

薄肉開断面部材の断面変形を考慮した 有限変位理論と弾性安定問題への応用

FINITE DISPLACEMENT THEORY OF THIN-WALLED OPEN SECTION MEMBER CONSIDERING
CROSS-SECTIONAL DISTORTION AND ITS APPLICATION TO PROBLEMS OF ELASTIC STABILITY

彦 坂 熙*・高 海 克 彦**・丸 山 義 一***

By Hiroshi HIKOSAKA, Katsuhiko TAKAMI and Yoshikazu MARUYAMA

Considering distortion of the cross-section, non-linear expressions for the strains occurring in thin-walled members of open section when subjected to finite displacements are derived. The governing equations thus obtained are used to investigate a combination of flexural, torsional and local instability of the members. It is shown that the influence of cross-sectional distortion is automatically evaluated in the analysis of instability, and that closed form solutions can be obtained for the elastic critical loads of beams and columns subjected to simple loading and boundary conditions. The analysis is applicable for thin-walled members of arbitrary cross-section and for all loading conditions.

1. 緒 言

薄肉直線棒部材の力学的挙動に関する研究は、V.Z.Vlasov¹⁾による曲げねじり理論の体系化以降も、主として座屈問題を対象とする有限変位理論の展開が多くの研究者により行われてきた。理論展開の出発点で部材の断面形状不変を根本仮定として用いるそれらの研究の中で、西野ら²⁾の導いた支配方程式は、有限変位の棒理論として一般性の高いものと評価されている。

他方、薄肉断面部材の断面形状の変化を考慮する研究が、GoodierとBarton³⁾を始めとして、2軸対称I形断面ばりの横座屈に及ぼすウェブの変形の影響を主対象に行われてきた。^{4)~6)}この問題は、一般の構造用鋼部材において板要素の変形を考慮に入れた全体座屈の評価に関わるものであり、また近年使用例の増加している各種断面の軽量形鋼の耐荷力評価も、その適用対象となる。任意形状薄肉断面の部材に関するこの種の問題を有限要素法や有限帯板法⁷⁾により解析することは可能であるが、既往の棒理論の拡張による取扱いが可能となれば、その実用的価値は高いと思われる。

薄肉開断面部材の断面変形に関しては、微小変位理論による基礎方程式を導いた高橋ら^{8, 9)}の先駆的研究がある。また薄木ら¹⁰⁾は、薄肉折板断面ばりを構成する板要素に対して断面変形を考慮した2次の変位場を一般的な形で求めているが、それから導かれる座屈支配方程式は2軸対称のI形断面ばりに関する特例の

* 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

** 工修 九州大学助手 工学部土木工学科 (同 上)

*** 工修 九州大学大学院 土木工学専攻博士課程 (同 上)

みしか提示されていない。

本論文は、任意形薄肉開断面をもつ部材が任意荷重を受ける場合について、断面形状の変化を考慮した有限変位理論の支配方程式を導き、1軸対称および2軸対称断面部材の弾性安定問題への応用例を示したものである。ただし、実際構造物への適用を考えると、大きな変位を扱うことはまれであるゆえ、ここでは変位の3次以上の高次項を無視した有限変位式を取り扱う。なお、本論では残留応力および初期たわみ等の初期不整の影響は考慮しないものとする。

2. 断面変形の定義および解析上の仮定

図-1のようにN枚の薄板要素からなる多角形開断面部材を考え、図心Cを原点とする断面主軸x, yと図心を連ねる部材軸zからなる右手系直交座標を定める。

(x, y)座標とは別に、部材断面上の一点Dを原点とし板厚中心線に一致する曲線座標sと、その法線方向座標nを定め、板厚tはsの関数とする。各板要素の接合線を節線、また接合線と部材断面との交点を1, 2, ..., N-1を節点と呼ぶ。

薄肉開断面部材の断面変形は、一般に各節点のx-y面内相対変位と板要素の面外曲げとを伴う変形であるが、板要素のs方向面内伸縮は無視できるものとする。このとき、図-2のように節点iにおいて接合される板要素が2枚の場合には、板要素i+1の板厚中心線i-(i+1)に対して板要素iの中心線(i-1)-iが反時計回りになす相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$)で断面変形を定義する。もちろん、各板要素の実際の接合点以外に、板要素の任意点に節点を設けて、断面変形の自由度を増すことができる。さらに、本理論は1節点で3枚以上の板要素が分岐する任意の開断面部材に適用可能であり、その場合の1節点における断面変形の自由度は〔分岐する板要素数-1〕となる。他方、たとえば図-3のI形断面部材において、フランジの板としての変形を考えなくてよい断面を取り扱う場合には、フランジ-ウェブ接合点の断面変形の自由度を1とすることができる。上記何れの場合にも、N枚の薄板要素からなる開断面部材の断面変形の自由度は(N-1)である。

