

薄肉開断面部材の非線形解析

NONLINEAR ANALYSIS OF THIN-WALLED FRAMES AND MEMBERS
WITH ARBITRARY OPEN CROSS SECTIONS

崎元達郎* 山尾敏孝** 菊池良介*** 坂田力****

By Tatsuro SAKIMOTO, Toshitaka YAMAO,
Ryosuke KIKUCHI and Tsutomu SAKATA

An incremental equilibrium equation for a beam-column with arbitrary open cross sections is derived in a stiffness matrix form by using a moving element coordinate system and an incremental variational principle. A segmentation method for the cross section is used to analyze the development of plastic zones in the cross section and the effect of initial residual stresses arbitrarily distributed in the cross section. Yielding of the material is judged as a bi-axial stress problem under normal and shear stresses by using the flow theory of plasticity associated with von Mises yield criterion. Validity and efficiency of the present method are shown by illustrative examples.

1. まえがき

終局状態に近づいた鋼構造骨組部材の挙動を解析することは、終局強度設計法における設計基準および設計手法を確立するときに重要なものとなる。最大耐荷力付近での部材の挙動を解析するためには、その部材の幾何学的非線形性および材料的非線形性の影響を考慮しなければならない。このような非線形問題に対しては、有限要素法による定式化が有効であるため、これまで、非弾性ははり一柱に対する剛性マトリックスの誘導に努力がはらわれてきた。

弾性はり理論では、その断面のせん断中心軸や中立軸を用いることにより、その理論の定式化が簡単になる。しかし、はり断面が塑性化をはじめると、その塑性域の発達とともに、せん断中心軸および中立軸の位置や方向が連続的に変化するために、これら二軸はその有効性を失うことになる。一般に、非弾性域ではすべての断面特性は幾何学的なものとともに応力-ひずみ関係を表す材料定数を考慮した数値積分によって決

*	工博	熊本大学教授	工学部土木工学科	(〒860 熊本市黒髪2-39-1)
**	工修	熊本大学助手	工学部土木工学科	(同 上)
***	工修	建設省	河川局河川計画課	(〒100 東京都千代田区霞ヶ関1-3-2)
****	工修	熊本大学研究生	工学部土木工学科	(〒860 熊本市黒髪2-39-1)

定される。Murray等¹⁾²⁾は、断面に固定した二つの任意点に関するはりの方程式を誘導しており、この任意点を図心とせん断中心にとることにより、Murray等のはり方程式が、古典的な弾性方程式と一致することを示している。

著者等は、本論文においてこの考え方をさらに拡張し、断面に固定した1つの任意点に関するはり方程式を誘導した。古典的なはりの方程式の結果と逐一对応させる必要がなければ、このはり方程式はMurray等によるはり方程式に比べてさらに簡単な式となる。Murray等は増分形の基本式の方がかなり複雑になると考え増分つりあい方程式ではなく、全変位に対するつりあい方程式を仮想仕事法により誘導しているが、本研究では移動座標系および増分手法を使用し、エネルギー増分の停留原理より増分つりあい方程式を導いた³⁾。これは、非弾性材料の応力-ひずみ関係が塑性増分理論によって表されるように、非弾性材料の挙動そのものが増分的な性質をもっているため、非弾性挙動を表現する場合は、増分つりあい方程式によって解析する方が効果的であると考えたためである。

本解析法の主な特徴として、以下のようなものが挙げられる。 a) 任意形状開断面部材の非弾性そりねじりを解析することができる。 b) 相当応力、相当ひずみの概念を用いて二軸応力状態での材料の弾塑性ひずみ硬化挙動を、単軸応力状態の硬化型弾塑性関係で表した。(Murray等は、一軸応力状態で降伏を判定し、St.Venantのねじり剛性は降伏による影響を受けない一定値としている。) c) 増分荷重ごとに部材断面の応力分布および塑性域の発達を、全荷重過程を通して追跡し、表示することができる。 d) ひずみの反転の影響を考慮することができる。(Murray等は考慮していない。) e) 任意に分布した残留応力の影響を考慮することができる。(Murray等のものは、任意分布は扱えない。)

2. つりあい方程式の誘導

(1) 座標系および仮定

座標系は、空間固定の全体座標系 (X, Y, Z) および荷重増分ごとに得られる変形後の物体とともに移動する局所座標系 (x, y, z) を設定する⁴⁾⁵⁾。すなわち、図1に示すように、荷重経路途中の変形状態 i の部材上に、右手系の直交局所座標系 (x_i, y_i, z_i) を設定し、次の $i+1$ 状態をLagrangian表示する。状態 i は、次の状態 $i+1$ の応力、ひずみおよび変位を決定する際の初期応力状態と考えられる。

