

板要素とはり要素の結合による薄肉鋼構造物の有限変位弾塑性解析

A LARGE DISPLACEMENT ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC THIN-WALLED STEEL STRUCTURES
BY A COUPLED ELEMENTS TECHNIQUE

山尾敏孝* 崎元達郎**

By Toshitaka YAMAO and Tatsuro SAKIMOTO

A finite element technique which enables to connect plate elements with a beam element is developed to analyze large displacement problems of elasto-plastic thin-walled beam-columns. The stiffness matrix is derived by using multipoint constraints technique at the nodal point. The effects of interactive deformation between flange and web plates, residual stresses, initial deflections and inelastic behavior of the beam-column can be considered in this method. The in-plane flexural stiffness of the component plates is taken into account using a technique based on the micropolar theory to avoid the singularity of the global stiffness matrix. Validity and efficiency of the present method are shown by illustrative examples, where numerical results of the present method are compared with the exact solutions and experimental results.

1. まえがき

鋼構造物の圧縮部材の設計において、現道路橋示方書¹⁾では、降伏点以下での局部座屈の発生を考慮した許容応力度式が採用されており、幅厚比の比較的大きい板要素の使用を認めている。しかしながら、薄板要素で構成される薄肉構造物が圧縮や圧縮と曲げを受ける場合の板要素の局部座屈と部材の全体座屈の連成座屈挙動は非常に複雑である。特に残留応力や初期たわみなどの初期不整を有する場合を厳密に解析することは容易でなく、まだ実用的な解析法は確立されていないように思われる。

従来より、板要素の座屈後挙動や後座屈強度の非線形問題の解析的研究は多数行われてきた^{2)~10)}。しかし、これらの多くは単一板要素に対する解析が主であり、立体構成をした場合の耐荷力や構成板の変形が耐荷力に及ぼす影響等についての研究は少ない。また、薄肉開断面を有する部材の薄肉はり要素を用いた有限変位弾塑性解析もまだ少なく^{11)~14)}、この種の方法では局部変形を考慮するのが困難である。一方、構造物全体を板要素に分割し有限変位弾塑性解析することは、現在の計算機事情では計算時間や記憶容量が膨大なものとなり、経済的に困難であるのが現状である。

そこで本研究では、応力度や初期たわみ、変形等が大きく局部座屈が生じそうな領域は板要素として細かく分割し、他の領域は薄肉はり要素として有限要素法を適用する。板要素とはり要素の結合部は、変位の適

* 工修 熊本大学助手 工学部土木工学科 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)

** 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科 (同上)

合条件を満足するように多点拘束処理¹⁵⁾を行って節点の自由度を一致させる。この解析手法をここでは結合解析とよぶことにするが、この手法を用いれば、板要素のみの解析法に比べて大幅に自由度が減らせ、構造物の局部座屈挙動や連成座屈挙動の解析が可能となる。

ここで用いるはり要素は、文献14)に示すように薄肉弾性梁理論を基に誘導した1節点7自由度を持つ要素である。また板要素については、通常用いられている要素内一定ひずみ、一定曲率の三角形平板要素(1節点5自由度)を使用すると、部材を立体構成する際、平面応力問題における面内回転剛性が存在しないため局所的な不安定を生じる可能性がある。そこではり要素と同様に板要素でも変位仮定の増分理論で定式化する必要性から、ここでは、鈴木らが採用しているmicropolar理論¹⁶⁾による micro変形に対応した面内回転剛性を導入し^{9), 10)}、1節点6 自由度の板要素とした。

また、板要素の座屈後の変形挙動はほとんど剛体変位であるので、真の節点力を求める際には剛体変位を除去した真の変位より算定している。増分釣合い方程式は、両者とも増分荷重段階ごとに変形する物体とともに移動させる移動座標系を用い、系の全ポテンシャルエネルギー増分の停留条件より導いている。以上のように定式化した解析法について解析例を通して結合位置や板要素の分割数による精度、収束性等本法の妥当性について検討を行なうものである。

2. 釣合い方程式の誘導

(1) 仮定と座標系の設定

本研究においては、次に示す仮定を用いた。

- 1) 材料は完全弾塑性体でかつ等方性である。
- 2) von Mises の降伏条件式が成立し、塑性域では、Prandtl-Reussの応力-ひずみ式が成立する。

また、板要素については、

- 3) 変形前、板の中立面に垂直であった任意の横断面は、変形後も変形した中立面に垂直である。
- 4) 一つの要素面内で板面方向の応力は一定であるとする。

はり要素については文献14)に示すが、主なものとして

- 5) 断面は薄肉矩形板で構成され、一部塑性化した後も曲げひずみに対する断面の平面保持が成立するものとする。
- 6) 板厚は断面寸法に比べて十分小さく、断面のそりは板厚中心のそりで表される。
- 7) 断面が一部塑性化した後も、St.Venantのねじりによるせん断ひずみは板厚方向に直線分布する。
- 8) 局部座屈は生じず、断面形状は不変である。

