方向成分 u, v および w は次式のように有限Fourier 級数で表現できる (4 節点要素の場合)。

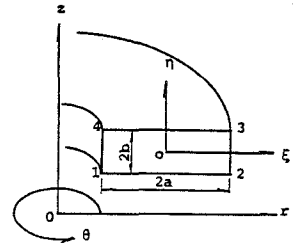


FIG.1 4-nodes iso-parametric element

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = N(r, z) \sum_{m=0}^M C_m u_m, \quad C_m = [c_m \ c_m \ c_m \ c_m], \quad c_m = \text{diag}[\cos m\theta \ \cos m\theta \ \sin m\theta] \quad (1)$$

$$u_m = \{u_1^m \ v_1^m \ w_1^m \ \cdots \ u_4^m \ v_4^m \ w_4^m\}^T$$

ここに u_i^m, v_i^m および w_i^m ($i=1\sim 4$) は節点変位をFourier 級数表示した場合の第 m 次の係数ベクトルであり, M は採用するFourier 級数の項数である。また, $N(r, z)$ は形状関数マトリックスであり, 4 節点要素の場合, その成分 N_i は次式のようなである。

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (2)$$

節点 i に関する節点変位一ひずみマトリックスの第 m 次調和成分対応項は次式のようなである。

$$B_i^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \cos(m\theta) & 0 \\ \frac{N_i}{r} \cos(m\theta) & 0 & \frac{m}{r} N_i \cos(m\theta) \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \cos(m\theta) & \frac{\partial N_i}{\partial r} \cos(m\theta) & 0 \\ -\frac{m}{r} N_i \sin(m\theta) & 0 & (\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r}) \sin(m\theta) \\ 0 & -\frac{m}{r} N_i \sin(m\theta) & \frac{\partial N_i}{\partial z} \sin(m\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

さて, joint 要素の応力一ひずみマトリックスを, Heuze ら⁴⁾に倣って, Poisson 比 ν を 0 として次式のように与えることにする。

$$D = [2ak_r \ 2bk_\eta \ 2\bar{r}k_t \ 2bk_\xi \ 2bk_\theta \ 2bk_\theta], \quad \bar{r} = (r_1+r_2+r_3+r_4)/4 \quad (4)$$

ただし, $k_r, k_\eta, k_t, k_\xi, k_\theta$ は $\sigma = \{\sigma_r \ \sigma_z \ \sigma_\theta \ \tau_{rz} \ \tau_{r\theta} \ \tau_{z\theta}\}^T$ に対応した, 各単位長さあたりの接合剛性である。

以上により, joint 要素の要素剛性マトリックス K^e の部分剛性マトリックス K_{ij}^{mn} は,

$$K_{ij}^{mn} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_i^m)^T D B_j^n r |J| d\xi d\eta d\theta, \quad |J| = ab \quad (5)$$

と表せる。ただし、三角関数の直交性から $K_{ij}^{mn} = 0$ ($m \neq n$) である。

要素中心 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ において評価した要素剛性マトリックスの成分は、対称性を考慮して、その上三角成分のみを記すと以下のようである。

$$\begin{aligned} K_m^e(3i-2, 3j-2) &= \frac{Am}{8} \left\{ \frac{1}{a} k_r \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{r} k_t + \frac{1}{b} k_\xi \beta_i \beta_j + b \left(\frac{m}{r} \right)^2 k_\theta \right\} \\ K_m^e(3i-2, 3j-1) &= \frac{Am}{8} \cdot \frac{1}{a} k_\xi \alpha_i \beta_j \\ K_m^e(3i-2, 3j) &= \frac{Am}{8} \left\{ \frac{1}{r} m \pi k_r - \frac{1}{r} m b k_\theta \left(\frac{1}{a} \alpha_j - \frac{1}{r} \right) \right\} \\ K_m^e(3i-1, 3j-1) &= \frac{Am}{8} \left\{ \frac{1}{b} k_\eta \beta_i \beta_j + \frac{1}{a^2} b k_\xi \alpha_i \alpha_j + b \left(\frac{m}{r} \right)^2 k_\theta \right\} \\ K_m^e(3i-1, 3j) &= \frac{Am}{8} \left(-\frac{m}{r} k_\theta \beta_j \right) \\ K_m^e(3i, 3j) &= \frac{Am}{8} \left\{ \frac{1}{r} m^2 \pi k_t + b k_\theta \left(\frac{1}{a} \alpha_i - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{a} \alpha_j - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{b} k_\theta \beta_i \beta_j \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $i, j = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} Am &= 8\pi a b r \quad (m = 0) \\ Am &= 4\pi a b r \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