本論においては、断面形状の変化を考慮する以外は、薄肉開断面部材の有限変位理論で従来から用いられているものと同じ次の仮定を用いる。すなわち

- 1) 断面を板厚中心線で代表させる。
- 2) 部材軸方向変位の微係数の2次の項は無視できる。
- 3) St. Venant のねじりに伴うせん断ひずみ以外のすべてのせん断ひずみは無視できる。

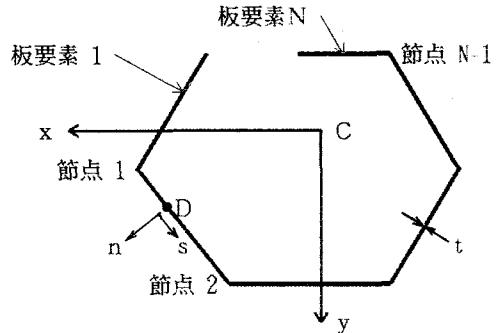


図-1 薄肉開断面部材と座標系

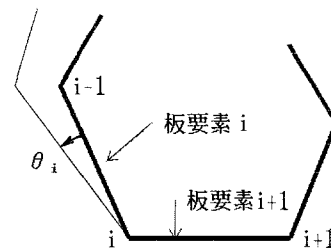


図-2 断面変形 θ_i の定義

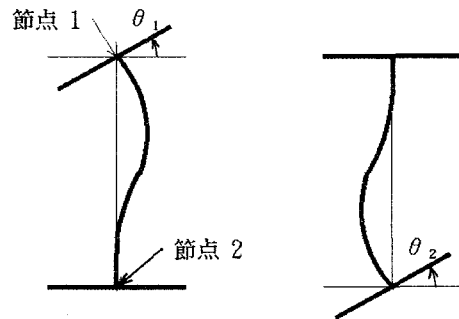


図-3 I形断面部材の2自由度断面変形

3. 断面変形を考慮した変位場

上に定義した相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-1$) のみによる板要素の任意点 $P(x, y)$ の x, y 方向変位成分 u_0, v_0 は、節点 i の座標を (x_i, y_i) 、その s 座標を s_i とするとき、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -\sum_{i=1}^{N-1} \{(y-y_i) \sin \theta_i + (x-x_i)(1-\cos \theta_i)\} \mu_i \\ v_0 &= \sum_{i=1}^{N-1} \{(x-x_i) \sin \theta_i - (y-y_i)(1-\cos \theta_i)\} \mu_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 μ_i は次式で定義される s の単位ステップ関数である。

$$\mu_i(s) = \begin{cases} 1 & (s \leq s_i) \\ 0 & (s > s_i) \end{cases}$$

以下、式 (1) の断面変形を生じた部材について、変形前の直交座標 x, y, z 方向変位成分 u, v, w および変形前の直交曲線座標 n, s 方向変位成分 ξ, η を導くことにより、本論の変位場を仮定する。いま、断面上の一点 $S(x_s, y_s)$ の変位成分を u_s, v_s 、点 S を通る部材軸まわりの断面回転角を ϕ とすれば、幾何学的考察により、任意点 $P(x, y)$ の変位成分 u, v は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y-y_s) \sin \phi - (x-x_s)(1-\cos \phi) + u_0 \cos \phi - v_0 \sin \phi \\ v &= v_s + (x-x_s) \sin \phi - (y-y_s)(1-\cos \phi) + u_0 \sin \phi + v_0 \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式 (1) および (2) における $\sin \phi, \cos \phi, \sin \theta_i, \cos \theta_i$ をテーラー展開のうえ ϕ, θ_i の 3 次以上の項を無視すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y-y_s) \phi - \frac{1}{2} (x-x_s) \phi^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \{(x-x_i) \left(\phi + \frac{\theta_i}{2}\right) + (y-y_i)\} \theta_i \mu_i \\ v &= v_s + (x-x_s) \phi - \frac{1}{2} (y-y_s) \phi^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \{(x-x_i) - (y-y_i) \left(\phi + \frac{\theta_i}{2}\right)\} \theta_i \mu_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、次の方向余弦を定義する。

$$\ell = \cos(x, n) = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad m = \cos(y, n) = \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (4)$$

