

異方硬化モデルを導入した有限要素法 による土の要素試験解析

ELEMENT TEST ANALYSIS OF SOIL BY USING FINITE ELEMENT
METHOD WITH ANISOTROPIC HARDENING MODEL

森 雅美* 山口晴幸** 石川信隆***

By Masami MORI, Hareyuki YAMAGUCHI and Nobutaka ISHIKAWA

This paper presents the availability of an anisotropic hardening model to soil. Based on the test results conducted by the authors, the applicability of anisotropic hardening model to real soil is examined in both stress-strain (fiber) level and element level. In element level, the basic equations of anisotropic hardening model are formulated under three dimensional stress state and the computational algorithm of the finite element method with anisotropic hardening model is developed on the basis of above derived basic equations. The elasto-plastic finite element analysis of triaxial compression test under drained condition is carried out using the computational algorithm, and the calculated results are compared with the test results.

1. 緒言

近年、土の応力～ひずみ関係に関する研究が活発になされ、種々の考え方に基づく構成モデルが多数提案されるとともに、これらの構成モデルを用いた有限要素法による地盤や土一構造物系の材料非線形解析に関する研究が行われるようになってきた。

これらの構成モデルのうち弾塑性論的見地に立脚したものが土の構成式の主流とされており¹⁾、代表的なものとしてRoscoeらの提案によるCam-Clayモデル²⁾が挙げられる。これは、関連流動則および塑性体積ひずみ硬化仮説に基づく等方硬化モデルで粘性土の圧密・せん断を統一的に論じ得る画期的なものであるが、1) 地盤の初期応力状態と考えられる K_0 圧密などの異方圧密を受けた後の粘性土の力学挙動の異方性、すなわち、応力誘起異方性、2) 繰り返し载荷を受ける場合の圧密降伏応力より低いレベルでの応力変動に伴う履歴挙動を考慮できないなどの制約がある。

上記の観点から、Mrózらは、金属に関する塑性硬化係数場理論を修正したKrieg³⁾やDafaliasら⁴⁾による

* 防衛大学校助手 土木工学教室 (〒239 神奈川県横須賀市走水1-10-20)

** 工博 防衛大学校助教授 土木工学教室 (同上)

*** 工博 防衛大学校教授 土木工学教室 (同上)

二曲面理論を粘性土に適用した異方硬化モデルを提案した⁵⁾。Dafaliasら⁶⁾も同様の構成モデルを提案している。Mrózらの提案した異方硬化モデル⁵⁾の特色は、材料の非線形硬化挙動を表現できる点にある。このため、連続関数によって表現される塑性硬化係数を用いることにより、従来の塑性硬化係数場理論における多数の降伏曲面の代わりに、互いに接することはあっても交わることのない（非交差条件）ただ二つの互いに相似な降伏曲面のみを考えている。このモデルでは、塑性変形が生じた場合には、二つの降伏曲面の等方硬化および移動硬化による隣接関係から連続的に塑性硬化係数を決定できるので、地震や波力などの繰り返し载荷を受ける異方圧密地盤の解析が可能であるなど汎用性に富んだ構成モデルであると言われている。また、この異方硬化モデルは、応力～ひずみ(fiber) レベルにおいては軟岩⁷⁾やしらす⁸⁾への適用が試みられており、三軸圧縮試験結果との比較による適用性の検証がなされている。しかしながら、有限要素法への適用例は現在のところ見当たらない。これは、モデルの妥当性を三軸圧縮および伸張下の実験結果との比較から検証することを目的として軸対称三軸応力状態に関して定式化しているため、そのままでは有限要素法に適用できないためである。

本研究は、異方硬化モデルを導入した有限要素法による地盤や土—構造物系の材料非線形解析を行うための第一段階として、圧縮性および異方性に富む有機質土（黒ぼく）を例に取り、異方硬化モデルの実際の地盤材料への適用性の検証を試みたものである。すなわち、まず、等方圧密した黒ぼくの非排水および排水三軸圧縮試験を実施し、軸対称三軸応力条件下での異方硬化モデルによる計算結果との比較により異方硬化モデルの fiberレベルでの適用性の検証を行う。ついで、要素試験レベルに拡張するため、三次元応力状態での異方硬化モデルの基本式の定式化を行い、異方硬化モデルを導入した有限要素法の計算アルゴリズムを構成する。その計算アルゴリズムに基づき排水三軸圧縮試験の弾塑性有限要素解析を行い、実験結果との比較により本計算アルゴリズムの妥当性について検討し、本法の地盤材料への適用性について検証を試みたものである。