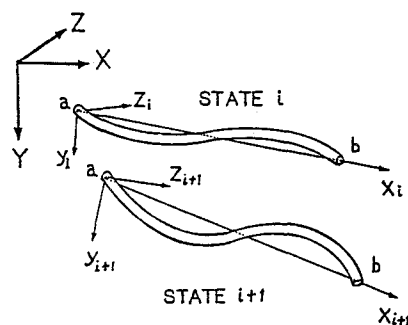


図1 移動座標系

解析上の仮定としては、 a) 部材は薄肉開断面である。 b) 材料の弾塑性ひずみ硬化挙動は、硬化型弾塑性応力-ひずみ関係によって表す。 c) 断面が一部塑性化した後も、曲げひずみは平面保持し、そり拘束によるひずみは弾性理論のそり関数で表せる。 d) 曲げおよび曲げねじりによる板厚中心面内のせん断応力によるせん断ひずみは小さく、無視できる。 e) 降伏基準は、von Misesの降伏条件式が成立し、非弾性域ではPrandtl-Reussの応力-ひずみ式が成立する。 f) 断面の一部が塑性化した後もSt.Venantのねじりによるせん断ひずみは、板厚方向に直線分布する。 g) 変位は大きくても、ひずみは小さい。 h) 局部座屈は生じず、断面形状の変化は無視できる。

なお、式の誘導において、全変位、全外力、全ひずみ、全応力に対しては、 $\bar{}$ を付さない文字で表し、それぞれの増分量に対しては、 δ を付した文字を使用する。

(2) ひずみ-変位関係

図2は、断面の回転と変位の幾何学的な関係を示す。この断面上の任意点 $P(\eta, \zeta)$ の軸ひずみ増分は、任意に選ばれた点 O の変位増分 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ および回転角増分 $\bar{\phi}$ によって次のように表される。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = & \bar{u}' - (\eta - \zeta \bar{\phi}) \bar{v}'' \\ & - (\zeta + \eta \bar{\phi}) \bar{w}'' + \{(\bar{v}')^2 + (\bar{w}')^2\} / 2 \\ & + (\eta^2 + \zeta^2) (\bar{\phi}')^2 / 2 + \omega \bar{\phi}'' \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $(\quad)'$ は x に関する微分を表し、 ω は点 O に関する単位そり関数を表す。ただし、実際の計算では、任意点 O を断面の図心に選び、計算を行っているため、単位そり関数は従来の薄肉はり理論によって求められる。なお、増分変位が小さいときは、軸ひずみ増分は従来の線形式によって次式のように求められる。

$$\bar{\epsilon} = \bar{u}' - \eta \bar{v}'' - \zeta \bar{w}'' + \omega \bar{\phi}'' \quad (2)$$

また、St. Venant のねじりによるせん断ひずみ増分は次式のようにになる。

$$\bar{\gamma} = 2n \bar{\phi}' \quad (3)$$

ここで、 n は板厚中心面の接線 s に対して垂直方向の座標を表す (図4参照)。

(3) 増分応力-ひずみ関係

本解析では、降伏条件に対して軸方向応力 σ と St. Venant のねじりによるせん断応力 τ だけを考慮している。さらに、この二軸応力状態での、材料の弾塑性ひずみ硬化挙動を、図3に示す相当応力-相当ひずみの Tri-linear 関係でモデル化する。弾性域では、Hooke の法則、非弾性域では Prandtl-Reuss の式および von Mises の降伏基準の成立を仮定すると、次のような増分応力-ひずみ関係を得る。(誘導の詳細は、付録1を参照されたい。)

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(1-D_1) & -ED_2 \\ -ED_2 & G(1-D_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \quad \text{あるいは、} \quad \bar{\sigma} = D \cdot \bar{\epsilon} \quad (4)$$

ここで、 E : ヤング係数、 G : せん断弾性係数であり、係数 $D_1 \sim D_3$ は、弾性域においては $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ 、非弾性域においては、 $D_1 = E\sigma^2 / 3GB$ 、 $D_2 = \sigma\tau / B$ 、 $D_3 = 3\tau^2 / B$ である。また、 $B = (H/3G)(\sigma^2 + 3\tau^2) + (E/3G)\sigma^2 + 3\tau^2$

ここで、 H は引張試験より得られる応力-塑性ひずみ曲線の接線勾配である (図3参照)。なお、非ひずみ硬化材料あるいは、塑性流れ域では $H = 0$ であり、ひずみ硬化域では $H = E \cdot E_{st} / (E - E_{st})$ となる。ここで、 E_{st} はひずみ硬化係数である。