α_i, β_i は、 $i = 1 \sim 4$ に対応して、 $\alpha = -1, 1, 1, -1, \beta = -1, -1, 1, 1$ なる値をとる。

ここで、要素厚み $2b$ を 0 とする。すなわち、 $b \rightarrow 0$ なる極限値をとれば、Eq. (7)を得る。Eq. (7)は、小堀ら⁷⁾が直接的導出を行った結果に一致する。また、この剛性マトリックスの θ 軸に関する行と列とを取り除けば、Heuze ら⁴⁾が導出した軸対称 joint 要素の剛性マトリックスに一致する。

$$K_m^e = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{r} L}{L} \begin{bmatrix} k & k & -k & -k \\ & k & -k & -k \\ \text{Sym.} & & k & k \\ & & & k \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} k_\xi & 0 & 0 \\ 0 & k_\eta & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \quad (m \geq 1), \quad L = 2a \quad (7)$$

また、 $m=0$ の場合は、軸対称問題に対応しており、Eq. (7)を 2 倍する必要がある。さらに、Eq. (7)は、局部座標系に対するものであるが、一般の場合、全体座標系への変換が必要である。

さて、要素中心において評価される応力の第 m 次調和成分は、Eqs. (3), (4)に従い、かつ $b \rightarrow 0$ なる極限値をとれば次式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r^m &= \frac{k_r}{2} (-u_1^m + u_2^m + u_3^m - u_4^m) \cos(m\theta) \\ \sigma_z^m &= \frac{k_\eta}{2} (-v_1^m - v_2^m + v_3^m + v_4^m) \cos(m\theta) \\ \sigma_\theta^m &= 2\pi k_t \frac{1}{4} \{ u_1^m + u_2^m + u_3^m + u_4^m + m(-w_1^m + w_2^m + w_3^m - w_4^m) \} \cos(m\theta) \\ \tau_{rz}^m &= \frac{k_r}{2} (-u_1^m - u_2^m + u_3^m + u_4^m) \cos(m\theta) \\ \tau_{r\theta}^m &= 0 \\ \tau_{z\theta}^m &= \frac{k_\theta}{2} (-w_1^m - w_2^m + w_3^m + w_4^m) \sin(m\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

これらの応力成分に対応した等価節点力は、

$$f_i^m = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_i^m)^T \sigma_m r |J| d\xi d\eta d\theta, \quad f_i^m = \{ f_{r_i}^m \quad f_{z_i}^m \quad f_{\theta_i}^m \}^T \quad (9)$$

$$\sigma_m = \{ \sigma_r^m \quad \sigma_z^m \quad \sigma_\theta^m \quad \tau_{rz}^m \quad \tau_{r\theta}^m \quad \tau_{z\theta}^m \}^T$$

より、最終的に $b \rightarrow 0$ なる極限操作を行えば、

$$\begin{aligned} f_{r_1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2ar}{2} (-\tau_{rz}) = f_{r_2}^m = -f_{r_3}^m = f_{r_4}^m \\ f_{z_1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2ar}{2} (-\sigma_z) = f_{z_2}^m = -f_{z_3}^m = f_{z_4}^m, \quad \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} = \begin{cases} \pi & (m \geq 1) \\ 2\pi & (m = 0) \end{cases} \\ f_{\theta_1}^m &= \left\{ \frac{\pi}{2\pi} \right\} \frac{2ar}{2} (-\tau_{z\theta}) = f_{\theta_2}^m = -f_{\theta_3}^m = f_{\theta_4}^m \end{aligned} \quad (10)$$