等である。

さて、板要素は図1(a)に示すように、各有限要素の局部座標系 (x, y, z) を設定する。この時、三角形要素123の頂点1を通り板の中央面に直角上向きに z 軸をとり、 z 軸と板の中央面との交点を原点とする。この原点を通り直線12に沿って x 軸をとり、 xz 平面に垂直に y 軸をとるものとする。また図1(a)には局所座標系における節点力増分、節点変位増分を示す。はり要素については、図1(b)に示すように部材断面の図心を結ぶ軸を x 軸にとり、右手系の直交座

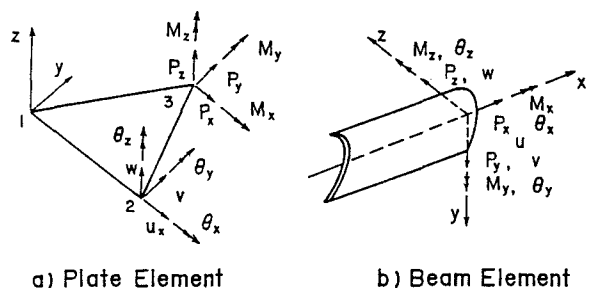


図 1 局所座標系,節点力増分,節点変位増分

標系 (x, y, z) をとる。また、断面力増分、節点変位増分も図中に示す。さらに別に空間固定の全体座標系 (X, Y, Z) を定めるものとする。なお、以下の諸式において記号の上に $\bar{}$ を付したものは全変位、全ひずみおよび全応力を表し、付さないものはすべてそれらの増分を表すものとする。

(2) 板要素の接線剛性マトリックス

まず板要素の中央面における x, y, z それぞれの方向の変位増分を u, v, w とする。また、中央面の線形ひずみ増分を ϵ_m 、曲率の増分を ϵ_b 、たわみ角の増分を ϵ_θ 、および 面内回転の増分を ϵ_ϕ とすれば、これらは節点変位増分 u_m, u_b を使って次のように表せる。

$$\epsilon_m = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = B_m \cdot u_m \quad (1)$$

$$\epsilon_\phi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\theta_z^* - (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \end{Bmatrix} = B_\phi \cdot u_m \quad (2)$$

$$\epsilon_b = \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = B_b \cdot u_b \quad (3)$$

$$\epsilon_\theta = \begin{Bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = B_\theta \cdot u_b \quad (4)$$

ここに、

$$\begin{aligned} u_m &= \langle u_{m1} \ u_{m2} \ u_{m3} \rangle^T, \quad u_{mk} = \langle u \ v \ \theta_z \rangle_k^T \\ u_b &= \langle u_{b1} \ u_{b2} \ u_{b3} \rangle^T, \quad u_{bk} = \langle w \ \theta_x \ \theta_y \rangle_k^T \\ & \quad k=1 \sim 3 \end{aligned} \quad (5)$$

T は転置、 $\{ \}$ は列ベクトルを、 $\langle \rangle$ は行ベクトルをそれぞれ表わす。面内回転増分 ϵ_ϕ は、micro 回転 θ_z^* と macro 回転の差である。ここで用いる変位関数は、要素面内の変位 u, v 及び回転角 θ_z は x, y の一次式、面外変位 w に対しては面積座標による多項式を用いている。

式(1)～(4)を用いると要素内の任意点の非線形性を考慮したひずみ増分 ϵ は次式で表せる。

$$\epsilon = B_m \cdot u_m + B_\phi \cdot u_m + 1/2 \cdot C_\theta \cdot B_\theta \cdot u_b - z \cdot B_b \cdot u_b \quad (6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \epsilon &= \langle \epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy} \ \gamma_\phi \rangle^T, \quad \gamma_\phi = 2\theta_z^* - (\partial v / \partial x - \partial u / \partial y) \\ C_\theta &= \begin{bmatrix} \partial w / \partial x & 0 \\ 0 & \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial y & \partial w / \partial x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

[] はマトリックスを表わす。さらに応力増分 σ は

$$\sigma = D \cdot \epsilon \quad (8)$$

ただし $\sigma = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_\phi)^T$, D は応力-ひずみマトリックスで、弾性域ではHookeの法則より

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる。ここに E はヤング率、 ν はポアソン比である。また、塑性域ではPrandtl-Reussの仮定より、応力-ひずみマトリックス D_{ep} は次式で表される。

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \{ \partial F / \partial \sigma \} \{ \partial F / \partial \sigma \}^T D_e}{\{ \partial F / \partial \sigma \}^T D_e \{ \partial F / \partial \sigma \}} \quad (10)$$

ここに、 F は降伏条件式で仮定より次式で与えられる。

$$F = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} = \sigma_y \quad (11)$$

なお、 σ_y は単軸引張試験における降伏応力度である。これらの式より D_{ep} は次式となる。

$$D_{ep} = D_e - \frac{1}{S} \begin{bmatrix} S_x^2 & S_x S_y & S_x S_{xy} & 0 \\ S_y S_x & S_y^2 & S_y S_{xy} & 0 \\ S_{xy} S_x & S_{xy} S_y & S_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここに

$$\begin{aligned} S_x &= E (\sigma_x' + \nu \sigma_y') / (1-\nu^2) \\ S_y &= E (\nu \sigma_x' + \sigma_y') / (1-\nu^2) \\ S_{xy} &= E \tau_{xy} / (1+\nu) \\ S &= S_x \sigma_x' + S_y \sigma_y' + 2S_{xy} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 σ_x' 、 σ_y' は偏差応力