式 (4) を用いて、 u, v を n, s 方向の変位成分 ξ, η に変換すれば、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u_s \ell + v_s m - h_s \phi - \frac{1}{2} h_n \phi^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \{r_{si} + r_{ni} \left(\phi + \frac{\theta_i}{2}\right)\} \theta_i \mu_i \\ \eta &= -u_s m + v_s \ell + h_n \phi - \frac{1}{2} h_s \phi^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \{r_{ni} - r_{si} \left(\phi + \frac{\theta_i}{2}\right)\} \theta_i \mu_i \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} h_n &= (x-x_s) \ell + (y-y_s) m \\ h_s &= -(x-x_s) m + (y-y_s) \ell \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{ni} &= (x-x_i) \ell + (y-y_i) m \\ r_{si} &= -(x-x_i) m + (y-y_i) \ell \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

h_n, h_s はせん断中心 S から点 P に引いた位置ベクトルの n, s 方向成分、また r_{ni}, r_{si} は節点 i から点 P に引いた位置ベクトルの n, s 方向成分を表わす (図-4)。

(s, n, z) 座標に関する板厚中心面のせん断ひずみ γ_{zs}^*

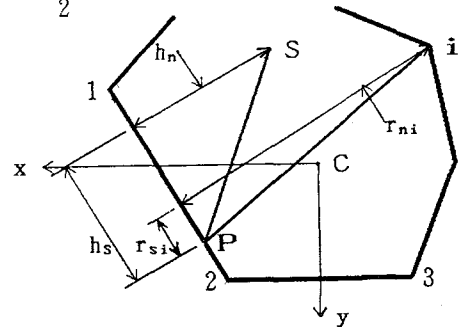


図-4 断面の幾何学的特性

は、 w の微係数の 2 次項および他の変位成分の 3 次以上の項を無視するとき、次のように求められる。

$$\begin{aligned}\gamma_{zs}^* &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial w}{\partial s} - u'_s m + v'_s \ell + h_n \phi' - (u'_s \ell + v'_s m) \phi \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i [r_{ni} \theta'_i - \theta_i \{u'_s \ell + v'_s m - (h_s - r_{si}) \phi' - \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{N-1} r_{sj} \theta'_j \mu_j\}] \quad (8)\end{aligned}$$

ここに、 $()'$ は z に関する微係数を表わす。

薄肉開断面部材における慣用に従い、 $\gamma_{zs}^* = 0$ と置いて上式を s で積分すれば、 w が次のように求められる。

$$\begin{aligned}w &= w_c - (u'_s + v'_s \phi) x - (v'_s - u'_s \phi) y + \omega(s) \phi' + \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i(s) \theta'_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \theta_i [\{ (y - y_i) \mu_i + y_i \mu_{ic} \} u'_s - \{ (x - x_i) \mu_i + x_i \mu_{ic} \} v'_s + \lambda_i(s) \phi' + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_{ji}(s) \theta'_j] \quad (9)\end{aligned}$$

ここに、図心 C の w の値を w_c 、 s 座標値を s_c 、 $\mu_i(s_c) = \mu_{ic}$ とし、次の断面積分関数を定義した。

$$\left. \begin{aligned}\omega(s) &= \int_s^{s_c} h_n ds, & \psi_i(s) &= \int_s^{s_c} r_{ni} \mu_i ds \\ \lambda_i(s) &= \int_s^{s_c} (h_s - r_{si}) \mu_i ds, & \kappa_{ij}(s) &= \int_s^{s_c} r_{si} \mu_i \mu_j ds\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、関数 $\kappa_{ij}(s)$ は $i \neq j$ の場合にのみ定義され、 $i = j$ のとき $\kappa_{ij}(s) = 0$ とする。なお、 s 座標の原点 D とせん断中心 S の位置は、周知のように次の断面積分式を満足するよう定められる。

$$\int_A \omega dA = 0, \quad \int_A \omega x dA = 0, \quad \int_A \omega y dA = 0 \quad (11)$$

4. 部材のひずみおよび応力

(1) 部材軸方向直ひずみと直応力

z 方向直ひずみは、 w の微係数の 2 次項を無視するとき、次のように求められる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &= w'_c + \frac{1}{2} \{ (u'_s)^2 + (v'_s)^2 \} + (y_s u'_s - x_s v'_s) \phi' - x (u'_s + v'_s \phi) - y (v'_s - u'_s \phi) + \omega \phi'' + \frac{1}{2} r_p^2 (\phi')^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \psi_i \theta''_i + \theta_i [\{ (y - y_i) \mu_i + y_i \mu_{ic} \} u''_s - \{ (x - x_i) \mu_i + x_i \mu_{ic} \} v''_s + \lambda_i \phi''] \right. \\ &\quad \left. + \theta'_i [y_i \mu_{ic} u'_s - x_i \mu_{ic} v'_s + \{ (h_n r_{ni} + h_s r_{si}) \mu_i + \lambda_i \} \phi'] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N-1} [\kappa_{ji} \theta_i \theta''_j + \left(\frac{1}{2} r_{ij} \mu_i \mu_j + \kappa_{ji} \right) \theta'_i \theta'_j] \right\} \quad (12)\end{aligned}$$