弾性域、塑性域、ひずみ硬化域のそれぞれの応力-ひずみ領域は 相当応力 σ_E および相当塑性ひずみ ϵ_E^p

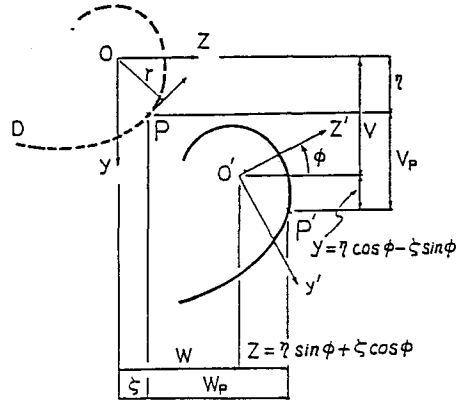
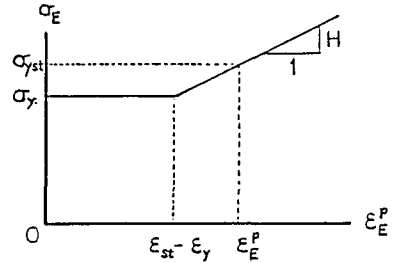
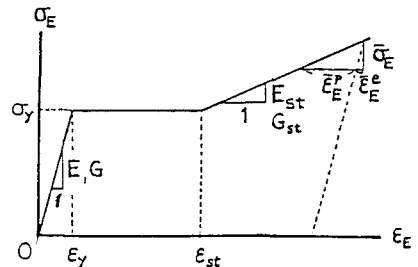


図2 断面の移動と回転の関係図



相当応力-塑性ひずみ曲線



相当応力-全ひずみ曲線

図3 応力-ひずみ曲線

により次のように表すことができる。弾性域を、 $\epsilon_E^p = 0$, $\sigma_E < \sigma_y$, 塑性域を、 $0 < \epsilon_E^p < \epsilon_{st} - \epsilon_y$, $\sigma_E = \sigma_y$, ひずみ硬化域を、 $\epsilon_E^p \geq \epsilon_{st} - \epsilon_y$, $\sigma_E = \sigma_{yst}$, とそれぞれ定義することができる。ここで、 $\sigma_{yst} = \sigma_y + H(\epsilon_E^p - \epsilon_{st} + \epsilon_y)$ (図3参照)。

相当応力、相当塑性ひずみは次式で定義される。

$$\sigma_E = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad \epsilon_E^p = \sum \bar{\epsilon}_E^p = \sum 2 \sigma_E \cdot \lambda / 3 \quad (5)$$

ここで、 $\sum$ は各荷重増分の総和である。また、Prandtl-Reuss の式で示される正の係数は次式によって求められる(誘導の詳細は付録1を参照のこと)。

$$\lambda = \{ (E\sigma/2G)\bar{\epsilon} + (3\tau/2)\bar{\gamma} \} / (H\sigma_E^2/3G + E\sigma^2/3G + 3\tau^2) \quad (6)$$

なお、数値計算においては、i 状態の応力、ひずみ、ひずみ増分によって、式(5)および式(6)より λ , σ_E , ϵ_E^p を求め、そして各断面分割要素が弾性、塑性、ひずみ硬化のいずれの状態であるかを判定し、その後、応力増分が式(4)によって求められる。

(4) 断面が一部降伏したときの接線剛性

断面力増分 $\bar{r}^T = (\bar{N}, \bar{M}_z, \bar{M}_y, \bar{M}_w, \bar{T})$ と変形増分 $\bar{d}^T = (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{\phi}', \bar{\phi}')$ との関係は、図4に示されるような部分的に降伏した単位長さの要素について求められる。この断面力増分は、応力増分を断面全体について積分することによって求められる。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int \bar{\sigma} dA & \bar{M}_z &= - \int \eta \bar{\sigma} dA & \bar{M}_y &= \int \zeta \bar{\sigma} dA \\ \bar{M}_w &= \int \omega \bar{\sigma} dA & \bar{T} &= 2 \int n \bar{\tau} dA \end{aligned} \quad (7)$$

マトリックス表示では

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \int C^T \cdot \bar{\sigma} dA \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & \eta & \zeta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、添字Tはマトリックスの転置を示す。

式(2)、(3)より増分ひずみと増分変形の関係が、次のように表すことができる。

$$\bar{\epsilon} = C \cdot \bar{d} \quad (9)$$

式(4)、(9)を式(8)に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \int C^T \cdot D \cdot C \cdot \bar{d} dA = [\int C^T \cdot D \cdot C dA] \cdot \bar{d} \\ &= S \cdot \bar{d} \end{aligned} \quad (10)$$

このSマトリックスは、部分的に降伏した単位長さの部材の接線剛性を表しており、(5×5)の対称行列であるSマトリックスの右上半分の要素 S_{ij} は次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{11} &= E \int (1 - D_1) dA, & S_{12} &= E \int \eta (1 - D_1) dA, & S_{13} &= E \int \zeta (1 - D_1) dA \\ S_{14} &= E \int \omega (1 - D_1) dA, & S_{15} &= -2E \int n D_2 dA, & S_{22} &= E \int \eta^2 (1 - D_1) dA \\ S_{23} &= E \int \eta \zeta (1 - D_1) dA, & S_{24} &= E \int \eta \omega (1 - D_1) dA, & S_{25} &= -2E \int n \eta D_2 dA, \\ S_{33} &= E \int \zeta^2 (1 - D_1) dA, & S_{34} &= E \int \zeta \omega (1 - D_1) dA, & S_{35} &= -2E \int \eta \zeta D_2 dA, \\ S_{44} &= E \int \omega^2 (1 - D_1) dA, & S_{45} &= -2E \int n \omega D_2 dA, & S_{55} &= 4G \int n^2 (1 - D_3) dA \end{aligned} \quad (11)$$

