

修正された二次元ハイブリッドストレスモデル
による非線形構造解析NON-LINEAR STRUCTURAL ANALYSIS USING A MODIFIED
TWO DIMENSIONAL HYBRID STRESS MODEL

*

伊良波 繁雄

By Shigeo IRAHA

A triangular plane element with 12 degrees of freedom based on hybrid stress model is presented. Since the element has a node at midpoint of the each boundary side, the analysis is useful for treating non-linear problems including crack and slip. For numerical examples, the element is applied for elasto-plastic analysis of the punch problem and the V-notch specimen under tensile load. The results of numerical examples are in good agreement with the ones of Finite Element Model and Rigid Body Spring Model.

1. まえがき

剛体バネモデルのように、要素境界で破壊を考慮する離散化モデルが提案¹⁾²⁾され、構造物の非線形解析に利用されるようになった。剛体バネモデルは要素重心に節点があるために、要素境界にすべりや引張破壊が生じて自由度の増加がないために、構造物の極限解析モデルとして良いモデルである。しかし、要素を剛体としているので、一次要素を除き、崩壊に到達する以前の情報に関しては信頼性が不足している。渡辺・川井はこの欠点を解決するための要素モデルとして、ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理を用いた一連のハイブリッドストレスモデルを提案した。二次元ハイブリッドストレスモデルは図-1に示すように、辺中央に3個の変位パラメータを持っている。このモデルはハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理において、要素境界積分項を座標変換し、応力場を一次式の釣合応力場(応力パラメータが7個)、要素境界変位場としては要素境界に垂直方向の変位を一次式、要素境界に平行な方向の変位を一定と仮定して導かれた。渡辺・川井はこのモデルを用いて完全弾塑性体の極限解析例を示した。

二次元ハイブリッドストレスモデルは要素境界の辺中央に節点があるために、要素間のすべりや引張破壊の処理が簡単であるので、筆者もこのモデルを用いて、地盤や鉄筋コンクリート構造物の極限解析を行った。³⁾⁴⁾¹⁰⁾解析結果によれば、二次元ハイブリッドストレスモデルは極限荷重や崩壊メカニズムを知るためには良いモデルであるが、片持ばりの弾性解析⁴⁾を行うと、変位の精度が低い事が分った。そこで、本報告で

* 琉球大学助手 工学部土木工学科 (〒903-01 沖縄県西原町千原1番地)

は変位の精度を改善したモデルを示す。新しいモデルは要素内の応力パラメータを12個とし、要素境界の変位場は要素境界に垂直方向および平行な方向に一次式を仮定している。このために、変位の自由度は辺に垂直方向の変位(u_i)、辺に平行な変位(v_i)、辺の回転角(θ_i)、辺に平行な方向のひずみ(ε_i)の4個となっており、要素ごとの境界変位自由度は12個となる。なお、要素内の応力パラメータは要素単位で消去できるので、最終的には要素境界上の変位パラメータのみが未知量となる。