ただし、 $r_p^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2$ 、 $r_{ij} = (x - x_i)(x - x_j) + (y - y_i)(y - y_j)$

ε_z に対応する直応力は、ヤング係数を E として

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \quad (13)$$

(2) セン断ひずみとせん断応力

St.Venant のねじりによるせん断ひずみは、次式で与えられる。

$$\gamma_{zs} = 2n(\phi' + \sum_{i=1}^{N-1} \mu_i \theta_i') \quad (14)$$

γ_{zs} に対応するせん断応力は、せん断弾性係数を G として

$$\tau_{zs} = G \gamma_{zs} \quad (15)$$

(3) 板要素の面外曲げモーメントと曲げ応力

断面剛を仮定する既往の棒理論では、 z 方向の直応力 σ_z に比べて、 z 軸に直交する方向の直応力は無視される。これに対し、断面変形を取り扱う本論では、相対回転角 θ_i に起因する板要素の単位幅 $dz=1$ 当たりの面外曲げモーメント M_s と曲げ応力 σ_s を考慮する。 M_s と θ_i の関係は次の線形式で表わされる。

$$M_s = \sum_{i=1}^{N-1} M_i \theta_i \quad (16)$$

ここに、 M_i は単位の断面変形 $\theta_i=1$ のみにより生じる面外曲げモーメントである。すなわち、部材の任意断面 z において切り出される単位幅 $dz=1$ の多角形フレームに関し、部材 $1 \sim i$ の部材回転角を全て -1 、部材 $i+1 \sim N$ の部材回転角を 0 とした変形状態に対して、つり合い条件式を解くことにより M_i が決定される。 M_i の算定に必要な板要素の面外曲げ剛性は EI_s ($I_s = t^3/12$) で与えられる。

5. つり合い方程式

長さ L の部材に作用する変形前の x, y, z 方向への単位体積当りの分布外力を p_x, p_y, p_z 、また部材両端断面 ($z=0, L$) に作用する変形前の x, y, z 方向への単位面積当りの外力を $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ とする。これらの外力を受ける部材のつり合い条件は、仮想変位の原理より次式で表わされる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_A (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{zs} \delta \gamma_{zs} + \sigma_s \delta \varepsilon_s) dA dz \\ &= \int_0^L \int_A (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dA dz + \left[n_z \int_A (\bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w) dA \right]_0^L \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 δ は変分記号、 $\int_A () dA$ は断面全体についての面積積分、また $n_z = \begin{cases} -1 & (z=0) \\ 1 & (z=L) \end{cases}$

式(17)の左辺の $\delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{zs}$ にはそれぞれ式(12)および(14)のひずみの変分を、また式(17)の右辺の $\delta u, \delta v, \delta w$ には式(3)および(9)の変位の変分を代入する。なお、式(17)の左辺第3項は断面変形に伴う板要素の面外曲げの仮想仕事を表わし、式(16)を用いて次のように算定される。

$$\int_A \sigma_s \delta \varepsilon_s dA = \int_s \frac{M_s \delta M_s}{EI_s} ds = \sum_{i=1}^{N-1} F_{si} \delta \theta_i \quad (18)_a$$

ここに、

$$F_{si} = \sum_{j=1}^{N-1} f_{ij} \theta_j, \quad f_{ij} = \int_s \frac{M_i M_j}{EI_s} ds \quad (18)_b$$

ただし、 $\int_s () ds$ は断面全体についての s による積分を表わす。

これらの演算により式(17)を部分積分すれば、任意の仮想変位 $\delta u_s, \delta v_s, \delta w_s, \delta \phi, \delta \theta_i$ に対して式(17)が成立するための必要十分条件として、つり合い方程式と部材端 $z=0, L$ における幾何学的および力学的境界条件が導かれる。ここでは境界条件を割愛し、つり合いの微分方程式のみを記せば、次の通りである。