なお、ここでは τ_ϕ と γ_ϕ の弾性及び塑性域での関係は、平面応力場の τ_{xy} と γ_{xy} の關係に準ずるとし、他の応力とひずみの關係に連成しないものと仮定している。

今、変形状態 i での節点力を $\bar{p}$ 、節点変位を $\bar{u}$ とし、変形状態 $i+1$ での節点力を $\bar{p} + p$ 、節点変位を $\bar{u} + u$ とすれば、外力ポテンシャルの増分 V は、

$$\begin{aligned} V &= - \{ (\bar{u} + u)^T \cdot (\bar{p} + p) - \bar{u}^T \cdot \bar{p} \} \\ &= - u^T \cdot (\bar{p} + p) - \bar{u}^T \cdot p \end{aligned} \quad (14)$$

と与えられ、この間のひずみエネルギーの増分 U は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U &= \int_V (\epsilon^T \cdot \bar{\sigma} + 1/2 \epsilon^T \cdot \sigma) dV \\ &= \int_V \epsilon^T \cdot \bar{\sigma} dV + 1/2 \int_V \epsilon^T \cdot D \cdot \epsilon dV \end{aligned} \quad (15)$$

上式に式(6)を代入し、全ポテンシャルエネルギー増分 $\pi = U + V$ の停留条件 $\delta \pi = 0$ により次の増分釣合い式が得られる。

$$p + (\bar{p} - \bar{f}) = \begin{bmatrix} k_{mm} + k_{\phi\phi} & k_{mb} \\ k_{bm} & k_{bb} + k_g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_m \\ u_b \end{Bmatrix} = k \cdot u \quad (16)$$

ここに

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{f}} &= \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_m + \bar{\mathbf{f}}_\phi \\ \bar{\mathbf{f}}_b \end{Bmatrix} \\ \bar{\mathbf{f}}_m &= \int_V \mathbf{B}_m^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} dV, \quad \bar{\mathbf{f}}_\phi = \int_V \mathbf{B}_\phi^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} dV \\ \bar{\mathbf{f}}_b &= - \int_V z \mathbf{B}_b^T \cdot \bar{\mathbf{Q}} dV \\ \mathbf{k}_{mm} &= \int_V \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dV \\ \mathbf{k}_{\phi\phi} &= \int_V \mathbf{B}_\phi^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_\phi dV \\ \mathbf{k}_{mb} &= \mathbf{k}_{bm}^T = -z \int_V \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_b dV \\ \mathbf{k}_{bb} &= z^2 \int_V \mathbf{B}_b^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_b dV \\ \mathbf{k}_g &= \int_V \mathbf{B}_\theta^T \cdot \bar{\mathbf{Q}}^* \cdot \mathbf{B}_\theta dV \\ \bar{\mathbf{Q}}^* &= \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{xy} & \bar{\sigma}_y \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (17)$$

$\mathbf{k}$ が要素の接線剛性マトリックスであり、 $\mathbf{k}$ 中の $\mathbf{k}_g$ が幾何学的剛性マトリックスで、 $\mathbf{k}_{mb}$ 、 $\mathbf{k}_{bm}$ は弾性範囲内であれば z について奇関数であるため、 $\mathbf{k}_{mb} = \mathbf{k}_{bm} = 0$ となる。しかし、塑性域に入ると各層における $\mathbf{D}$ が一定でなくなるので 0 とはならない。また、 $(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{f}})$ は不釣り合い力で定式化の際の線形化や荷重増分途上での塑性化により生じるもので、後で述べる方法で算定する。

(3) はり要素の接線剛性マトリックス

次にはり要素についての増分釣り合い式を導く¹⁴⁾。図2に示すように、はりの断面上の任意点 (η, ζ) の増分変位は、図心軸上の変位 (u, v, w, ϕ) との幾何学的な関係より求まるので、軸方向のひずみ増分 ϵ は次式で表せる。

$$\begin{aligned}\epsilon &= u' - (\eta - \zeta \phi') v'' - (\zeta + \eta \phi') w'' + 1/2 \{ (v')^2 + (w')^2 \} \\ &\quad + 1/2 (\eta^2 + \zeta^2) (\phi')^2 + \omega \phi''\end{aligned}\quad (18)$$

となる。ここに $()'$ は (d/dx) を、 ω は図心 O に関するそり関数である。また、せん断ひずみ増分 γ は

$$\gamma = 2n \phi' \quad (19)$$

となり、 n は図2に示す曲線座標 s の接線に垂直な方向の座標を表す。

次に応力増分とひずみ増分の関係は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \mathbf{D}_b \cdot \begin{pmatrix} \epsilon \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

ここに $\mathbf{D}_b$: 応力-ひずみマトリックス

また、断面力増分 $\mathbf{r}$ と変形増分 $\mathbf{d}$ の関係は次式となる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{d} \quad (21)$$