となり、結局、応力成分のうち $\sigma_z, \tau_{rz}, \tau_{z\theta}$ の3成分のみが、節点力に寄与するという意味において、物理的な意味をもつことになる。

3 joint 要素の適用に関する考察

前章で導出した joint 要素を用いて、非軸対称荷重を受ける軸対称体の解析手順は以下のように要約することができる。

- (1) 0次から M 次までの分離された $M+1$ 組の平衡方程式を解き、 θ の値を固定して、得られた解を Eq. (1) と同様にして Fourier 合成することにより、変位、応力等の増分を求めることができる。異なる θ の値に対しても同様にして、円周方向に $M+1$ の断面について求め、前段階での値に加える。こうして、3次元解が得られる。
- (2) 応力を求めた各断面ごとに joint 要素の剥離、滑りの判定を行い、解放すべき応力に対応した節点力を求める。この結果、不平衡節点力の円周方向分布が得られる。剥離、滑動の判定には Mohr-Coulomb 型の構成条件を与えるのが一般的であるが、要素の法線方向に初期引っ張り強度をもたせるような構成関係を与えることも可能である。
- (3) 不平衡節点力の円周方向分布を Fourier 分解し、0次から M 次までの有限 Fourier 級数で表す。
- (4) 幾つかの θ 断面で次式により収束判定を行う（一般には、応力等を算出した $M+1$ の断面で収束判定を行う）。

$$\Psi^r / \Psi_F < \varepsilon \quad (11)$$

ただし、 Ψ^r は r 回目までの繰り返し後の節点力ベクトルのノルム、 Ψ_F は作用力ベクトルのノルムであり、 ε は収束判定値である。

- (5) 収束条件が満足されるまで(1)~(4)を繰り返す。

以上の解析手順は、FIG.2 のフロー・チャートで示される。

要素は、円周方向に一定な物性をもつので、一般の joint 要素のように、剥離が生じた以降において接合剛性を0とすることはできず、応力分配法 (stress transfer method)⁸⁾ と同様の手順をとる