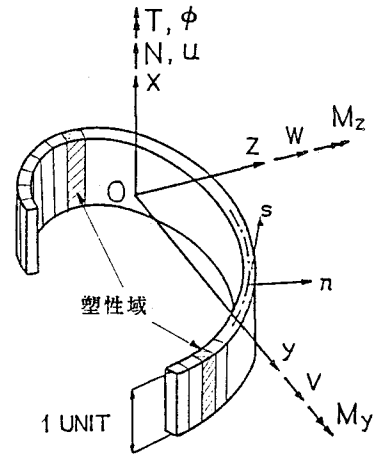


図4 正方向断面力，変位図

(5) つりあい方程式

全外力 $\bar{p}$ が、部材要素に作用したときのつりあい状態 i に、増分荷重 $\bar{p}$ を作用させ、変位増分 $\bar{u}_x$ を生じ新しいつりあい状態 $i+1$ になったときの外力ポテンシャル増分 V は次のようになる。

$$V = - [(\bar{u}_x + u_x)^T (\bar{p} + p) - u_x^T p] = - \bar{u}_x^T (\bar{p} + p) - u_x^T \bar{p} \quad (12)$$

いま、増分ステップ間は線形性を仮定すると、要素長さ l の部材にたくわえられる増分ひずみエネルギー U は、次式で表される。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{d}^T \bar{\epsilon} \bar{d} dx + \int_0^l (\int_A \sigma \bar{\epsilon} dA) dx + \int_0^l (\int_A \tau \bar{\gamma} dA) dx \quad (13)$$

式(1), (3), (10)を上式に代入すると、次式を得る。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \bar{d}^T \cdot S \cdot \bar{d} dx + \int_0^l N \left[\bar{u}' + \frac{1}{2} (\bar{v}')^2 + \frac{1}{2} (\bar{w}')^2 \right] dx + \int_0^l M_z (\bar{v}'' + \bar{\phi} \bar{w}'') dx \\ - \int_0^l M_y (\bar{w}'' - \bar{\phi} \bar{v}'') dx + \int_0^l K (\bar{\phi})^2 dx + \int_0^l M_\omega \bar{\phi}'' dx + \int_0^l T \bar{\phi}' dx \quad (14)$$

ここで、 N , M_z , M_y , M_ω および T は、式(7)と同様の式で定義された全断面力であり、

$K = \int \sigma (\eta^2 + \zeta^2) dA$ である。

弾塑性部材要素に対する変位関数については、現在のところ、十分な情報がないため、本解析では弾性部材に対して、一般的に有限要素法で使用されている多項式の変位関数を用いている。すなわち、 $\bar{u}$ については x の一次式、 $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{\phi}$ については x の三次式で表されたとし、また断面力については、 N および K は x について一定で、 M_z , M_y , M_ω , T は x の一次式で表せると仮定している。これらの関係を用いることにより、式(14)の増分ひずみエネルギー U は、節点変位増分と節点断面力増分によって表すことができる。その結果、ポテンシャルエネルギー増分 $\pi = U + V$ は、節点変位増分 $\bar{u}$ によって表すことができる。ここで、 π の停留条件は、増分つりあい方程式と同義であるから⁶⁾ $\bar{u}$ に関する π の第一変分をとれば、次のようなつりあい式が得られる。

$$(k_{ep} + k_g) \bar{u} = \bar{p} + (p - f) \quad (15)$$

ここで、 $\bar{u}$: 節点変位増分ベクトル、 $\bar{p}$: 節点外力増分ベクトル、 p : 全節点外力ベクトル、 f : 全節点断面力ベクトルであり、それぞれ次のように定義される。