$$\left. \begin{aligned}
N' + q_z &= 0 \\
-(M_y - M_x \phi)'' - \{N(u'_s + y_s \phi')\}' + \sum_{i=1}^{N-1} \{(M_{xi} \theta_i)'' + (m_{xi} \theta_i)'\} + (m_y + m_x \phi)' - q_x &= 0 \\
-(M_x + M_y \phi)'' - \{N(v'_s - x_s \phi')\}' - \sum_{i=1}^{N-1} \{(M_{yi} \theta_i)'' - (m_{yi} \theta_i)'\} - (m_x - m_y \phi)' - q_y &= 0 \\
M''_w - T'_s - \{N(y_s u'_s - x_s v'_s)\}' + M_x u''_s - M_y v''_s - (K \phi')' \\
+ \sum_{i=1}^{N-1} \{(M'_{Li} \theta_i)' - (L_i \theta'_i)' + (m_{Li} \theta_i)' + m_{xyi} \theta_i\} - m_x u'_s - m_y v'_s + m_{xy} \phi + m'_w - m_z &= 0 \\
M''_{wi} - T'_{si} + F_{si} + M_{xi} u''_s - M_{yi} v''_s - (L_i \phi')' - M'_{Li} \phi' - m_{xi} u'_s - m_{yi} v'_s + m_{xyi} (\phi + \theta_i) \\
- m_{Li} \phi' + m'_{wi} - m_{zi} + \sum_{j=1}^{N-1} \{-(K_{ij} \theta'_j)' - M'_{ji} \theta'_j + (M'_{ij} \theta_j)' - m_{ji} \theta'_j + (m_{ij} \theta_j)'\} &= 0 \\
(i = 1, 2, \dots, N-1)
\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
N &= \int_A \sigma_z dA, & M_x &= \int_A \sigma_z y dA, & M_y &= \int_A \sigma_z x dA, & M_w &= \int_A \sigma_z \omega dA \\
T_s &= \int_A \tau_{zs} (2n) dA, & K &= \int_A \sigma_z r_p^2 dA
\end{aligned} \right\} \quad (20)_a$$

$$\left. \begin{aligned}
M_{xi} &= \int_A \sigma_z (y - y_i) \mu_i dA, & M_{yi} &= \int_A \sigma_z (x - x_i) \mu_i dA, & M_{wi} &= \int_A \sigma_z \phi_i dA \\
T_{si} &= \int_A \tau_{zs} (2n) \mu_i dA, & L_i &= \int_A \sigma_z (h_n r_{ni} + h_s r_{si}) \mu_i dA, & M_{Li} &= \int_A \sigma_z \lambda_i dA \\
K_{ij} &= \int_A \sigma_z r_{ij} \mu_i \mu_j dA, & M_{ij} &= \int_A \sigma_z \kappa_{ij} dA
\end{aligned} \right\} \quad (20)_b$$

$$\left. \begin{aligned}
q_x &= \int_A p_x dA, & q_y &= \int_A p_y dA, & q_z &= \int_A p_z dA \\
m_x &= \int_A p_z y dA, & m_y &= - \int_A p_z x dA, & m_z &= \int_A \{p_y (x - x_s) - p_x (y - y_s)\} dA \\
m_w &= \int_A p_z \omega dA, & m_{xy} &= \int_A \{p_x (x - x_s) + p_y (y - y_s)\} dA
\end{aligned} \right\} \quad (21)_a$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{xi} &= \int_A p_z (y - y_i) \mu_i dA, & m_{yi} &= - \int_A p_z (x - x_i) \mu_i dA \\
m_{zi} &= \int_A \{p_y (x - x_i) - p_x (y - y_i)\} \mu_i dA, & m_{wi} &= \int_A p_z \phi_i dA \\
m_{xyi} &= \int_A \{p_x (x - x_i) + p_y (y - y_i)\} \mu_i dA, & m_{Li} &= \int_A p_z \lambda_i dA, & m_{ij} &= \int_A p_z \kappa_{ij} dA
\end{aligned} \right\} \quad (21)_b$$

6. 断面変形を考慮した微小変位理論

前節 5 までの誘導諸式において、変位の 2 次以上の項をすべて無視すれば、薄肉開断面部材の断面変形を考慮した微小変位理論となる。この場合、式(19)は次のように簡単に表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
N' + q_z &= 0 \\
-M''_y + m'_y - q_x &= 0 \\
-M''_x - m'_x - q_y &= 0 \\
M''_w - T'_s + m'_w - m_z &= 0 \\
M''_{wi} - T'_{si} + F_{si} + m'_{wi} - m_{zi} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad (22)$$