ここに

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \langle P_x \quad -M_z \quad M_y \quad M\omega \quad M_x \rangle^T \\ \mathbf{d} &= \langle u' \quad -v'' \quad -w'' \quad \phi'' \quad \phi' \rangle^T\end{aligned}\quad (22)$$

$\mathbf{S}$: 要素の接線剛性マトリックス

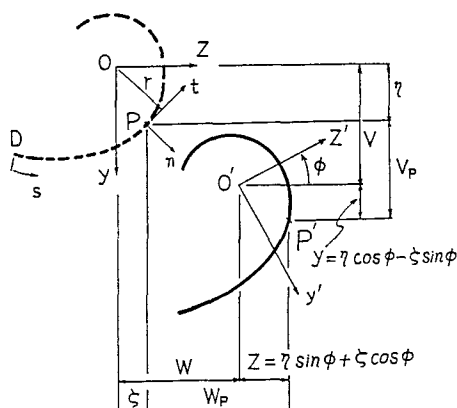


図2 断面の移動と回転の関係

なお、 x 軸方向の変位関数は通常用いられる x の多項式で、 u は x の一次式、 v, w, ϕ は x の三次式である。以上より板要素と同様に全ポテンシャルエネルギーの増分 π が計算できるので、 π の停留条件 $\delta \pi = 0$ より次の増分釣合い式が得られる。

$$p + (\bar{p} - \bar{f}) = [k_{ep} + k_g] \cdot u = k \cdot u \quad (23)$$

この時の k がはり要素の接線剛性マトリックスであり、 k_{ep} は弾塑性剛性マトリックス、 k_g は幾何学的剛性マトリックスを表す。 $(\bar{p} - \bar{f})$ は不釣合い力である。 D_b 、 k_{ep} 、 k_g および S のマトリックスの誘導の詳細は文献(14)に示してある。

さらに、式(14)、(23)を座標変換マトリックス T により変換し、これを全要素について集成すれば全体座標系での増分釣合い式が次式のように得られる。

$$K \cdot U = P + (\bar{P} - \bar{F}) \quad (24)$$

$$\text{ここに } \bar{F} = T \cdot f$$

$$K = T^T \cdot k \cdot T \quad (25)$$

T : 座標変換マトリックス

(4) 結合処理の方法¹⁵⁾

構造物の釣合い方程式は一般に次式で表される。

$$P = K \cdot U \quad (26)$$

P 、 U はそれぞれの外力、節点変位ベクトルである。今、多点拘束式は、

$$R \cdot U = 0 \quad (27)$$

で表される。 R は任意の拘束係数マトリックスである。また、節点変位ベクトル U は各々の拘束式により独立節点変位 U_n と従属節点変位 U_m に分けることができる。これらを式(27)に代入すると U_m は、

$$U_m = G_m \cdot U_n \quad (28)$$

と書ける。ここに G_m を結合マトリックスと呼び後に誘導する。

さて、式(26)は U_m と U_n より次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_n \\ P_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{n \ n} & K_{n \ m} \\ K_{n \ m}^T & K_{m \ m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ U_m \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$\sim$ は剛性マトリックスの縮小により置き換えられることを意味する。構造物に拘束を加えるということは釣合い方程式(29)に拘束力を加えることであるから、この拘束力は式(27)でわかるように拘束係数 R に比例すると考えられる。今、 U_m に加える拘束力を q_m とすると、 q_m による仕事式から式(29)は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{P}_n \\ P_m \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{n \ n} & K_{n \ m} & G_m^T \\ K_{n \ m}^T & K_{m \ m} & -I \\ G_m & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ U_m \\ q_m \end{Bmatrix} \quad (30)$$

I : 単位マトリックス

式(30)より U_m , q_m を消去すると次式を得る。

$$\{\tilde{P}_n + G_m^T \cdot P_m\} = [\tilde{K}_{nn} + K_{nm} \cdot G_m + G_m^T \cdot K_{nm}^T + G_m^T \cdot K_{mm} \cdot G_m] U_n \quad (31)$$

または,

$$P_n = K_{nn} \cdot U_n \quad (32)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} K_{nn} &= \tilde{K}_{nn} + K_{nm} \cdot G_m + G_m^T \cdot K_{nm}^T + G_m^T \cdot K_{mm} \cdot G_m \\ P_n &= \tilde{P}_n + G_m^T \cdot P_m \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

以上により、剛性マトリックス K の分割と式(28), (33)の演算で拘束処理ができる。今、図3の k 点の変位は $u_k, v_k, w_k, \theta_{xk}, \theta_{yk}, \theta_{zk}, \theta'_{xk}$ の計7つである。この場合板要素側の節点1から節点 n までのうち k 点のみが独立節点で、他の節点は従属節点となる。そこで他の従属節点変位は、結合点 k の変位を使って、曲げの平面保持およびねじりに対するそり変位等の適合条件より次のように表わすことができる。