2. 異方硬化モデルによる基本式

図-1は、繰り返し载荷を受ける場合の降伏曲面の法線方向における応力 σ ～塑性ひずみ ϵ^p 曲線を負荷～除荷～再負荷に関して模式的に表わしたもので、直線部は弾性領域を、曲線部の勾配が塑性硬化係数 K_p を表わしている。異方硬化モデル⁵⁾では、塑性硬化係数 K_p を連続的に変化させることにより従来の等方硬化型の構成モデルでは表現し得なかった弾性領域と塑性領域の過渡領域（以下、弾塑性遷移領域と呼ぶ）における応力～ひずみ曲線の滑らかな遷移（材料の非線形硬化挙動が顕著に表われる）、ひいては繰り返し载荷を受ける場合の応力～ひずみ曲線のヒステリシス・ループ（履歴挙動）の表現を可能にしている。塑性硬化係数 K_p を初期降伏時の K_{p0} と塑性領域における K_{pR} との間で連続的に変化させるため、塑性領域を表わす従来の等方硬化型の圧密曲面に加えて、これと相似で圧密曲面内を応力点とともに膨張（または収縮）し、かつ移動する純弾性領域を囲むただ一つの降伏曲面を考え、応力空間における圧密曲面と降伏曲面の隣接関係によって定まる内挿関数（関数形を等方圧密～膨張試験結果に基づいて定める）として塑性硬化係数 K_p を決定している。さらに、降伏曲面の移動硬化を仮定していることにより初期異方圧密による異方性も表現できることになる。

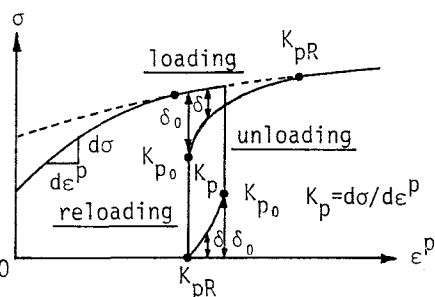


図-1 塑性硬化係数 K_p の連続的変化

のヒステリシス・ループ（履歴挙動）の表現を可能にしている。塑性硬化係数 K_p を初期降伏時の K_{p0} と塑性領域における K_{pR} との間で連続的に変化させるため、塑性領域を表わす従来の等方硬化型の圧密曲面に加えて、これと相似で圧密曲面内を応力点とともに膨張（または収縮）し、かつ移動する純弾性領域を囲むただ一つの降伏曲面を考え、応力空間における圧密曲面と降伏曲面の隣接関係によって定まる内挿関数（関数形を等方圧密～膨張試験結果に基づいて定める）として塑性硬化係数 K_p を決定している。さらに、降伏曲面の移動硬化を仮定していることにより初期異方圧密による異方性も表現できることになる。

2. 1 軸対称三軸応力状態における基本式⁵⁾

図-2に示す修正Cam-Clayモデルの楕円型の降伏関数をもつ異方硬化モデルの軸対称三軸応力状態における基本式を示せば以下になる。

降伏関数：

$$F(p', q, a) = (p' - an/m)^2 + q^2/n^2 - a^2 = 0 \quad (1)$$

$$f_0(p', q, \alpha_p, \alpha_q, a_0) = (p' - \alpha_p)^2 + (q - \alpha_q)^2/n^2 - a_0^2 = 0 \quad (2)$$

等方硬化則：

$$da = a' de^p = -(1+e)a' de^p / p' \quad (3a)$$

$$da_0 = a_0' de^p = -(1+e)a_0' de^p / p' \quad (3b)$$

移動硬化則（弾塑性遷移領域）：

$$d\alpha_p = d\mu \{ an/m - p + (a/a_0)(p - \alpha_p) \} + \{ (da - da_0)/a_0 \} (p - \alpha_p) + da(n/m) \quad (4a)$$

$$d\alpha_q = d\mu \{ -q + (a/a_0)(q - \alpha_q) \} + \{ (da - da_0)/a_0 \} (q - \alpha_q) \quad (4b)$$

K_p の補間則：

$$K_p = K_{pR} + K_{p_0} (\delta/\delta_0)^{\gamma+1} \quad (5)$$

ここに、 $p' (= -(\sigma_1 + 2\sigma_3)/3)$, $q (= \sigma_3 - \sigma_1)$ は各々平均有効主応力および軸差応力、 σ_1, σ_3 は各々最大主応力および最小主応力、 α_p, α_q は各々降伏曲面の中心の p および q 座標、 a, a_0 は各々圧密曲面および降伏曲面の長半径、 $m (= \tan \omega = 6 \sin \phi' / (3 - \sin \phi'))$ は線形Mohr-Coulombの破壊規準を限界状態と仮定した場合の応力比、 $n = \tan \zeta$, ϕ' は有効せん断抵抗角、 da, da_0 は各々圧密曲面および降伏曲面の長半径増分、 e は間隙比、 $a' (= -a/(\lambda - \kappa))$, $a_0' (= -a_0/(\lambda - \kappa))$ は各々塑性間隙比 e^p に関する a および a_0 の導関数、 λ, κ は図-3(a)に示す $e \sim \ln p'$ 面上での正規圧密曲線および膨張曲線の直線性を仮定したときの各々の直線の傾き、 de_V^p は塑性体積ひずみ増分、 $d\alpha_p, d\alpha_q$ は各々降伏曲面の中心の p および q 座標の移動増分、