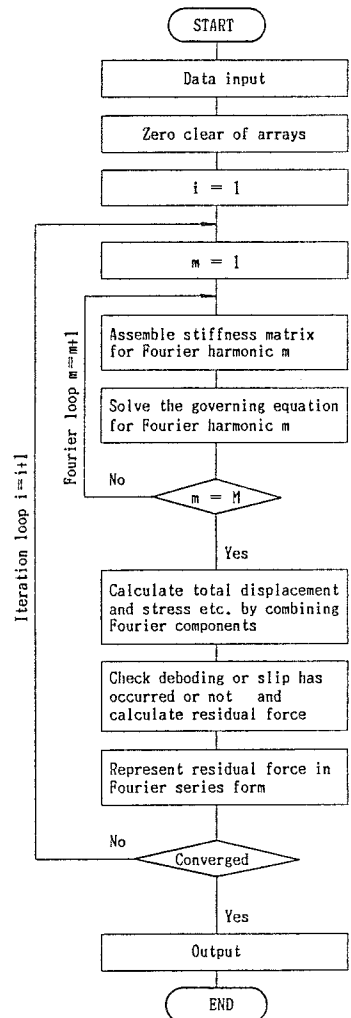


FIG.2 Flow chart of the analysis

ことになる。

応力の解放を図を用いて説明するとFIG.3 (a)～(f)のようになる。いま、joint 要素の法線方向において、FIG.3 (a)のような応力分布が作用荷重に対する線形解として得られたとしよう。joint 要素は引っ張り抵抗を有しないとすれば、応力分布は(b)図のようになる必要がある。しかし、(b)図の分布はもはや(a)図を与えたFourier 級数項のみでは表現できないので、Fourier 分解されて、(c)図のように有限Fourier 級数で表現されることになる。この例では、0次～4次の5調和成分でほぼ十分な精度で表現されている。(c)図に対応する等価節点力を用いて残差力を求め、この残差力の符号を変えたものを荷重として再び線形解析を行い、前段階の(c)図に加えれば(d)図となる。(d)図には再び引っ張り応力が生じているので(e)図のように引っ張り応力を解放する必要がある。(e)図を(f)図のようにFourier 分解し、以下収束が得られるまで同様に繰り返すことになる。これが応力分配法による応力解放であり、反復計算中に要素剛性を変化させる必要がないことから物性が円周方向に一定であることを要求する半解析的手法に対して有効である。

次に、収束判定を行う断面について考える。一般に、収束判定は応力を算出しかつ剥離・滑動の判定を行った断面に対して行う。いま、作用荷重が $\theta=0$ 断面に関して対称であり、かつ1次の調和成分のみで表現される場合、joint 要素の法線方向応力の分布は $A \cdot \cos \theta$ で表現できる (FIG.4 (a))。引っ張り抵抗を有しないものとして引っ張り応力を解放すればFIG.4 (b)のように0次～4次の5調和成分でほぼ十分な精度で応力分布を得ることができる。しかし、FIG.4 (a)に対応