$$\bar{u} = [\bar{u}_a \ \bar{v}_a \ \bar{w}_a \ \bar{\phi}_a \ \bar{u}_b \ \bar{v}_b \ \bar{w}_b \ \bar{\phi}_b]^T \\ \bar{p} = [\bar{p}_{xa} \ \bar{p}_{ya} \ \bar{p}_{za} \ \bar{m}_{xa} \ \bar{m}_{ya} \ \bar{m}_{za} \ \bar{m}_{\omega a} \ \bar{p}_{xb} \ \bar{p}_{yb} \ \bar{p}_{zb} \ \bar{m}_{xb} \ \bar{m}_{yb} \ \bar{m}_{zb} \ \bar{m}_{\omega b}]^T \\ p = [p_{xa} \ p_{ya} \ p_{za} \ m_{xa} \ m_{ya} \ m_{za} \ m_{\omega a} \ p_{xb} \ p_{yb} \ p_{zb} \ m_{xb} \ m_{yb} \ m_{zb} \ m_{\omega b}]^T \\ f = \left[\frac{N_a + N_b}{2} \quad \frac{M_{za} - M_{zb}}{l} \quad \frac{M_{ya} - M_{yb}}{l} \quad \frac{M_{\omega a} - M_{\omega b}}{l} - T \quad -M_{ya} \quad -M_{za} \quad -M_{\omega a} - \frac{(T_b - T_a)l}{12} \right. \\ \left. \frac{N_a + N_b}{2} \quad \frac{M_{za} - M_{zb}}{l} \quad -\frac{M_{ya} + M_{yb}}{l} \quad \frac{M_{\omega a} - M_{\omega b}}{l} + T \quad M_{yb} \quad M_{zb} \quad M_{\omega b} + \frac{(T_b - T_a)l}{12} \right]^T \quad (16)$$

なお、式中の添字 a , b は、節点 a , b に関する量を意味している。また、剛性マトリックス k_{ep} , k_g の詳細については、文献(11)に示したとおりである。 k_{ep} は弾塑性部材の剛性を表し、 k_g は有限変位による幾何学的非線形性を表す初期応力マトリックスである。式(15)の $(p - f)$ は、増分荷重ステップ途中で生じた材料の降伏および定式化の際の線形性の仮定によって生じる不つりあい力である。数値計算については、この不つりあい力が収束するまで反復計算を行なう。ここで、式(15)を座標変換マトリックス T によって、全体座標系に変換すると次のように表される。

$$[K_{ep} + K_g] \bar{U} = \bar{P} + (P - T \cdot f) \quad (17)$$

この(17)式を全要素について集成すれば、構造系全体の増分つりあい方程式が得られるので、これを解けばよい。

(6) 計算手順

外力増分に伴う、部材軸方向および部材断面方向の塑性域の拡がりを追跡するために、構造部材を部材要素と断面要素に分割する(図5参照)。このとき、板厚方向の降伏による剛性低下(特に曲げ剛性の低下)、およびねじり荷重を受ける場合あるいはねじり変形を生じる場合の St. Venant のせん断応力を評価するために、最低4層の板厚方向分割が必要である。この各要素のひずみと応力は、断面要素の中央点で表される。計算によって得られた要素のひずみと応力は、载荷前に与えられていた残留ひずみと残留応力に加算される。剛性マトリックスで使用する断面力と断面諸量は、部材要素の端断面での、数値積分によって得られる。式(17)の増分つりあい方程式を解くときは、Newton-Raphson法によって反復計算を行っている³⁾。なお、本解析プログラムは、断面の図心以外に横荷重が作用しても解析できる。

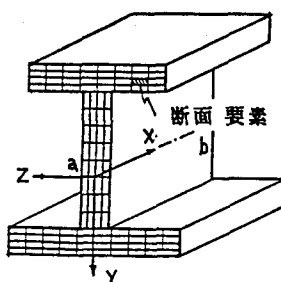


図5 断面要素分割図

3. 数値計算例

本解析手法の妥当性を検証するために、実験結果と理論解析結果の得られている三種類の解析モデルについて、本理論による解析を試みた。

まず最初の解析例として、楕円積分によりその解析解がすでに得られているエラスティカを選んだ⁷⁾。解析モデルは図6の中に示す。本解析では、柱の長さ方向に10分割し、断面要素としては192分割した(フランジ、ウェブともに、幅方向、高さ方向に8分割、厚さ方向に8層分割)。図6は、解析結果を無次元量で表した荷重-変位曲線である。本手法による結果は、楕円積分解とよく一致していることがわかる。一般に知られているように、大たわみ問題の大部分は倍精度計算(1ワード, 64ビット)によって行われ、さらに全変位から剛体変位を除去する手法などが用いられている。しかし、本手法によれば、単精度計算(1ワード, 32ビット)によって行われ、さらに剛体変位を除去する手法も用いないで、図6に示すようなよい結果を得ることができた。

次に、非弾性域における橋座屈問題について解析を行った。解析モデルは図7に示されるとおりである。要素分割については、部材長さ方向に12分割し、断面要素としては192分割した(フランジおよびウェブの厚さ方向に、それぞれ6層分割し、フランジ幅方向に12分割、ウェブ高さ方向に8分割)。このH形鋼ばりに、自重に相当する荷重、およびはり中央に1.0(in-kip)のねじりモーメントを与えておき、はり中央での横方向たわみが発散するまで、はり両端の荷重 P を徐々に増加させる。そのときの、はり中央での y, z 軸方向の荷重(モーメントの無次元量)と変位の関係を示したのが図8である。本解析結果との比較資料としては、Lee Galanbos等による実験結果¹⁰⁾および