$d\mu$ はPragerの適合条件により決定される移動硬化の大きさを表わす未定係数、 δ, δ_0 は各々図-2中の楕円を円に変換した座標系でのPRの距離およびその初期値、 γ は図-3(a)に示す等

方圧密～膨張試験における破線で表わされる膨張曲線の非線形特性から決定される塑性変形量の程度を表わす土質パラメータであり、図-3(b)に示すように実測データを $\log(\epsilon_V^p - \epsilon_{V_0}^p) \sim \log p'$ ($\epsilon_{V_0}^p$: 除荷が始まるA点での塑性体積ひずみ、 ϵ_V^p : 膨張曲線の各点における塑性体積ひずみ) 面上で整理したときの傾きである。

2. 2 三次元応力状態における基本式

2. 1に示した異方硬化モデルは、軸対称三軸応力状態に関するものであり、そのままでは有限要素法に

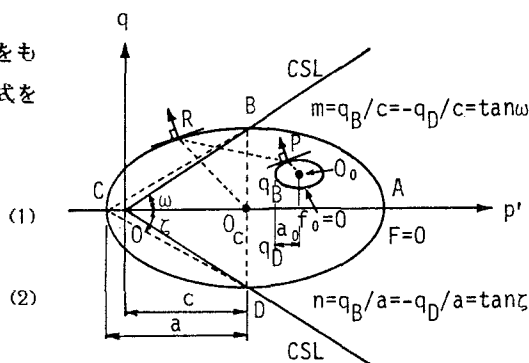


図-2 $p' \sim q$ 面内での圧密曲面および降伏曲面

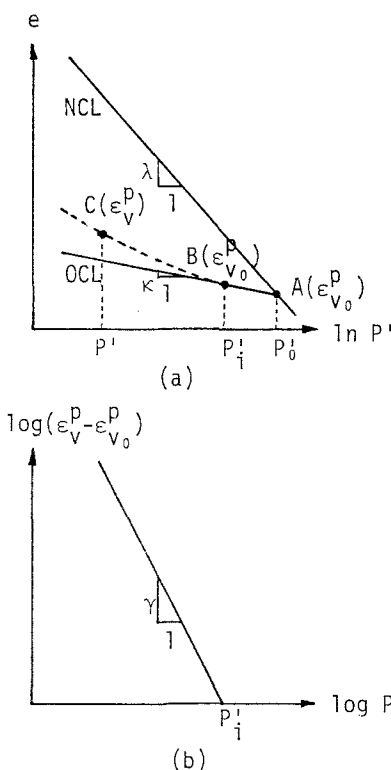


図-3 土質パラメータ γ の定義

適用できない。そこで、ここでは、異方硬化モデルを変位仮定の有限要素法に導入するための三次元応力状態における構成方程式に関する基本式を誘導する。基本式の誘導にあたっては、ひずみ硬化塑性体に関する塑性論の増分理論を用いた。なお、以下の数式では通常の総和規約が適用されているとする。

(1) 応力～ひずみ増分関係の一般式

三次元応力状態における応力 σ_{ij} と硬化パラメータ κ_{ij} を含む降伏関数を

$$f(\sigma_{ij}, \kappa_{ij}) = 0 \quad (6)$$

とし、関連流動則を仮定すれば、山田ら⁹⁾の方法を援用して応力～ひずみ増分関係の一般式が次式のように得られる。

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl} \quad (7)$$

ただし、

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijmn}^e (\partial f / \partial \sigma_{mn}) (\partial f / \partial \sigma_{pq}) D_{pqkl}^e / \{ (\partial f / \partial \sigma_{mn}) D_{mnpq}^e (\partial f / \partial \sigma_{pq}) + K_p g^2 \}$$

$$K_p g^2 = -(\partial f / \partial \kappa_{ij}) (\partial \kappa_{ij} / \partial \epsilon_{kl}^p) (\partial f / \partial \sigma_{kl})$$