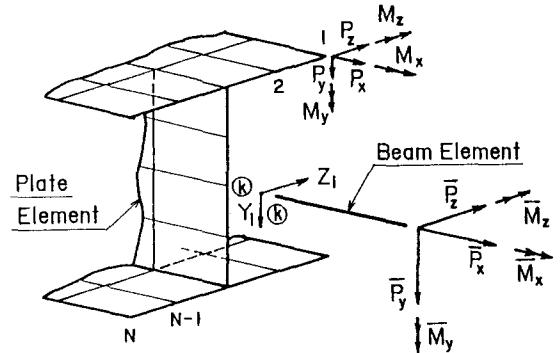


図3 板要素とはり要素の結合部

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_k - Y_i \cdot \theta_{zk} + Z_i \cdot \theta_{yk} - Y_i \cdot Z_i \cdot \theta'_{xk} \\ v_i &= v_k - Z_i \cdot \theta_{xk} \\ w_i &= w_k + Y_i \cdot \theta_{xk} \\ \theta_{xi} &= \theta_{xk} \\ \theta_{yi} &= \theta_{yk} - Y_i \cdot \theta'_{xk} \\ \theta_{zi} &= \theta_{zk} - Z_i \cdot \theta'_{xk} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし $i = 1 \sim n$ (k 点は除く)

Y_i, Z_i は結合点より各節点までの距離

式(34)を従属節点についてマトリクス表示すれば G_m が求まる。また、断面形状が不変であると言う仮定を用いているはり要素と変形する板要素を結合する場合の位置は構造物の変形状態等を十分考慮して決める。

(5) 不釣り合い力の算定⁶⁾

図4は、荷重と変位の関係を示したものである。平衡状態 M から i 回反復後の状態 i での真の節点力 $\bar{P}_i$ を求めるに際しては、変形状態 i における剛体変位を除去した変位 $\bar{U}_i$ を求め、さらに、見かけ上のひずみの反転が計算に入り込まないように常に平衡状態 M からの増分変位 U_m 及びひずみ増分を求める必要がある。よって平衡状態 M から変形状態 i までの真の応力増分は、この変位増分 $\bar{U}_m$ から求まることになる。

剛体変位の除去は、図5に示すように、変形前の三角形要素の節点123を変形後の節点1'2'3'の上に1点と1'点を一致させ、辺 $\bar{1}\bar{2}$ が $\bar{1}'\bar{2}'$ 上に載るように重ねる。つまり局所座標系の平行、回転移動により増分並進変位を求め、面内回転増分及び面外曲げ回転増分変位は、全体座標系における回転増分変位をもとに変形後の局所座標系との関係式から求めている。有限要素を細かく分割すれば、この剛体変位を除去した変位に対

しては微小変形理論が適用できると考えられるので、これより各要素の変形状態 i での増分節点力が求められる。そしてこの増分節点力を平衡状態 M での真の節点力に加えて全体座標系に変換し、全要素について集成することにより真の節点力 $\bar{F}_i$ が得られる。式 (24) で示すように、外荷重 $\bar{P}_{m+1}$ とこの節点力 $\bar{F}_i$ の差が不釣り合い力となる。

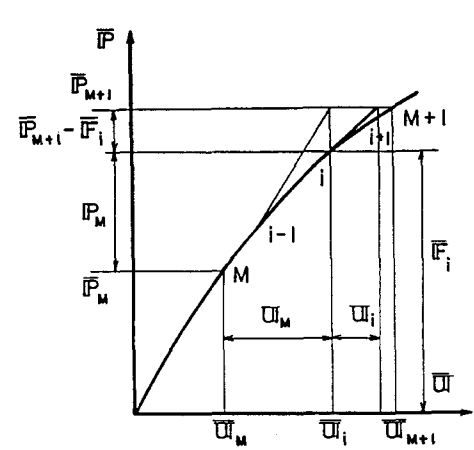


図 4 荷重－変位曲線

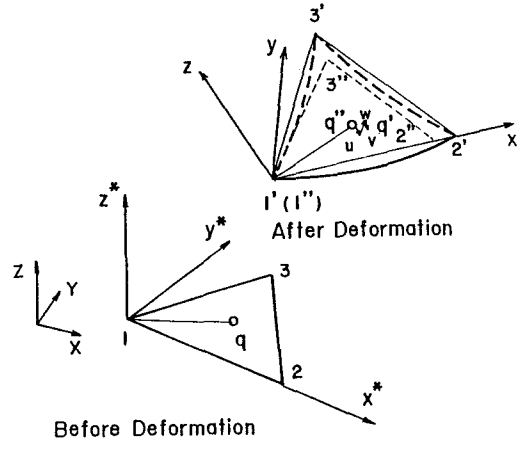


図 5 剛体変位の除去

次に結合部での不釣り合い力は、図 3 に示す例の場合板要素の各節点に節点力があるのに対し、はり要素では結合点 k で断面全体での各方向の断面力が計算されることになる。今、このはり要素の節点 k の節点力ベクトルを $\bar{F}_b$ とし、はり要素に対応する板要素側 k 点での節点力を $\bar{F}_p$ とすると、 $\bar{F}_p$ は結合マトリックス G_m を用いて次式で計算される。

$$\bar{F}_p = \bar{F}_{p\,k} + G_m \cdot \bar{F}_{p\,m} \tag{35}$$

ここに $\bar{F}_{p\,k}$ は節点 k の板要素の断面力
 $\bar{F}_{p\,m}$ は節点 k を除く板要素の断面力
 $(m = 1 \sim n)$