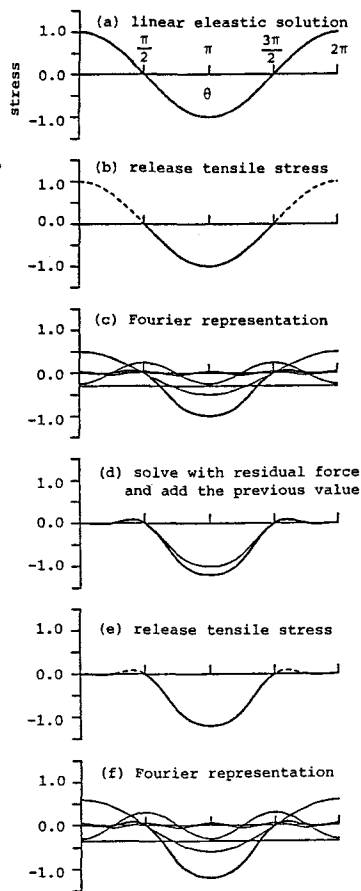


FIG.3 Stress releasing

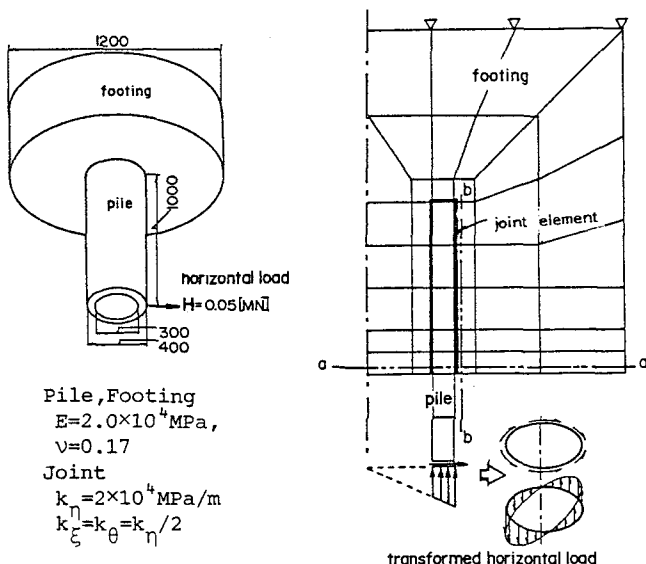


FIG.6 Pile and footing connection and its finite element model for the analysis

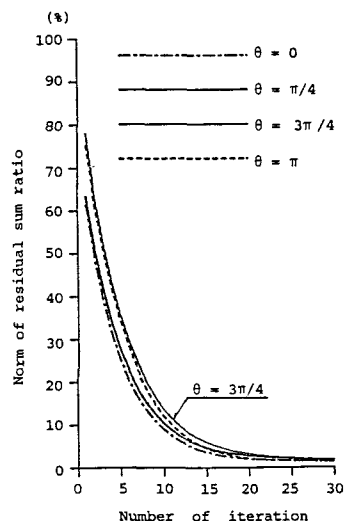
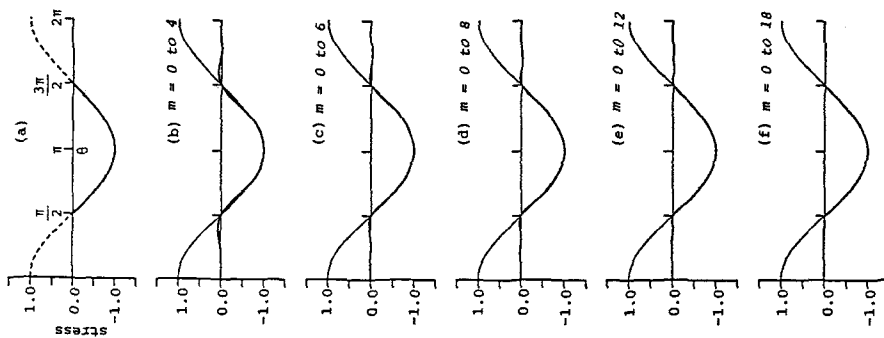


FIG.7 Convergence paths on circumferential planes

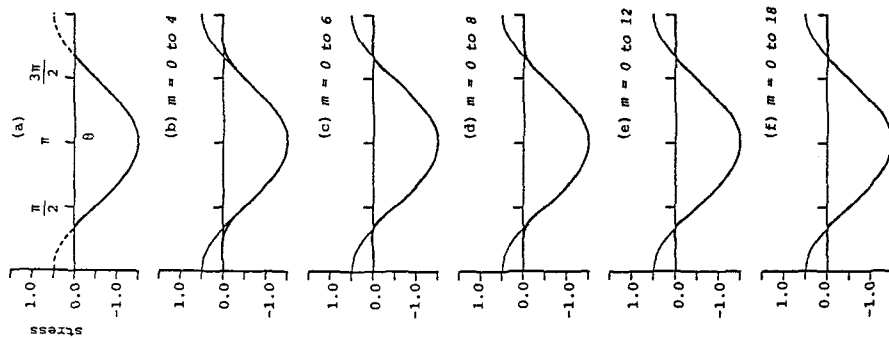
cosine-component



(a) stress distribution after releasing tensile stress
(b)-(f) Fourier representation of (a) with various m
(g) stress distribution corresponding to (a)
(h)-(l) Fourier representation of (g) with various m

FIG.4 Fourier representation of the stresses after releasing (load ; 1st harmonic)

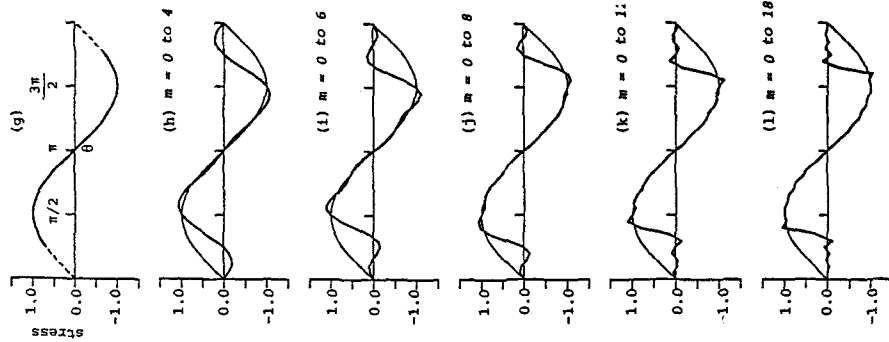
cosine-component



(a) stress distribution after releasing tensile stress
(b)-(f) Fourier representation of (a) with various m
(g) stress distribution corresponding to (a)
(h)-(l) Fourier representation of (g) with various m