ここで、 D_{ijkl}^e は弾性定数テンソルである。 K_p は、図-4に示すように、三次元応力空間における応力増分 $d\sigma_{ij}$ の降伏曲面の法線方向成分 $d\sigma$ と塑性ひずみ増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の大きさ $d\epsilon^p$ の比として定義される三次元応力状態における塑性硬化係数であり、次式のように表わされる。

$$K_p = d\sigma / d\epsilon^p = n_{ij} d\sigma_{ij} / \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \quad (8)$$

ただし、 n_{ij} は降伏曲面の外向き単位法線ベクトルであり、次式の関係式を満足する。

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \sigma_{ij} &= g n_{ij}, \quad g = \sqrt{(\partial f / \partial \sigma_{ij}) (\partial f / \partial \sigma_{ij})}, \\ n_{ij} n_{ij} &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 異方硬化モデルの基本式

ここでは、(1)に示した一般論に基づき、降伏関数、硬化則および塑性硬化係数の三次元応力状態における具体的な関数表示によって、軸対称三軸応力状態に関して定式化されている異方硬化モデルの基本式の三次元化を行う。

a) 降伏関数

軸対称三軸応力状態での応力パラメータ p および q を各々応力の第1次不変量 J_1 および偏差応力 $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_{kk} / 3$ の第2次不変量 J_2 を用いて置換し、さらに、降伏曲面の中心を表わす α_{ij} およびその偏差成分 $\bar{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \delta_{ij} \alpha_{kk} / 3$ を用いれば、式(1)、(2)の圧密曲面および降伏曲面の降伏関数は、各々次式のように三次元化される。

$$F(\sigma_{ij}, a) = (9/4) \phi_F^2 + \psi J_2 - a^2 = 0 \quad (10)$$

$$f_0(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, a_0) = (9/4) \phi_F^2 + \psi J_2 - a_0^2 = 0 \quad (11)$$

ここに、 δ_{ij} はKroneckerの記号であり、また、

$$\phi_F = (2/3) (\sigma_m - \alpha_m^C), \quad \sigma_m = \sigma_{kk} / 3, \quad \alpha_m^C = \alpha_{kk}^C / 3 = -an/m, \quad \psi = 3/n^2, \quad J_2^1 = s_{ij} s_{ij} / 2,$$

$$\phi_F = (2/3) (\sigma_m - \alpha_m), \quad \alpha_m = \alpha_{kk} / 3, \quad J_2^2 = (s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) (s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) / 2$$

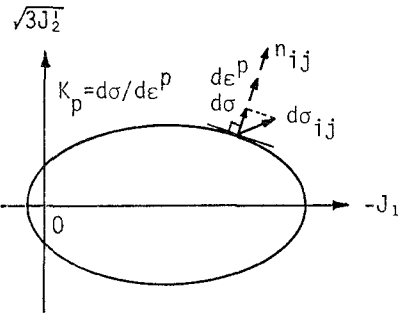


図-4 塑性硬化係数 K_p の定義

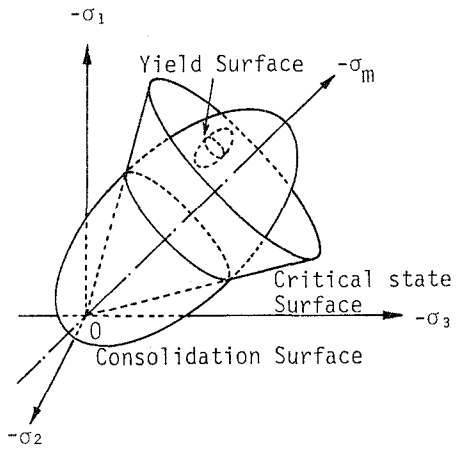


図-5 三次元応力空間での圧密曲面および降伏曲面

三次元応力空間での降伏曲面および圧密曲面を示せば図-5のようになる。

b) 異方硬化則

前述のように圧密曲面は等方硬化し、降伏曲面は等方および移動硬化する。両曲面の等方硬化則に関して文献5)と同様に塑性体積ひずみ硬化説を用いれば、塑性体積ひずみには方向性が無いため、圧密曲面および降伏曲面の長半径 a および a_0 の増分に関する関係式は軸対称三軸応力状態の場合と全く一致する結果となり、式(3)のように得られる。降伏曲面の移動硬化則に関しては、弾塑性遷移領域および塑性領域の各場合を考える。まず、弾塑性遷

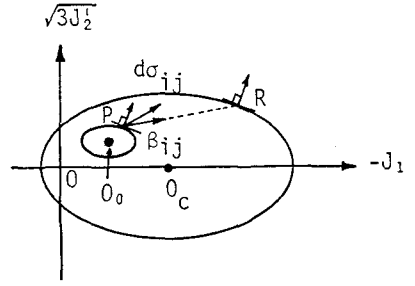


図-6 降伏曲面の移動硬化則
(弾塑性遷移領域)