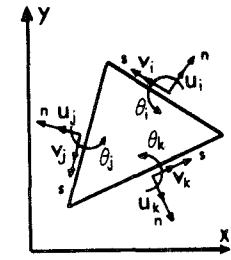


図-1 二次元ハイブリッドストレスモデル

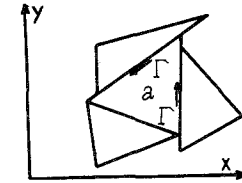


図-2 要素aの境界の破壊状況

2. 解析手法

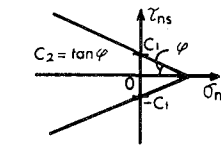


図-3 モールクーロンの降伏条件

ハイブリッド型コンプリメンタリエネルギーの原理は⁵⁾

$$\Pi_{CH} = \sum \left[\int \int_{\Omega_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial \Omega_n} u_i T_i dS + \int s \sigma_{nn} u_i \bar{T}_i dS \right] \dots (1)$$
 で与えられる。ここで $B(\sigma_{ij})$: コンプリメンタリエネルギー、 u_i : 変位、 Ω_n : 要素の体積、 $\partial \Omega_n$: 要素の境界、 $s \sigma_{nn}$: 力学的境界、 σ_{ij} : 応力、 $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 、 n_j : 方向余弦、 $\bar{T}_i$: 外力、 Σ : 要素全部の和を意味する。図-1に示すように全体座標系を x, y 軸とし、局部座標系 n, s を要素境界ごとに仮定すれば変位、応力について、それぞれ次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} u_x &= l U - m V, \quad u_y = m U + l V \quad \dots (2) \\ \sigma_n &= \sigma_x l^2 + 2\tau_{xy} l m + \sigma_y m^2 \\ \sigma_s &= \sigma_x m^2 + \sigma_y l^2 - 2\tau_{xy} l m \\ \tau_{ns} &= -(\sigma_x - \sigma_y) l m + \tau_{xy} (l^2 - m^2) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここで、 l, m は方向余弦、 u_x, u_y はそれぞれ x, y 方向の変位である。 U, V はそれぞれ要素境界の n 方向、 s 方向の変位を示す。式(2)、(3)を用いて、式(1)の右辺第2項の積分を変換すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega_n} u_i T_i dS &= \int_{\partial \Omega_n} [(l U - m V) (\sigma_x l + \tau_{xy} m) \\ &\quad + (m U + l V) (\tau_{xy} l + \sigma_y m)] dS \\ &= \int_{\partial \Omega_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) dS \quad \dots (4) \end{aligned}$$

となる。式(1)の右辺第3項についても同様に計算できるので、式(1)は次式のようになる。

$$\Pi_{CH} = \sum \left[\int \int_{\Omega_n} B(\sigma_{ij}) dx dy - \int_{\partial \Omega_n} (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds + \int s \sigma_{nn} (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds \right] \dots (5)$$

つぎに、図-2に示すように、要素境界にすべり破壊が生じている場合を考える。この時、すべり面においては表-1に示す塑性条件式を満足させる必要がある。この条件式を満足させるために、ラグランジェの未定乗数法を用いる。モールクーロンの降伏条件式の場合は

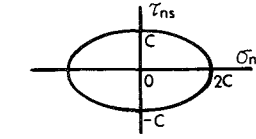


図-4 ミーゼスの降伏条件

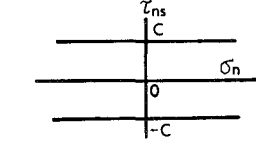


図-5 トレスカの降伏条件

$\Pi_{CH} = \Pi_{CH} - \int s s \Gamma (\tau_{ns} \pm C_2 \sigma_n) ds \dots (6)$
 となる。ここで、 $s s$ はすべり面を意味する。式(6)では簡単のために、増分記号 Δ を省略して示した。なお、式(6)の付帯条件式は

表-1 すべり面での条件式

	降伏関数: f	すべり面での条件式
モールクーロン	$\tau_{ns}^2 - (C_1 - C_2 \sigma_n)^2$	$\Delta \tau_{ns} \pm C_2 \Delta \sigma_n = 0$
ミーゼス	$\tau_{ns}^2 + \sigma_n^2 / 4 - C^2$	$\Delta \tau_{ns} + \Delta \sigma_n \cdot \sigma_n / 4 \tau_{ns} = 0$
トレスカ	$\tau_{ns}^2 - C^2$	$\Delta \tau_{ns} = 0$

$$\sigma_{ij,j}=0:V_n \text{ 内}, U=\bar{U}, V=\bar{V}:S_u \text{ 上}, V=0:S_s \text{ 上} \cdots \cdots (7)$$

である。 S_s 上で $V=0$ の条件の説明を行う。すべり面においては垂直応力およびせん断応力の連続条件、そして、塑性条件式が成立しなければならない。すなわち、

$$\sigma_n^a = \sigma_n^b, \tau_{ns}^a = \tau_{ns}^b \cdots \cdots (8)$$

$$\tau_{ns}^a \pm C_2 \sigma_n^a = 0, \tau_{ns}^b \pm C_2 \sigma_n^b = 0 \cdots \cdots (9)$$