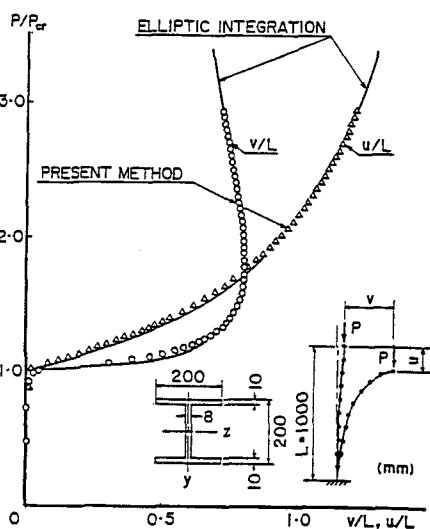


図6 荷重-変位曲線

Murray等による解析結果⁸⁾を用いている。図8からわかるように、それぞれの結果がよく一致していることがわかる。面外たわみ w に対する本解析結果は、Murray 等の結果と若干の相違を示している。この相違は、Murray 等の解析では降伏を一軸応力状態に対して判定しており、降伏による St. Venant のねじり剛性への影響がないとしている。それに対し本解析法では、降伏を二軸応力状態として判定し、降伏による St. Venant のねじり剛性への影響を考慮している点に起因しているとも考えられるが、この程度の相違は他の原因によっても生じ得るので確証は得られない。

最後の解析例は、二軸曲げと圧縮を受ける非弾性はり一柱の解析である。この解析例では、Birnstiel による実験結果⁹⁾および Murray 等による有限要素解析結果⁸⁾に対して、本解析結果の比較検討を行っている。解析モデルは図9の中に示されている。なお、構造特性および材料特性については文献(9)に従ったが、残留応力分布および降伏応力 $\sigma_y = 34.5 \text{ ksi}$ (238 MPa) については、文献(8)の値を用いた。要素分割は、最初の解析例のエラスティカと同様に、10 部材要素、192 断面要素に分割した。偏心荷重は、図心軸荷重と二軸端モーメントに置換えて計算をおこなった。このときの、柱の中央点での回転と横方向変位は、図9に示されるとおりである。本解析例についても、実験結果、解析結果と本解析結果がよく一致していることがわかる。なお、図中の本解析結果が、最大荷重に達した後の荷重-変位曲線が示されていないのは、荷重制御法により計算を行ったためである。以上、三種類の解析例の比較結果より本解析法の妥当性が確認できた。