移領域の場合には、文献5)と同様に両曲面の非交差条件より両曲面の相似性を前提としたうえで、両曲面は共通の法線をもつ点でのみ接し得るとすれば、図-6に示すように降伏曲面上の応力点Pおよびそれと同じ方向の法線ベクトルをもつ圧密曲面上の共役点Rを結ぶ直線PRに沿って、共役点Rに関する応力点Pの相対移動が行われる。いま、応力点Pおよび共役点Rの応力を各々 σ_{ij} および σ_{ij}^R とし、圧密曲面および降伏

面の中心を各々 α_{ij}^C および α_{ij} とすれば、 σ_{ij}^R は

$$\sigma_{ij}^R = \delta_{ij} \alpha_m^C + (a/a_0)(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (12)$$

で表わされ、PRを結ぶベクトル β_{ij} は次式のようにになる。

$$\beta_{ij} = \sigma_{ij}^R - \sigma_{ij} = (a/a_0)\{(3/2)\phi_f \delta_{ij} + s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}\} - \{(3/2)\phi_f \delta_{ij} + s_{ij}\} \quad (13)$$

降伏曲面の移動増分 $d\alpha_{ij}$ は、圧密曲面と降伏曲面は同時に等方硬化すること、さらに共役点Rに関する応力点Pの相対移動が β_{ij} に沿うことから次式のように得られる。

$$d\alpha_{ij} = \delta_{ij} \alpha_m^C + \{(da - da_0)/a_0\}\{(3/2)\phi_f \delta_{ij} + s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}\} + \beta_{ij} d\mu_f \quad (14)$$

ここで、 $d\mu_f$ は次のPragerの適合条件

$$df_0 = (\partial f_0 / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} + (\partial f_0 / \partial \alpha_{ij}) d\alpha_{ij} + (\partial f / \partial a_0) da_0 = 0 \quad (15)$$

に式(14)を代入して決定される降伏曲面の移動量の大きさを表わす未定係数であり、次式のように得られる。

$$d\mu_f = [df_0 \sigma - 2a_0 da_0 - \{(da - da_0)/a_0\} \mu_{f1} - \mu_{f2}] / \{(a/a_0) \mu_{f1} - \mu_{f3}\} \quad (16)$$

ここに、

$$df_0 \sigma = (\partial f_0 / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} = 3\phi_f d\sigma_m + \psi(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) ds_{ij},$$

$$\mu_{f1} = (\partial f_0 / \partial \sigma_{ij})(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = (9/2)\phi_f^2 + 2\psi J_2,$$

$$\mu_{f2} = (\partial f_0 / \partial \sigma_{ij}) \delta_{ij} d\alpha_m^C = 3\phi_f d\alpha_m^C,$$

$$\mu_{f3} = (\partial f_0 / \partial \sigma_{ij})(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \alpha_m^C)$$

$$= (9/2)\phi_f \phi_f + \psi(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) s_{ij},$$

$$d\alpha_m^C = -da(n/m)$$

次に、塑性領域の場合には、降伏曲面と圧密曲面とは法線ベクトルを共有する点において常に接し、かつこの接点が応力点となっていなければならない。これは、図-7に示す等方硬化後の降伏曲面の中心 O_0' が等方硬化後の圧密曲面の中心 O_c' と応力増分 $d\sigma_{ij}$ の終点P'を結ぶ直線 γ_{ij} 上になければならないことを意味している。いま、応力点Pの応力を σ_{ij} 、圧密曲面の中心およびその増分を各々 α_{ij}^C および $d\alpha_{ij}^C$ とすれば、 $O_c'P'$

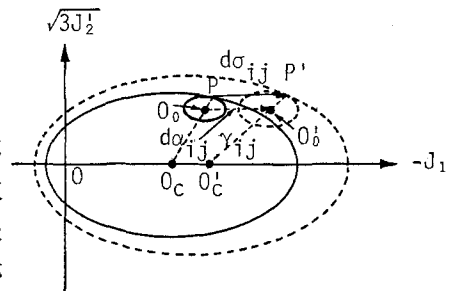


図-7 降伏曲面の移動硬化則
(塑性領域)

を表わす γ_{ij} は

$$\gamma_{ij} = \sigma_{ij} + d\sigma_{ij} - (\alpha_{ij}^C + d\alpha_{ij}^C) = (3/2)(\phi_F + d\phi_F)\delta_{ij} + s_{ij} + ds_{ij} \quad (17)$$