である。ここで、 a :要素 a , b :要素 b を意味する。すべりが生じてない時は式(8)だけで十分である。さらに、塑性条件式(9)を加えると、当然、条件数が増えて、不必要な条件式を含む事になる。このために、式(9)の塑性条件を用いれば、後は、式(8)のどちらか一方の式を用いれば、他方は自動的に満足される。本報告では垂直応力の連続条件を用いているので、せん断力の連続条件は不必要である。変位: V は元々、せん断応力の連続条件を満足させるためのラグランジエ乗数であるから、 $V=0$ となる。

剛性マトリックスを導くために、応力場、変位場、ラグランジエ乗数 Γ を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta_1 + y\beta_4 + x\beta_6 + y^2\beta_8 + x^2\beta_{10} + 2xy\beta_{11} \\ \sigma_y &= \beta_2 + x\beta_5 + y\beta_7 + x^2\beta_9 + y^2\beta_{10} + 2xy\beta_{12} \\ \tau_{xy} &= \beta_3 - y\beta_6 - x\beta_7 - 2xy\beta_{10} - y^2\beta_{11} - x^2\beta_{12} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (10)$$

$$U = u_i - \theta_i S, V = v_i - \varepsilon_i S \cdots \cdots (11)$$

$$\Gamma = \Gamma_{vi} - \Gamma_{\varepsilon i} S \cdots \cdots (12)$$

式(11)で u_i, v_i, θ_i は図-1に示すように節点 i の変位であるが、 ε_i は i 点での要素境界に平行な方向のひずみを意味している。なお、 S は図-1に示すように、局所座標系の原点からの距離である。

つぎに、式(10)を式(13)のように表し、ひずみ・応力関係式を式(14)のように仮定する。

$$\{\sigma\} = [B]\{\beta\} \cdots \cdots (13)$$

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \cdots \cdots (14)$$

式(13)、(14)を用いれば、式(5)の右辺第1項の積分は次式のようになる。

$$\int \int_{V_n} B(\sigma_{ij}) dx dy = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 \cdots \cdots (15)$$

ここで、 $[H] = \int \int_{V_n} [B]^T [C] [B] dx dy$, $\{\beta\} = \{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{12}\}^T$ である。式(5)の右辺第2項は、式(3)、(10)、(11)を用いれば

$$\int_{S_u} U_n (U \sigma_n + V \tau_{ns}) ds = \{\beta\}^T [G] \{u\} \cdots \cdots (16)$$

となる。ここで、 $\{u\} = \{u_i v_i \theta_i \varepsilon_i \cdots \varepsilon_k\}^T$ である。外力ベクトルを $\{\bar{F}\}$ とすれば、式(5)の荷重項は

$$\int_{S_s} \sigma_n (U \bar{\sigma}_n + V \bar{\tau}_{ns}) ds = \{u\}^T \{\bar{F}\} \cdots \cdots (17)$$

となる。式(6)の第(2)項は式(3)、(10)、(12)を用いて

$$\int_{S_s} \Gamma (\tau_{ns} \pm C_2 \sigma_n) ds = \{\beta\}^T [\check{G}] \{\Delta\} \cdots \cdots (18)$$

となる。ここで $\{\Delta\}$ は図-2の要素 a について示せば、 $\{\Delta\} = \{\Gamma_{vi} \Gamma_{\varepsilon i} \Gamma_{vj} \Gamma_{\varepsilon j}\}^T$ となる。つまり、式(18)はすべり線の数に関係している。つぎに、式(15)、(16)、(17)、(18)を式(6)に代入すれば

$$\Pi_{CH} = \{\beta\}^T [H] \{\beta\} / 2 - \{\beta\}^T [G] \{u\} + \{u\}^T \{\bar{F}\} - \{\beta\}^T [\check{G}] \{\Delta\} \cdots \cdots (19)$$

となる。式(19)で $\{\beta\}$ について停留条件を求めると

$$\{\beta\} = [H]^{-1} \{[G] \{u\} + [\check{G}] \{\Delta\}\} \cdots \cdots (20)$$