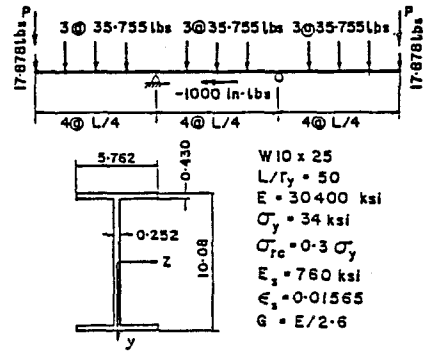


図7 解析モデル図

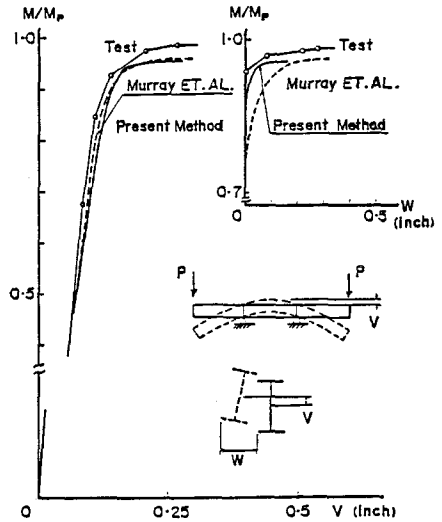


図8 荷重-変位曲線図

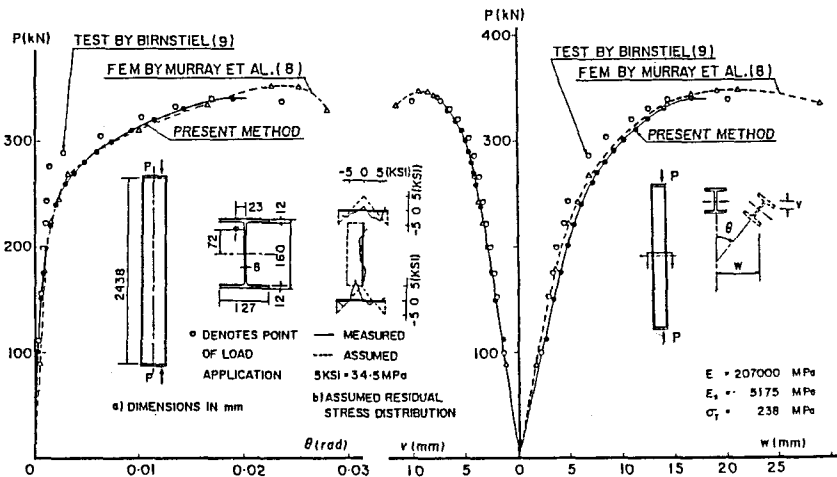


図9. 偏心荷重を受ける柱の中央断面における回転角 θ および変位 v, w

4. 結論

本論文において、任意形状の薄肉開断面材の非弾性三次元大変位挙動に対する有限要素手法、および理論式が示された。また、本解析結果と他の理論解析結果および実験結果との比較によって本手法の妥当性が確認された。本解析法によって、現実的な荷重が作用するときに、非弾性の不安定挙動を示すような、複雑な鋼構造物に対する設計基準および設計手法を確立するための、パラメータ解析による研究が可能となる。

解析にあたっては、九州大学計算機センターの大型計算機 FACOM M-382 を用いた。

付録1 増分応力-ひずみ関係

本解析では、 x 軸方向応力 σ と St. Venant のねじりによるせん断応力 τ のみを考慮している。すなわち、図 A-1 に示されるような薄肉開断面ばりの応力状態は、次のような関係で表される。

$$\sigma_x = \sigma \quad \sigma_n = \sigma_s = 0 \quad \tau_{ns} = \tau_{xn} = 0 \quad \tau_{xs} = \tau \quad (A1)$$

ここで、添字 x, n, s は、図 A-1 に示される座標軸を表しており、添字は従来の応力表示に従っている。

弾性域では、Hooke の法則より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon \\ \tau &= G \gamma \end{aligned} \quad (A2)$$

ここで、 E : ヤング係数、 G : せん断弾性係数、 ε : 軸ひずみ、 γ : せん断ひずみ

非弾性域では、増分ひずみを弾性増分ひずみ $\bar{\varepsilon}^e$ 、 $\bar{\gamma}^e$ および塑性増分ひずみ $\bar{\varepsilon}^p$ 、 $\bar{\gamma}^p$ に分離することができるとすると

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}^e + \bar{\varepsilon}^p \\ \bar{\gamma} &= \bar{\gamma}^e + \bar{\gamma}^p \end{aligned} \quad (A3)$$

となる。いま、Prandtl-Reuss の式より

$$\frac{\bar{\varepsilon}_x^p}{\sigma'_x} = \frac{\bar{\varepsilon}_n^p}{\sigma'_n} = \frac{\bar{\varepsilon}_s^p}{\sigma'_s} = \frac{1}{2} \frac{\bar{\gamma}^p}{\tau} = \lambda \quad (A4)$$

なる関係を得る。ここで、 λ は応力状態に依存する正の定数である。また、偏差応力 σ' はそれぞれ次式によって表すことができる。

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma_x - (\sigma_x + \sigma_n + \sigma_s)/3 = 2\sigma/3 \\ \sigma'_n &= \sigma_n - (\sigma_x + \sigma_n + \sigma_s)/3 = -\sigma/3 \\ \sigma'_s &= \sigma_s - (\sigma_x + \sigma_n + \sigma_s)/3 = -\sigma/3 \end{aligned} \quad (A5)$$

式 (A5) を式 (A4) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}/E &= \bar{\varepsilon} - \frac{2}{3} \sigma \lambda \\ \bar{\tau}/G &= \bar{\gamma} - 2\tau \lambda \end{aligned} \quad (A6)$$

相当応力 σ_E および相当塑性ひずみ増分 $\bar{\varepsilon}_E^p$ は次式によって定義される⁵⁾。

$$\begin{aligned} \sigma_E &= \sqrt{\frac{3}{2} \{ (\sigma'_x)^2 + (\sigma'_n)^2 + (\sigma'_s)^2 + 2\tau_{xn} + 2\tau_{ns} + 2\tau_{xs} \}} \\ &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \end{aligned} \quad (A7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_E^p &= \sqrt{\frac{2}{3} \{ (\bar{\varepsilon}_x^p)^2 + (\bar{\varepsilon}_n^p)^2 + (\bar{\varepsilon}_s^p)^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xn}^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{ns}^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}_{xs}^2 \}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} \{ (\bar{\varepsilon}_x^p)^2 + (\bar{\varepsilon}_n^p)^2 + (\bar{\varepsilon}_s^p)^2 + \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \}} \end{aligned} \quad (A8)$$