FIG.5 Fourier representation of the stresses after releasing (load ; 0th + 1st harmonics)

sine-component



させた円周方向のせん断成分に関しては、sine分布をすることから、cosine成分と異なり(6)図のような不連続分布となり0次～4次の5調和成分では十分な精度が得られているとはいえない(sine成分の大きさが小さい場合には相対的に精度の低さが無視できる場合もある)。特に、 $\theta = \pi/2$ 断面では、この断面において分布が不連続になるため、他の断面において採用する調和成分の数を増せば(h)～(l)図のように精度が上昇するにもかかわらず、常に大きな残差を生じており、この断面を収束判定を行う断面として選んだ場合には収束は他の断面に比較して著しく多くの反復計算が必要となるばかりでなく、解の精度にも影響を与えると考えられる。したがって、この場合には $\theta = \pi/2$ 以外の断面で収束判定を行うのが賢明であるといえる。

一例として、FIG.6に示す杭頭－フーチング結合部を対象とした場合を考える。図中の諸物性値を用いて解析した場合の $\theta = 0, \pi/4, 3\pi/4, \pi$ の4断面における収束傾向をFIG.7に示す。FIG.7をみると $\theta = 3\pi/4$ 断面における収束が最も遅いが、 $\theta = 0$ 断面において収束判定値 ϵ を小さめに与えておけば、 $\theta = 0$ 断面のみで収束判定を行ってもよいであろう。しかし、どの断面が最も収束が速いかは、荷重の载荷状態やjoint要素の特性によっても変化すると考えられ、上述の $\theta = \pi/2$ 断面のような特異断面を回避する工夫が必要であろう。また、作用荷重が0次と1次の2調和成分で表現される場合には、FIG.5に示すように、引っ張り応力の生ずる範囲が0次項の大きさによって移動するので、先の例のように収束が得られない断面を把握することが困難となる。このことは作用荷重がより多くの調和成分で構成される場合も同様である。特異断面の排除の方法として考えられる一つの方法としては、 M 個の断面で剝離・滑動の判定を行った場合 M より少ない数(例えば $M-2$)の断面で収束が得られた時点で収束が得られたとみなすことが考えられる。これは、剝離・滑動の判定をした断面のうちの1もしくは2断面が特異断面または特異断面に最も近い断面となり他の断面よりも著しく収束が遅れる(作用荷重が1次のみもしくは0次と1次の場合)ことから、どの断面が特異となるかは分からないが、収束判定をする断面の数を減ずることで特異断面を排除することを意図したものである。

joint要素を用いる場合の最も大きな留意点はjoint要素の各接合剛性として与える数値の決定である。Gahboussiらは文献3)において、円形フーチングの軸対称問題の解析にjoint要素を用いる場合にjointの剛性とフーチングの剛性を一致させている。一方、土岐ら⁹⁾はjoint要素の剛性を隣接する一般要素の要素剛性とオーダーを合わせる方法を取っているが、応力分配法を用いる場合には、joint要素の剛性を反復計算中に変化させないこと、および応力ベースで収束判定を行うことから、収束を得るのに要する反復回数がかかなり多くなる傾向がある。先に示した解析例ではjoint要素の剛性はGahboussiらに倣って与えたのであるが、結果的に土岐らの方法に従った場合よりone order 低い値となった。これを土岐らの規準に合わせると3～4倍の反復回数が必要となり、場合によっては100回以上の反復計算を行っても収束が得られない場合がある。jointの剛性の与え方に関しては、計算精度の観点との兼ね合いをも含めて、さらに検討の余地がある。

また、ここで提示した手法では、Fourier調和成分を何項まで採用すればよいのか、ということも大きな問題となる。しかし、この点に関しては、作用荷重等の解析条件によって必要な調和成分の項数が異なるのが一般的であり、ケース・バイ・ケースに対応せざるをえない。先に示した解析例では、作用荷重が1次の調和成分のみであったことも関係して、0次～4次の5調和成分で十分であった。このことは、0次～8次の9調和成分を採用して解析した場合の結果と比較してその差が微少であったことから証明される。