上式中の F_{si} は式(18)で与えられ、また他の断面力と変位の関係は、 x, y が主軸に選ばれていること、および式(11)を考慮すれば、それぞれ次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N &= EA_w' + \sum_{j=1}^{N-1} EH_{jo} \theta_j'' \\ M_x &= -EI_x v_s'' + \sum_{j=1}^{N-1} EH_{jx} \theta_j'' \\ M_y &= -EI_y u_s'' + \sum_{j=1}^{N-1} EH_{jy} \theta_j'' \\ M_w &= EI_w \phi'' + \sum_{j=1}^{N-1} EH_{jw} \theta_j'' \\ T_s &= GJ \phi' + \sum_{j=1}^{N-1} GJ_j \theta_j' \\ M_{wi} &= E \left\{ H_{io} w_c' - H_{iy} u_s'' - H_{ix} v_s'' + H_{iw} \phi'' + \sum_{j=1}^{N-1} H_{ij} \theta_j'' \right\} \\ T_{si} &= GJ_i \phi' + \sum_{j=1}^{N-1} GJ_{ij} \theta_j' \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_w = \int_A \omega^2 dA, \quad J = \int_S (t^3/3) ds \\ H_{io} &= \int_A \phi_i dA, \quad H_{ix} = \int_A \phi_i y dA, \quad H_{iy} = \int_A \phi_i x dA, \quad H_{iw} = \int_A \phi_i \omega dA \\ J_i &= \int_S (t^3/3) \mu_i ds, \quad J_{ij} = \int_S (t^3/3) \mu_i \mu_j ds, \quad H_{ij} = \int_A \phi_i \phi_j dA \end{aligned} \right\}$$

7. 弾性安定問題への応用

7.1 二軸対称 I 形断面ばりの横倒れ座屈とフランジの局部座屈

与えられた荷重のもとで線形微小変位理論により求められる座屈前応力 $\sigma_z^{(0)}$ を用いて、有限変位理論のつり合い方程式(19)における非線形項(断面力と変位の積)の断面力を算定のうえ代入し、式(19)の残りの線形項には式(23)の断面力を代入することにより、薄肉開断面部材の断面変形を考慮した弾性安定問題に適用すべき線形化有限変位理論のつり合い方程式が得られる。

いま、図-5に示す二軸対称 I 形断面ばりが、座屈前の状態で x 軸まわりの一定曲げモーメント $M_x^{(0)} = M_0$ を受ける場合を考える。この断面形と荷重状態に対しては

$$\left. \begin{aligned} H_{io} &= H_{iy} = H_{ix} = H_{iw} = H_{ij} = 0 \\ K^{(0)} &= M_{xi}^{(0)} = M_{yi}^{(0)} = 0 \quad (i=1, 2) \end{aligned} \right\}$$

であるゆえ、式(19)を線形化したつり合い方程式は次のように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} EI_y u_s'''' + M_0 \phi'' &= 0 \\ EI_w \phi'''' - GJ \phi'' + M_0 u_s'' - (GJ_1 - \beta M_0) \theta_1'' - (GJ_1 + \beta M_0) \theta_2'' &= 0 \\ -(GJ_1 - \beta M_0) (\phi + \theta_1)'' + f_{11} \theta_1 + f_{12} \theta_2 &= 0 \\ -(GJ_1 + \beta M_0) (\phi + \theta_2)'' + f_{21} \theta_1 + f_{22} \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\text{ここに、} \quad f_{11} = f_{22} = \frac{4EI_s}{h}, \quad f_{12} = f_{21} = \frac{2EI_s}{h}, \quad J_1 = \frac{bt_f^3}{3}, \quad \beta = \frac{I_y}{4I_x} h$$

上式は、深沢ら⁶⁾が導いた I 形断面ばりのつり合い方程式において、フランジ単独のそりねじり剛性を無視したものと一致する。

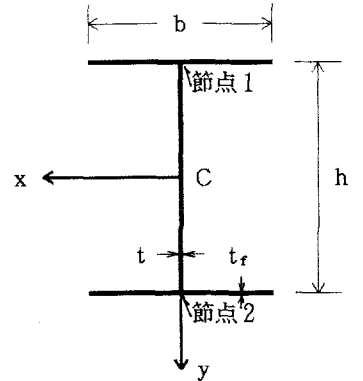


図-5 I 形断面の諸元

ここに、
$$I_{ij} = I_{ij0} - \frac{H_{i0}H_{j0}}{A} - \frac{H_{ix}H_{jx}}{I_x} - \frac{H_{iy}H_{jy}}{I_y} - \frac{H_{iw}H_{jw}}{I_w}$$