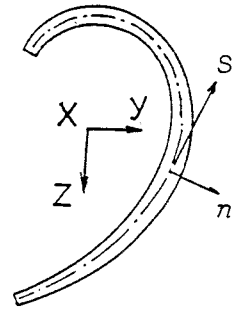


図 A-1 座標系

式(A4)、(A7)および(A8)より、 λ は次式のようにになる。

$$\lambda = \frac{\sqrt{(\bar{\epsilon}_x^p)^2 + (\bar{\epsilon}_n^p)^2 + (\bar{\epsilon}_s^p)^2 + (\frac{1}{2}\bar{\gamma}^p)^2}}{\sqrt{(\sigma_x')^2 + (\sigma_n')^2 + (\sigma_s')^2 + \tau^2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\epsilon}_E^p}{\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_E} = \frac{3\bar{\sigma}_E}{2\sigma_E \cdot H} \quad (A9)$$

ここで、 $H = \bar{\sigma}_E / \bar{\epsilon}_E^p$ であり、引張試験から得られる応力-塑性ひずみ曲線の接線勾配である。非ひずみ硬化材料では、 $\sigma_E = \sigma_y$ となり $H = 0$ である。

式(A7)の微分形は、

$$\frac{2}{3} \bar{\sigma}_E \cdot \sigma_E = \frac{2}{3} \bar{\sigma} \cdot \sigma + 2 \bar{\tau} \cdot \tau \quad (A10)$$

となり、式(A9)と(A6)を上式に代入し、 λ について解くと

$$\lambda = \frac{2E \cdot \sigma \cdot \bar{\epsilon} / 3 + 2G \cdot \tau \cdot \bar{\gamma}}{4\sigma_E^2 \cdot H / 9 + 4E \cdot \sigma^2 / 9 + 4G \cdot \tau^2} \quad (A11)$$

となる。この λ を式(A6)に代入することにより、増分応力-ひずみ関係が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= E \{ 1 - (E/3G) \sigma^2 / B \} \cdot \bar{\epsilon} - (E \cdot \sigma \cdot \tau / B) \cdot \bar{\gamma} \\ \bar{\tau} &= - (E \cdot \sigma \cdot \tau / B) \cdot \bar{\epsilon} + G (1 - 3\tau^2 / B) \cdot \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (A12)$$

$$B = (H/3G) (\sigma^2 + 3\tau^2) + (E/3G) \sigma^2 + 3\tau^2 \quad (A13)$$

相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}_E^p$ は、相当塑性ひずみ増分 $\bar{\epsilon}_E^p = 2\sigma_E \lambda / 3$ の総和として、次式のようにになる。

$$\bar{\epsilon}_E^p = \sum \bar{\epsilon}_E^p = \sum [(E \cdot \sigma_E \cdot \sigma / 3G \cdot B) \cdot \bar{\epsilon} + (\sigma_E \cdot \tau / B) \cdot \bar{\gamma}]$$

ここで、 $\sum$ は全荷重経路についての総和を表す。 (A14)

材料の応力-ひずみ関係を硬化型弾塑性関係とすると、次のような増分応力と増分ひずみの関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \bar{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(1-D_1) & -ED_2 \\ -ED_2 & G(1-D_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix} \quad (A15)$$

この式(A15)は、本文の式(4)であり、係数 $D_1 \sim D_3$ については本文に与えられている。

参考文献

- 1) Murray, D.W. and Rajasekaran, S. : Technique for Formulating Beam Equation, Proc. of ASCE, Vol.101 No. EM5, pp.561-573, Oct., 1975.
- 2) Rajasekaran, S. and Murray, D.W. : Finite Element solution of Inelastic Beam Equations, Proc. of ASCE, Vol.99, No. ST6, pp 1025-1041, June, 1973.
- 3) Komastu, S. and Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Spatial Frames Consisting of Members with Closed Cross-Sections, Proc. of JSCE, No. 252, pp.143-157, Aug., 1976.
- 4) Hofmeister, L.D., Greenbaum, G.A. and Evensen, D.A. : Large Strain Elasto-Plastic Finite Element Analysis, Proc. of AIAA/ASME, pp.1248-1254, July, 1971.
- 5) Yamada, Y. : Sosei Rikigaku, Nikkan Kougyo Shinbunsha, 1960.
- 6) Reckling, G.-A. : Plastizitats Theorie und ihre Anwendung auf Festigkeitzproblem, Springer-Verlag, Berlin, pp.27-62, 1967. (in German)
- 7) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., Mcgraw-hill Book.Co., Inc., pp.76-82, 1961.
- 8) Epstein, M., Nixon, D. and Murray, D.W. : Large Displacement Inelastic Analysis of Beam-Columns, Proc. of ASCE, Vol.104, No. ST5, pp.841-853, May, 1978.
- 9) Birnstiel, C. : Experiments on H-columns under Biaxial Bending, Proc. of ASCE, Vol.94, No.

ST10, pp.2429-2449, April, 1968.

- 10) Galambos, T.V : Structural Members and Frames, Prentice Hall, Inc.1968.
- 11) Sakimoto, T. : Nonlinear Analysis of Thin-Walled Frames and Members with Arbitrary Open Cross Sections, Proc. of JSCE Vol.2 No.2, pp.871-878, Oct., 1985.

(1986年 1月24日 受付)