と表わされ、降伏曲面の移動増分 $d\alpha_{ij}$ は次式のように得られる。

$$d\alpha_{ij} = \{ (3/2)(\phi_F - \phi_F) + d\alpha_m^C \} \delta_{ij} - \bar{\alpha}_{ij} + \gamma_{ij} d\mu_F \quad (18)$$

ここで、 $d\mu_F$ は式(18)を式(15)に代入すれば次式のように得られる。

$$d\mu_F = [df_0\sigma - 2a_0da_0 - 3\phi_F \{ (3/2)(\phi_F - \phi_F) + d\alpha_m^C \} + \mu_{F_1}] / \{ (9/2)\phi_F(\phi_F + d\phi_F) + \mu_{F_2} \} \quad (19)$$

ここに、

$$\mu_{F_1} = \psi(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})\bar{\alpha}_{ij}, \mu_{F_2} = \psi(s_{ij} - \bar{\alpha}_{ij})(s_{ij} + ds_{ij}), d\phi_F = (2/3)(d\sigma_m - d\alpha_m^C)$$

c) 塑性硬化係数 K_p の補間則

塑性硬化係数 K_p は弾塑性遷移領域において連続関数でなければならない。ここでは、文献5)と同様に応力点が降伏曲面上にある初期降伏時の初期値 K_{p_0} と降伏曲面上の現在の応力点に対応する圧密曲面上の共役点Rでの K_{pR} との間で K_p が連続的に変化するように、 K_p の関数形を決定する(図-1参照)。その際、 K_p を式(20)のように降伏曲面上の応力点Pと圧密曲面上の共役点Rとの距離 δ および各塑性負荷過程におけるその初期値 δ_0 (δ の上限値)、すなわち現在の除荷が起こる直前の塑性状態を記憶する離散的記憶パラメータの内挿関数とする。

$$K_p = K_p(\delta, \delta_0) \quad (20)$$

ここで、 δ および δ_0 は、楕円型の降伏曲面を図-8に示すように円に変換した座標系において定義するものであり、次式のようになる。

$$\delta = \sqrt{(\sigma_m^R - \sigma_m^C)^2 + \{ (q^R - q)/n \}^2}, \delta_0 = \sup \delta \quad (21)$$

ただし、

$$\sigma_m^R = \alpha_m^C + (3/2)(a/a_0)\phi_F, q^R = \sqrt{(3/2)s_{ij}^R s_{ij}^R} = (a/a_0)\sqrt{3J_2}$$

式(20)の塑性硬化係数 K_p の内挿関数を等方圧密～膨張試験結果に基づいて決定すれば次式のように得られる。

$$K_p = K_{pR} + K_{p_0}(\delta/\delta_0)^{\gamma+1} \quad (22)$$

ここで、 K_{pR} は、降伏曲面 $f_0=0$ と圧密曲面 $F=0$ が接している圧密過程(塑性領域)における次のPragerの適合条件

$$dF = (\partial F / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} + (\partial F / \partial a) da = 0 \quad (23)$$

に式(3a)を代入することにより式(24)のように得られる。

$$K_{pR} = -3(1+e)a' \{ 3(n/m)\phi_F - 2a \} \phi_F / g_F^2 \quad (24)$$

3. 異方硬化モデルによる構成方程式

式(10)、(11)に示した圧密曲面および降伏曲面の降伏関数を式(7)に示す応力～ひずみ増分関係の一般式に適用すれば弾塑性応力～ひずみ増分関係が次式のようにマトリックス形で得られる。

$$d\sigma = \mathbf{D}^{ep} d\epsilon \quad (25)$$

ただし、体積弾性係数およびせん断弾性係数を各々 K および G とすれば、 $\mathbf{D}^{ep}$ は次式のようになる。

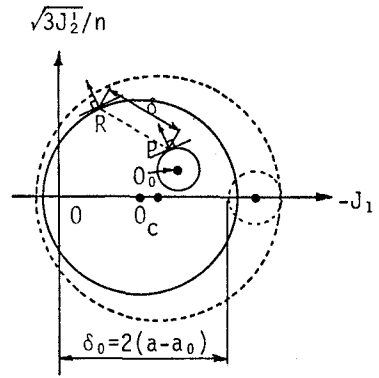


図-8 δ および δ_0 の定義

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{1}{H} \begin{bmatrix} D_1^2 & & & & & \\ D_2 D_1 & D_2^2 & & & & \\ D_3 D_1 & D_3 D_2 & D_3^2 & & & \\ D_4 D_1 & D_4 D_2 & D_4 D_3 & D_4^2 & & \\ D_5 D_1 & D_5 D_2 & D_5 D_3 & D_5 D_4 & D_5^2 & \\ D_6 D_1 & D_6 D_2 & D_6 D_3 & D_6 D_4 & D_6 D_5 & D_6^2 \end{bmatrix}, \mathbf{D}^e = \begin{bmatrix} K+(4/3)G & K-(2/3)G & K+(4/3)G & & & \\ K-(2/3)G & K+(4/3)G & K-(2/3)G & & & \\ K+(4/3)G & K-(2/3)G & K+(4/3)G & & & \\ 0 & 0 & 0 & G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (26)$$