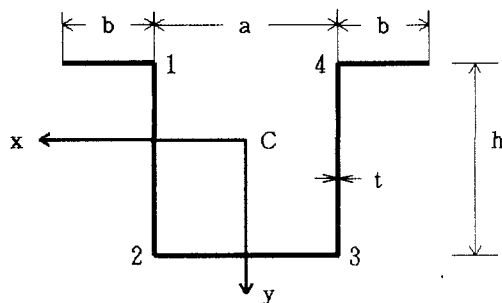


図-8 ハット形断面の諸元

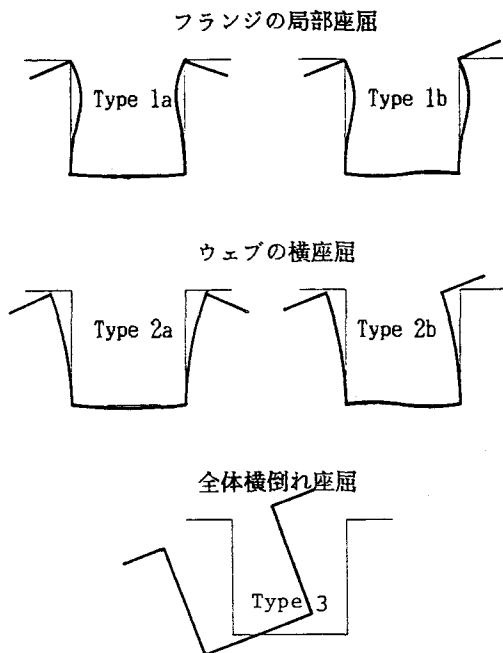


図-9 ハット形断面部材の座屈モード

この部材の対称および逆対称断面変形を伴う基本座屈モードとして図-9の Type 1 と Type 2 があり、それぞれ、圧縮フランジの局部座屈およびウェブの横座屈と仮称する。これらが Type 3 の全体横倒れ座屈に連成して種々の座屈モードを生じることになる。

図-10～12は、両端単純支持の境界条件のもとで、モーメント M_0 の最小固有値 M_{cr} 、または M_{cr} に対応する上フランジの曲げ応力 σ_{cr} の値に及ぼす、部材寸法パラメーターの影響を両対数グラフで示したものである。図-10では、座屈次数を $n=1$ のみに限り、図

中に記す断面寸法の部材の対称および逆対称断面変形を伴う座屈応力 σ_{cr} を、ウェブ高に対するスパンの比 L/h の関数としてプロットした。本論の手法によれば、 L/h の値とともに断面変形の影響が異なるため座屈モードがこのように複雑に変化するハット形断面部材の弾性安定挙動を、比較的少ない自由度で解析できる。次数 n が増加すると、図-11に示す通り Type 1 の局部座屈および Type 2 のウェブ横座屈に対する

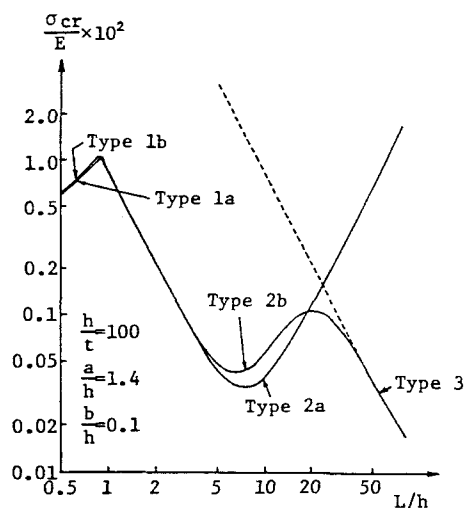


図-10 ハット形断面・ $\sigma_{cr}-(L/h)$ 曲線 ($n=1$)

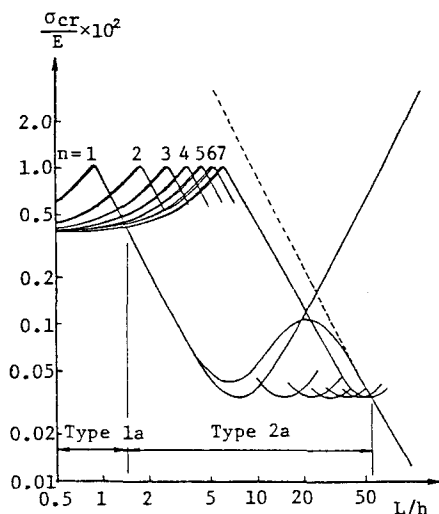


図-11 $\sigma_{cr}-(L/h)$ 曲線 ($n=1\sim7$)