ゆえに、結合部での不釣り合い力は、結合部の真の節点力 $(\bar{F}_b + \bar{F}_p)$ と外荷重との差となる。

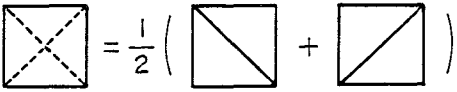


図 6 四辺形板要素

(6) 計算手順

解析において、初期たわみを有する板要素領域では板を平面三角形要素の集合体で近似し、残留応力は任意節点に外力を加え、初期たわみに変化を与えないよう各節点に生ずる不釣り合い力を消去する方法を用いる⁵⁾。また、板要素は、図 6 に示すようにすべて、三角形要素 4 つの剛性を平均した四辺形要素を使用している。さらに、図 7 のように板方向の塑性域の拡がり を考慮できるように、板厚方向に層割りし各層内では応力 σ 、応力－ひずみマトリックス D は直線分布するものとする。

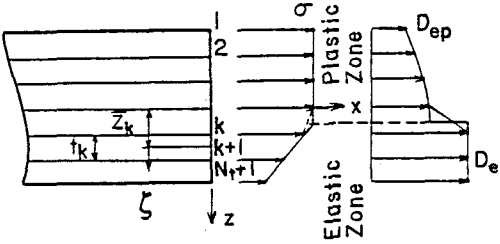


図 7 層 割 り

はり要素では塑性域の拡がりを追跡するため、材軸及び断面方向に分割している。¹⁴⁾ 計算は、まず式(24)の釣合い方程式を式(33)の多点拘束式で処理しておき、与えられた荷重増分に対してNewton-Raphson法を用いて、実用上十分な精度を持って平衡状態が満足されるまで反復計算を行なう。そして次の荷重段階に移行する。なお、各荷重段階における収束の判定は増分変位と全変位との比、及び不釣り合い力と節点力との比について検討している。また、釣り合い式を解く際には、問題により荷重制御あるいは変位制御の計算が可能である。反復収束の計算手順のフローチャートを図8に示す。

3. 数値計算例

はり要素に関する数値計算例は文献14)に示されており、その妥当性も検討されているので、ここでは、まず、板要素のみの場合の弾塑性解析を行った。続いて薄肉立体構造物を結合解析する場合の例としてH形断面のはり、柱について板要素の分割数、結合位置および精度について検討する。

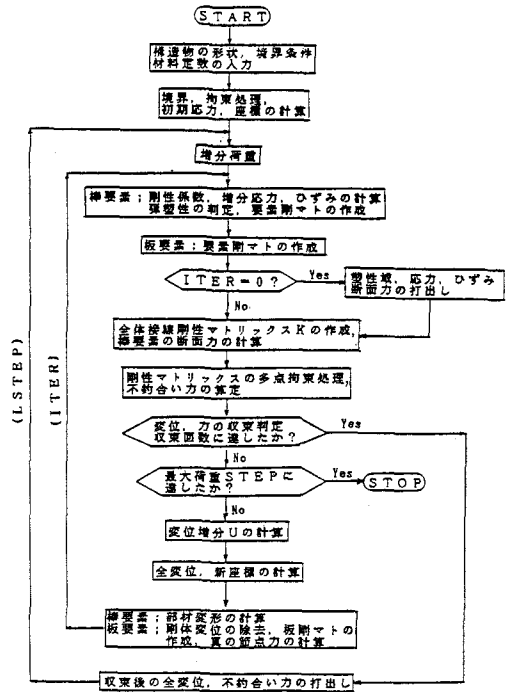


図8 フローチャート

(1) 面内圧縮を受ける正方形板の弾塑性大たわみ解析

初期たわみを有する周辺単純支持の正方形板が、一軸方向の面内圧縮を受ける場合の解析結果を図9に示す。非載荷辺の面内変位に対する境界条件は自由とし、板厚 t の1/10の初期たわみ w_0 を与えている。解析モデルは図9の挿入図に示すように、板の1/4対称部分を解析対象とし、長さ、幅方向とも6分割である。また、板厚方向の層分割は6分割である。圧縮外力は一樣変位の変位増分により与えている。

図9は荷重-変位曲線で、縦軸は平均軸方向応力度 σ を座屈応力 σ_{cr} で

無次元化し、横軸は板の中央の全たわみ(初期たわみ w_0 +付加たわみ w)を板厚 t で無次元化したものである。図中の実線はCoanの弾性問題としての厳密解²⁾で、破線は北田らの弾塑性解析の結果である⁶⁾。弾性域ではCoanの解とよく一致し、塑性域に入ると北田らの解析結果とよく一致していることがわかる。なお、解析では繰り返し回数が5~6回程度で十分収束している。