となる。式(20)を式(19)に代入し、 $\{u\}$ と $\{\Delta\}$ について停留条件を求めると

$$\left. \begin{aligned} [K_{11}] \{u\} + [K_{12}] \{\Delta\} &= \{\bar{F}\} \\ [K_{21}] \{u\} + [K_{22}] \{\Delta\} &= \{0\} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (21)$$

となる。ここで、 $[K_{11}] = [G]^T [H]^{-1} [G]$ 、 $[K_{12}] = [G]^T [H]^{-1} [\check{G}]$ 、

$[K_{21}] = [\check{G}]^T [H]^{-1} [G]$ 、 $[K_{22}] = [\check{G}]^T [H]^{-1} [\check{G}]$ である。式(21)で $\{\Delta\}$ を消去すれば

$$([K_{11}] - [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}]) \{u\} = \{F\} \dots\dots\dots(22)$$

となる。式(22)は、すべりによって増加した自由度を消去した剛性マトリックスである。本報告では式(22)を用いて、荷重増分法で弾塑性解析を行っている。

3・ 数値計算例

3-1 片持ばりの弾性解析

要素の収束特性を見るために、図-6に示す集中荷重を受ける片持ばりの解析を行った。はりの深さ方向の分割数： N_y は1～4、長手方向の分割数： N_x は3～12の範囲である。また、要素の形状は同図に示すように、縦・横比が常に1:1となっている。図-6には渡辺・川井の提案したモデル(以後、モデル-1とする)と、本報告で示したモデル(以後、モデル-2とする)の収束状況を示した。モデル-1は自由度(変位)の少ない時に良い値を示しているが、自由度が増加しても精度は向上していない。これに対し、モデル-2は自由度が増加するにつれて、せん断変形を考慮したはり理論解⁶⁾に近づいて行く。

つぎに、要素の形状を変えた時の比較を行う。はり図-7に示すように、先端に集中荷重を受けている。このはり、Cook⁷⁾がHL要素の特性を見るための解析に使っている。HL要素とは、要素境界で線形の変位場を仮定し、要素内の応力場を

$\sigma_x = \beta_1 + \beta_2 y$ 、 $\sigma_y = \beta_3 + \beta_4 x$ 、 $\tau_{xy} = \beta_5$ と仮定して導かれた要素で、四辺形の頂点に2自由度を持っている。なお、HL要素の剛性計算は要素に固定した直交座標系で行っている。図-7は、はりの長手方向に4分割、深さ方向に4分割したはり(これを $N=4$ とする)の要素分割図である。本報告で用いている要素形状は三角形であるので、図-8に示すように四角形を二分割して解析を行った。

表-2はモデル-1とモデル-2およびHL要素によって求められたはり先端の鉛直変位量の比較を示した。このはりの厳密解はわかってないので、HL要素を用いて細かいメッシュ($N=16$)で解いたものを正解とすれば、モデル-2とHL要素は分割が細くなるにつれて、精度が向上するのに対し、モデル-1は精度の向上が小さい。

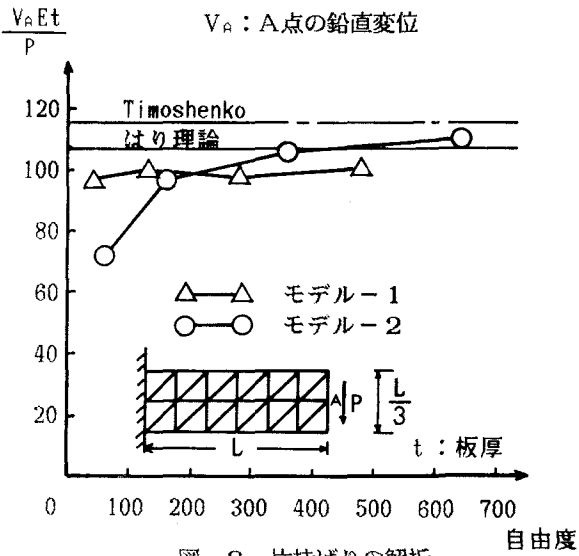


図-6 片持ばりの解析

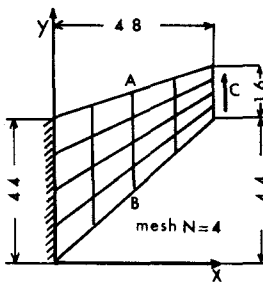


図-7 片持ばり
($E=1.0, \nu=1/3$)