ここで、弾塑性遷移領域の場合：

$$H = 9K\phi_f^2 + 2G\psi^2 [(s_1 - \bar{\alpha}_1)^2 + (s_2 - \bar{\alpha}_2)^2 + (s_3 - \bar{\alpha}_3)^2 + 2\{(s_4 - \bar{\alpha}_4)^2 + (s_5 - \bar{\alpha}_5)^2 + (s_6 - \bar{\alpha}_6)^2\}] + K_p g_f^2, \\ D_1 = 3K\phi_f + 2G\psi(s_1 - \bar{\alpha}_1), D_2 = 3K\phi_f + 2G\psi(s_2 - \bar{\alpha}_2), D_3 = 3K\phi_f + 2G\psi(s_3 - \bar{\alpha}_3), \\ D_4 = 2G\psi(s_4 - \bar{\alpha}_4), D_5 = 2G\psi(s_5 - \bar{\alpha}_5), D_6 = 2G\psi(s_6 - \bar{\alpha}_6)$$

塑性領域の場合：

$$H = 9K\phi_F^2 + 2G\psi^2 \{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(s_4^2 + s_5^2 + s_6^2)\} + K_p g_F^2, \\ D_1 = 3K\phi_F + 2G\psi s_1, D_2 = 3K\phi_F + 2G\psi s_2, D_3 = 3K\phi_F + 2G\psi s_3, \\ D_4 = 2G\psi s_4, D_5 = 2G\psi s_5, D_6 = 2G\psi s_6$$

4. 有限要素法による土の要素試験解析

4. 1 平衡方程式および解法

材料非線形性を考慮したある荷重増分段階 $n+1$ における平衡方程式は次式のように表わされる¹⁰⁾。

$$\mathbf{K}_n \mathbf{U} = \mathbf{R}_{n+1} - \mathbf{F}_{en} \quad (27)$$

ただし、 $\mathbf{K}_n (= \sum \int \int \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B} dV)$ は荷重増分段階 n における接線全体剛性マトリックス、 $\mathbf{B}$ はひずみ～節点変位マトリックス、 $\mathbf{D}^{ep}$ は弾塑性応力～ひずみマトリックス、 $\mathbf{R}_{n+1}$ は荷重増分段階 $n+1$ における外力荷重ベクトル、 $\mathbf{U} (= \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n)$ は節点変位増分ベクトル、 $\mathbf{F}_{en} (= \sum \int \int \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV)$ は荷重増分段階 n における要素内応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に基づく等価節点力である。

解析は、形状関数を2次式で表現できる8節点アイソパラメトリック要素を用い、Gauss 積分次数を2次として軸対称応力条件下で行った。式(27)の平衡方程式の解法には荷重増分法を用い、各荷重増分段階における非線形解析には修正Newton-Raphson 法による反復計算を行った。各反復計算過程における不平衡力 $\Delta \mathbf{F}$ の算定に必要な要素内応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に基づく等価節点力の算定に当たっては、次節に示す文献11) による方法を用いた。

4. 2 応力状態と等価節点力の算定法¹¹⁾

- ① 弾性試行応力増分 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\epsilon}$ を計算し、試行応力状態 $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \boldsymbol{\sigma}_e$ について弾塑性判定を行う。
- ② その結果、 $F(\boldsymbol{\sigma}') < 0$ であれば弾性状態を持続するか除荷を生じているため、試行応力状態を所要の応力状態とみなし以後の計算を行わない。
- ③ 逆に、 $F(\boldsymbol{\sigma}') > 0$ であれば、応力状態は弾性から塑性状態に移行したものとみなし、次式の条件を満足する r を用いて降伏曲面上の応力 $\boldsymbol{\sigma}_y = \boldsymbol{\sigma}_0 + r \Delta \boldsymbol{\sigma}_e$ を計算する。

$$F(\boldsymbol{\sigma}_0 + r \Delta \boldsymbol{\sigma}_e) = 0$$

ただし、 r は全体のひずみ増分 $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ に対する弾性ひずみ増分の比を示し、弾塑性遷移領域および塑性領域の各場合に依りて r は次式のように得られる。

$$r = \{-B + \sqrt{B^2 - AC}\} / A$$

ここで、弾塑性遷移領域の場合：

$$A=\Delta\sigma_m^2+\psi\Delta s_{ij}\Delta s_{ij}/2, B=(3/2)\phi_f\Delta\sigma_m+\psi(s_{ij}-\bar{\alpha}_{ij})\Delta s_{ij}/2=\Delta f_0\sigma/2, C=(9/4)\phi_f^2+\psi J_2^2-a_0^2=f_0$$