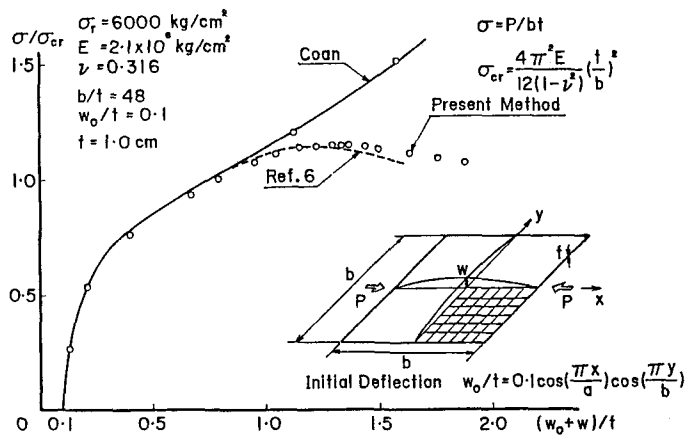


図9 平均応力度とたわみ曲線

(2) 片持梁のねじり問題

板要素とはり要素を結合して解析する場合、特に立体構造物を対象とする時には、板要素部分の軸方向や幅方向分割数及び両要素の結合点の長さ方向の位置が問題となる。そこで、H形断面を有する片持梁を例に、自由端にねじり荷重を載荷した場合の分割数と精度について調べた。

図10に示すようなモデルで、ウェブ幅方向に4、フランジ幅方向(NF)に2~6分割した。また軸方向の長さ方向(NX)は3~6分割とした。結合部の位置は文献(8)の結果より0.3Lとしている。図はねじり角の支間方向の変化を示しているが、分割数が増えるにつれて骨組解析の結果に近づいていることがわかる。つまり、結合部でねじり角、ねじり率の伝達がほぼうまくいっていることがわかる。またひずみ一定の要素を使用する関係上、ある程度は分割数を多くする必要があることもわかる。

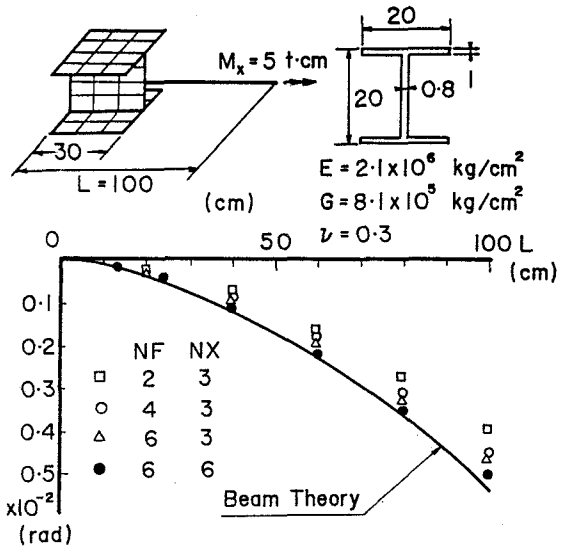


図 10 ねじり角の支間方向変化(ウェブ4分割)

(3) H形鋼柱の弾塑性解析

軸圧縮力を受けるH形断面鋼柱の弾塑性座屈解析を行なった結果を図11に示す。板要素の分割はウェブの幅方向に4分割、フランジの幅方向に6分割、材軸方向に5分割とし、結合位置は中央断面から10 cmで部材の1/2を解析対象とした。梁要素は軸方向に9分割し、断面内はフランジ、ウェブとも8分割、板厚方向に8分割している。また、材料定数は藤田らの実験結果²⁰⁾より得られた値を使用し図中に示した。解析では図中に示したような正弦波形の初期変位を与えている。

図11は荷重-変位曲線で、縦軸に軸力 P 、横軸には中央断面のウェブとフランジ交点の断面強軸方向のたわみ v である。図中には藤田らの実験結果及び吉田らの解析結果⁹⁾も示してある。本法による結果は吉田らの解析結果及び実験結果と比較してよく一致している。

また、部材の半分を板要素のみで解析するとすれば、本モデルの場合の分割方法では約9

倍の節点数が必要となり、本法の有効性が示されている。なお、荷重は部材端部の荷重点の軸方向圧縮変位を制御して行った。

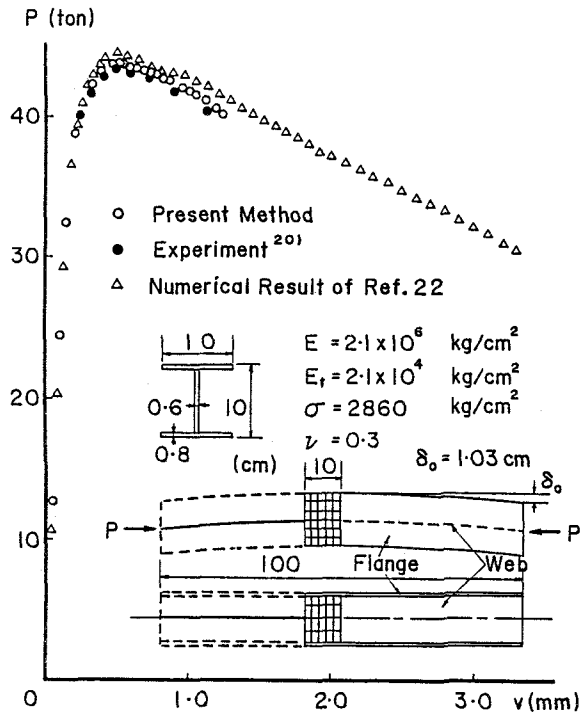


図 11 H形鋼柱の荷重-変位曲線

4. おわりに

本論文では、全ポテンシャルエネルギー増分の停留原理に基づいて、板要素及びはり要素それぞれの有限変位弾塑性解析法を誘導し、多点拘束処理の手法を用いて両要素を結合する解析方法を提示した。そして薄肉立体構造部材に適用して解析方法の妥当性、有効性についての検証を行った。