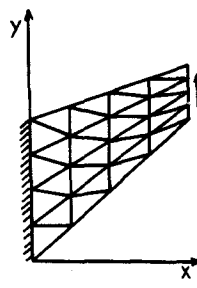


図-8 要素分割

表-2 変位の比較

要素	C 点の鉛直方向変位	
	N = 2	N = 4
HL	18.17	22.03
モデル-1	13.17	14.19
モデル-2	17.80	21.70
HL(N=16)	23.81	

しかし、 $N=4$ の時のAB線上の応力分布を図-9に示してあるがモデル-1、モデル-2共良い値を示している。

3-2 Vノッチを有する板の引張解析

モデル-2を用いて、図-10に示すVノッチを有する薄板の弾塑性解析を行った。解析はミーゼスの降伏条件を仮定し、平面応力問題とした。荷重は供試体の両端に強制変位を与える方法で加えている。図-11は要素分割と最終状態のすべり線を示しているが、すべり線の発生域は剛体バネモデル¹⁾と大体一致している。図-12は荷重-変位曲線を示しているが、モデル-2は弾性域から塑性域まで有限要素法⁹⁾や剛体バネモデル¹⁾と良く一致している。

3-3 ボンチの押込み問題

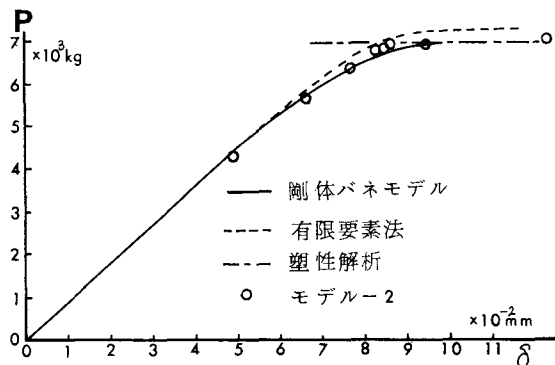
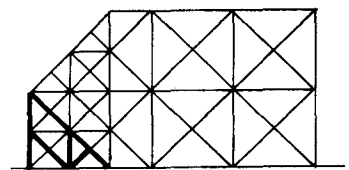
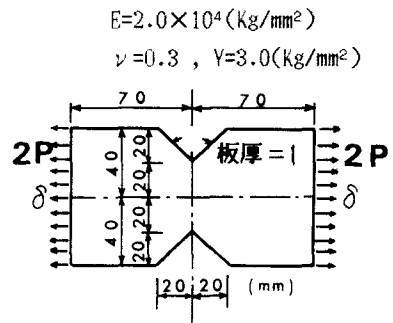
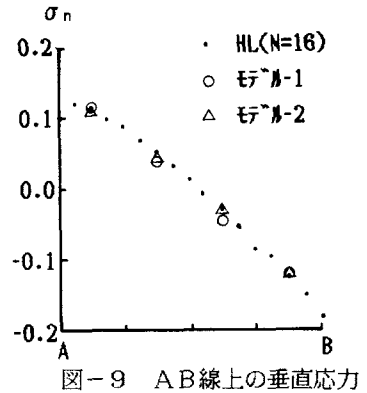
図-13は弾塑性ブロックに剛体ボンチを押込む問題を示している。解析はトレスカの降伏条件を仮定し、平面ひずみ問題として行っている。図-14には荷重-変位曲線を示す。荷重-変位曲線の初期勾配を比較すると、有限要素法⁹⁾に一番近いのはモデル-2である。また、最初に降伏する時の荷重がモデル-2では高めになっているが、これは要素分割が粗いためと思われる。極限荷重を比較すると、モデル-1、モデル-2とも同じ値($P/2C=1.14$)であり、すべり線解や剛体バネモデル¹⁾による解析値($P/2C=1.13$)と大体一致する。有限要素法による極限荷重は、すべり線解よりも少し高めとなっている。