以上の考察は、作用荷重の調和成分数の少ない特殊な場合に関するものではあるが、半解析的手法の適用にあたっては、あまり採用次数が多い場合には3次元解析に対する有利さが失われてしまうことになることを考えると、ここでの考察は十分に一般性があると考えられる。また、荷重が $\theta = 0$ 断面に関して対称であると考えている点についても、半解析的手法を実際に適用するにあたっては、荷重は対称あるいは反対称となるようにモデル化するのが一般的であることからここでの考察は十分に一般性を持つといえよう。

4. むすび

小堀らが文献7)で直接的に導出した、半解析的手法を用いた非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析に適用可能な軸対称joint要素が、一般の4節点アイソ・パラメトリック回転体要素の半解析的手法に沿った定式化に従っても導出できることを示した。さらに、このjoint要素の適用に当たっての留意点の幾つかに関して考察を加えた。joint要素はその適用する問題によってケース・バイ・ケースに対応すべき点も多いが、ここでの考察は、ある程度細部に渡っての情報を提供できたと考える。

今後、種々の問題に対して適用を試みることにより、このjoint要素の実用性を検証するとともに、使用に際しての know how を蓄積したいと考えている。

最後に、本報告で示した数値計算例は、金沢大学計算機センター設置のFACOM M-170FおよびM-360で行ったこと、および、本報告の一部は文部省科学研究費(昭和60年度、奨励研究(A))の補助によることを付記する。また、解析に使用したプログラムは既存の文献10)、11)にあるものを改良したものである。

参考文献

- 1) R.E.Goodman, R.L.Taylor, T.L.Brekke : " A MODEL FOR MECHANICS OF JOINT ROCK " , Proc. of ASCE, vol.94, SM3, pp. 637~659, 1968
- 2) O.C.Zienkiewicz 著, 吉識雅夫, 山田嘉昭 監訳 : " 基礎工学におけるマトリックス有限要素法 " , pp 255~273, 培風館, 1975
- 3) J.Ghaboussi, E.L.Wilson, J.Isenberg : " FINITE ELEMENT FOR ROCK JOINTS AND INTERFACES " , Proc. of ASCE, vol.9, SM10, pp.833~849, 1973
- 4) F.E.Heuze, T.G.Barbour : " NEW MODELS FOR ROCK JOINTS AND INTERFACES " , Proc. of ASCE, vol 108, GT5, pp.757~776, 1982
- 5) 佐々木松典, 中井照夫 : " 周面摩擦を考慮した杭の支持力問題の有限要素解析 " , 土木学会全国大会 学術講演会講演概要集 III-245, pp.487 ~488, 1982
- 6) L.A.Winnicki and O.C.Zienkiewicz : Plastic or visco-plastic behaviour of axisymmetric bodies subjected to non-symmetric loading—semi-analytical finite element solution, Int. Jour. for numerical methods in engineering, vol.14, pp.1399 ~1412, 1979
- 7) 小堀為雄, 近田康夫 : " 非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析における不連続面の取り扱いについて " , 構造工学論文集, vol.31A ,pp.245 ~250 , 1985.4.
- 8) O.C.Zienkiewicz, S.Valliapan, I.P.King : " STRESS ANALYSIS OF ROCK AS A 'NO TENSION' MATERIAL Geotechnique, vol.18, pp. 56~66, 1968
- 9) 土岐憲三, 佐藤忠信, 三浦房紀 : " 強震時における地盤と構造物の間の剥離と滑動 " , 土木学会論文報告集, 第302号, pp. 31~41, 1980
- 10) D.R.J.Owen, E.Hinton : " FINITE ELEMENTS IN PLASTICITY THEORY AND PRACTICE " , pp.157~269, PINERIDGE PRESS, 1980
- 11) 小堀為雄, 吉田博 : " 有限要素法による構造解析プログラム " , pp.218~220, 251~257, 丸善, 1980

(1985年10月18日受付)