特に板要素は、通常の平面応力問題において存在しない面内回転剛性を導入することにより、板要素による立体構成する際において要素間の合理的な接合が可能となった。また、ここで用いている剛体変位除去の手法を立体問題に適用しても十分解析できることがわかった。さらに、板要素とはり要素の結合も多点拘束処理法でうまく処理ができ、変形の連続性も満足していると思われる。

残留応力及び初期たわみが存在する場合の有限変位弾塑性解析の結果より、弾塑性剛性の評価の妥当性が認められた。しかしながら、板要素としてひずみ一定の三角形要素を使用するので定式化が簡略できる反面、板面内の曲げを受ける場合は、幅、軸方向の分割数や分割方法に結果が影響されると考えられるので、十分注意する必要がある。

本法の特徴は、解くべき方程式の次数を増加させずに大規模構造物の全体耐荷力挙動を局部座屈を考慮した上で解析可能な点にある。本論文により上記問題に対する本法の可能性が確認されたので、今後はこの結合解析法を用いて、梁-柱の連成座屈問題等の複雑な耐荷力挙動を解明していく予定である。

なお、本論文の計算はすべて九州大学大型計算機センターのFACOM M-382によった。また、本研究の一部は昭和59年度文部省科学研究費補助金（一般研究C）の交付を受けた。ここに記して謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，1980年2月。
- 2) Coan, K.M.: Large Deflection Theory of Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., Vol. 18, Trans. ASME, Vol. 73, 1951, pp.143-151.
- 3) 川井忠彦・吉村信敏：有限要素法による平板の大たわみ問題の解析，生産研究，20巻，8号，1968.
- 4) Murray, D.W. and Willson, E.L.: Finite-Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAAJ, Vol. 7, No. 10, Oct., 1969.
- 5) 大坪英臣：平板の大たわみ問題の一解析法 — 特に平板の圧縮最終強度について —，日本造船学会論文集，第130号，1971年12月。
- 6) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第244号，1975年12月，pp.1-14.
- 7) 上田幸雄・安川 度・矢尾哲也・池上 博・大南亮一：圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究（第1報），日本造船学会論文報告集，第137号，1975年6月，pp.210-221，（第2報），第140号，1976年12月，pp.205-209.
- 8) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法，土木学会論文報告集，第288号，1979年8月，pp.41-55.
- 9) 鈴木敏郎・金子洋文：有限要素法による部材構成板要素の座屈及び座屈後挙動の大変形解析，日本建築学会論文報告集，第316号，1982年6月，pp.9-17.
- 10) 鈴木敏郎・金子洋文：鋼構造部材構成板要素相互の弾塑性連成局部座屈挙動の解析法，日本建築学会論文報告集，第323号，1983年1月，pp.23-31.

- 11) 結城 結曠・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，第224号，1974年 4月，pp.67-78.
- 12) Rajasekaran, S. and Murray, D.W. : Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp.1025-1041.
- 13) Epstein, M., Nixon, D. and Murray, D.W. : Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST5, May, 1978, pp.841-853.
- 14) Sakimoto, T., Yamao, T., Kikuchi, R. and Sakata, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE, No.362/(I-4), Oct., 1985.
- 15) Macneal, R.H. : The Nastran Theory of Manual, N.A.S.A., April, 1972.
- 16) Eringen, A.C. : Linear Theory of Micropolar Elasticity, J. Math. Mech., Vol. 15, No. 6, 1966, pp.909-923.
- 17) 山田嘉明：塑性力学，日刊工業新聞社，1960年.
- 18) 山尾敏孝・堀田守男・小畑克己・崎元達郎：板要素と棒要素の結合による薄肉構造解析，第38回土木学会全国大会講演概要集，I-78，1983年 9月.
- 19) Bisshop, K.E. and Drucker, D.C. : Large Deflection of Cantilever Beams, Quart. of App. Math. Vol.Ⅲ, No. 3, 1945, pp.272-275.
- 20) 藤田 譲・吉田宏一郎・高沢 誠：不整量を有する構造物の強度について（その1）－初期撓みを有する柱の座屈強度－，日本造船学会論文集，第132号，1973年，pp.299-306.
- 21) 山田嘉明：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2-A，培風館，1972年.
- 22) 松田 隆・吉田 裕・増田陳紀：薄肉立体構造の弾塑性大変形解析，第32回土木学会全国大会講演概要集，I-100，1977年10月.

(1986年 1月24日 受付)