σ_{cr} は、 $n=1$ の σ_{cr} の最小値にそれぞれ漸近している。
この例では、 $L/h < 1.5$ ではフランジの局部座屈、
 $1.5 < L/h < 54$ ではウェブの横座屈が支配的であり、
全体横倒れ座屈は $54 < L/h$ でなければ生じない。図
-12は、 L/h を15に固定し、ウェブ高に対する圧縮フ
ランジ幅の比 b/h を横軸にとり、 M_{cr} の値をプロット
したものである。図中の右上がりの曲線部は Type 2a、
右下がりの曲線部は Type 1a にそれぞれ対応する M_{cr}
を表わす。

8. 結 語

任意形状の薄肉開断面を有する直線部材が任意荷重を
受ける場合を対象として、その断面形状の変化を考慮し
た有限変位理論の支配方程式を導いた。薄肉開断面部材
の力学的挙動を扱った既往の諸研究、すなわち、断面剛
を仮定する微小変位曲げねじり理論、断面変形を考慮す
る微小変位理論、断面剛を仮定のうえ変位の2次項まで
を考える有限変位理論およびウェブの変形を考慮するI形断面部材の弾性安定理論などは、何れもここで得
られた支配方程式の特例となることが確かめられ、本研究が薄肉開断面部材の棒理論の拡張に多少の貢献を
なしうるものと考えられる。

本論によれば、従来は有限要素法や有限帯板法の適用対象であった板要素の面外曲げ変形または局部座屈
を考慮に入れた部材の全体座屈の問題が、一次元場で解析可能となり、中心軸圧縮や等曲げを受ける単純支
持部材のように比較的簡単な弾性安定問題は、閉じた形で固有値の解析解を得ることも可能である。ただし、
本論文は部材の幾何学的非線形性のみを考慮した弾性理論であるため、今後、実用部材に不可避の残留応力
や初期たわみを考慮した非弾性耐力解析にまで発展させる必要がある。その場合も、棒理論の拡張により
部材の断面変形問題における変形の自由度の著しい低減を可能にする本論の手法は、実用的価値を有するも
のと考えられる。

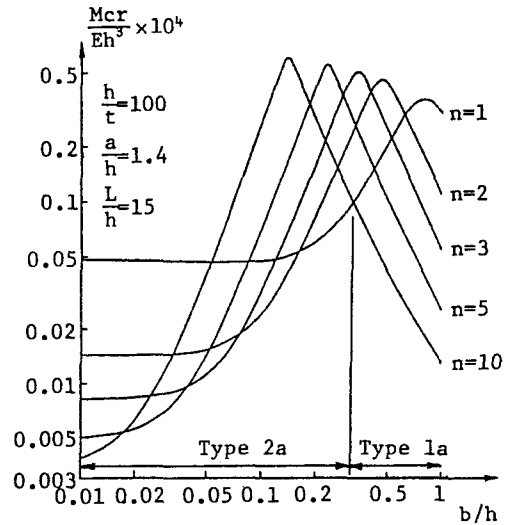


図-12 ハット形断面・ $M_{cr}-(b/h)$ 曲線

参 考 文 献

- 1) Vlasov, V.Z. (奥村敏恵ほか共訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967年。
- 2) 西野文雄ほか：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，第225号，pp. 1~15, 1974.
- 3) Goodier, J.N. and Barton, M.V. : The Effects of Web Deformation on the Torsion of I-Beams, Journal of Applied Mechanics, Vol.11, pp.A-35~40, 1944.
- 4) Hancock, G.J. et al. : Web Distortion and Flexural-Torsional Buckling, Proc.ASCE, Vol.106, No.ST7, pp.1557~1571, 1980.
- 5) Bradford, M.A. and Trahair, N.S. : Distortional Buckling of I-Beams, Proc.ASCE, Vol.107, No. ST2, pp.355~377, 1981.
- 6) 深沢泰晴・杉原美好：I形ばりの弾性横座屈に及ぼすウェブの変形の影響，構造工学論文集，Vol.31 A, PP.15~23, 1985.

- 7) 吉田 博：H形鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度，土木学会論文報告集，第243号，pp.19～32，1975.
- 8) 高橋邦弘・水野正夫：薄肉開き断面部材の断面変形（一自由度断面変形・一軸対称断面の場合）：日本機械学会論文集（第1部），44巻 378号，pp.460～467，1978.
- 9) 高橋邦弘・水野正夫：薄肉開き断面部材の断面変形（多自由度断面変形の場合）：日本機械学会論文集（A編），45巻 400号，pp.1545～1553，1979.
- 10) 薄木征三・長谷部薫：二次の有限変位理論に基づく薄肉断面ばりの局部座屈および全体座屈解析，土木学会論文集，第344号/I-1，pp.357～366，1984.

（1985年10月18日受付）