4. むすび

渡辺・川井によって提案された二次元ハイブリッドストレスモデルは極限解析用としては良いモデルであるが、片持ばりの解析例から、変位については精度が低いことが分かった。変位の精度を改善する目的で、要素内の応力パラメータを12個、要素境界に自由度を4個持つモデルを示した。新しいモデルは、数値計算例3-1から分かるように変位の精度は良くなっている。極限荷重については渡辺・川井による二次元ハイブリッドストレスモデルや剛体バネモデルと同じ解析結果を示した(数値計算例3-2と3-3)

謝辞

本研究にあたり、御助言をいただいた東京大学生産技術研究所：川井忠彦教授、椎名章二助手、琉球大学工学部：大城武教授、数値計算および図面作成に御助力いただいた琉球大学工学部学生：梅木邦隆氏、川崎稔氏に心から感謝の意を表します。



$E=703070 \text{ kg/cm}^2$

$\gamma=914 \text{ kg/cm}^2$

$\nu=0.33 \quad C=\gamma/\sqrt{3}$

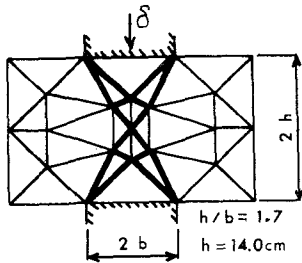


図-13 要素分割とすべり線

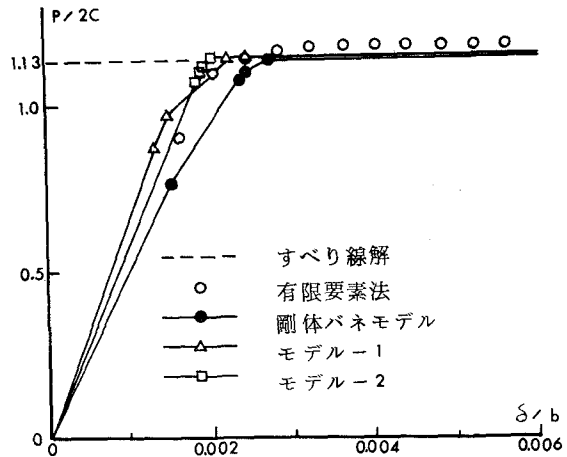


図-14 荷重-変位曲線

参考文献

- 1) 川井忠彦編：生研セミナーテキスト（物理モデルによる連続体力学の諸問題解析）、生産技術研究奨励会、1979。
- 2) 渡辺正明、川井忠彦：ハイブリッドストレスモデルによるすべり線、塑性関節線の表現、日本造船学会論文集、PP.297～305、1980-5
- 3) 伊良波繁雄：2次元ハイブリッドストレスモデルによる非線形構造解析、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、PP133～138、1985-7
- 4) 伊良波繁雄：ハイブリッドストレスモデルによる鉄筋コンクリート構造物の非線形解析、琉球大学工学部紀要、第30号、PP1～11、1985-9
- 5) 鷺津久一郎：弾性学の変分原理概論、培風館、1972。
- 6) S.Timoshenko（鶴戸口英善、国尾武共訳）：材料力学、東京図書株式会社、1957
- 7) R.D.Cook：Improved Two-Dimensional Finite Element, ASCE, ST9, PP1851～1863, 1974
- 8) Y.Yamada, N.Yoshimura, T.Sakurai：Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problem by the Finite Element Method, Int.J.Mech.Sci., Vol.10, PP23, 1968
- 9) G.C.Nayak, G.C.Zienkiewicz：Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening, Int.J.Num.Meth.Engng, Vol.5, PP113～135, 1972
- 10) 伊良波繁雄、川井忠彦：2次元ハイブリッドストレスモデルによる極限解析（モールクーロンの破壊条件で表される材料について）、第33回応用力学連合講演会講演論文抄録集、PP265～266、1983.12

（1985年10月18日受付）