塑性領域の場合：

$$A=\Delta\sigma_m^2+\psi\Delta s_{ij}\Delta s_{ij}/2, B=(3/2)\phi_f\Delta\sigma_m+\psi s_{ij}\Delta s_{ij}/2, C=(9/4)\phi_f^2+\psi J_2^2-a^2=F$$

④ したがって、ひずみ増分 $\Delta\epsilon$ に対応する応力増分 $\Delta\sigma$ は次式ようになる。

$$\Delta\sigma=rD^e\Delta\epsilon+(1-r)D^{ep}\Delta\epsilon \quad (28)$$

⑤ 次に、式(28)の第2項を高精度に計算するためには、塑性ひずみ増分 $(1-r)\Delta\epsilon$ を次式のように m 個に小分割(Subincrement)したうえで、応力を降伏曲面上に引き戻す応力修正を行う必要がある。

$$\Delta\epsilon_m^p=\{(1-r)/m\}\Delta\epsilon$$

⑥ 各小分割に対応する応力増分 $\Delta\sigma_i$ は $\Delta\sigma_i=D^{ep}\Delta\epsilon_m^p$ となり、このときの応力状態は次式となる。

$$\sigma_{i+1}^1=\sigma_i+\Delta\sigma_i$$

⑦ よって、 $F(\sigma_{i+1}^1)=F_1>0$ であれば、応力修正操作を、応力状態 σ_{i+1}^1 に対してPragerの適合条件を近似的に適用したうえで、修正された応力 $\sigma_{i+1}=\sigma_i+s\Delta\sigma_i$ が降伏曲面上にあるという条件に基づいて行えば、応力修正係数 s を算定する関係式が次式のように得られる。

$$\Delta\sigma=-F_1(\partial F/\partial\sigma)/\{(\partial F/\partial\sigma)^T(\partial F/\partial\sigma)\} \quad (29)$$

$$F(\sigma_i+s\Delta\sigma_i)=0 \quad (30)$$

式(29)と式(30)より応力修正係数 s を求めると次式のようになる。

$$s=\{B-\sqrt{B^2-AC}\}/A \quad (31)$$

ただし、弾塑性遷移領域の場合：

$$A=\phi_f^2+\psi^3J_2^2, B=(3/2)\phi_f^2+\psi^2J_2^2, C=f_0$$

塑性領域の場合：

$$A=\phi_f^2+\psi^3J_2^2, B=(3/2)\phi_f^2+\psi^2J_2^2, C=F$$

⑧ 式(31)で得た応力修正係数 s を用いて修正された応力 $\sigma_{i+1} (= \sigma_i + s\Delta\sigma_i)$ レベルでの弾塑性応力～ひずみマトリックス D^{ep} が式(26)より算定される。

⑨ ⑥～⑧の操作を小分割した塑性ひずみ増分毎に m 回繰り返せば、与えられたひずみ増分 $\Delta\epsilon$ に対する応力状態 $\sigma=\sigma_0+\Delta\sigma$ が得られる。さらに、この応力状態に対する積分点の弾塑性応力～ひずみマトリックス D^{ep} が式(26)より算定されることになる。

⑩ ①～⑨の操作を積分点毎に繰り返したうえで各積分点における σ および D^{ep} を用いれば、要素の等価節点力 f_e および要素剛性マトリックス k_e が次式より算定される。

$$f_e = \int \int \int B^T \sigma dV$$

$$K_e = \int \int \int B^T D^{ep} B dV$$

以上の手順を各要素毎に繰り返したうえで、所要の荷重段階まで応答計算を行う。

5. 実験結果による異方硬化モデルの検証および考察

ここでは、著者ら^{12,13)}が行った有機質土の非排水および排水三軸圧縮試験結果に基づき実際の地盤材料に対する異方硬化モデルの適用性の検証を試みる。すなわち、まず、非排水三軸圧縮試験結果に関しては応力～ひずみ(fiber)レベルにおいて、実験結果と軸対称三軸応力状態での構成方程式に基づく計算結果との比較を行う。ついで、排水三軸圧縮試験結果に関して、実験結果と fiber レベルでの計算結果および有限要素法による要素試験解析結果との比較を行う。

5. 1 実験概要

実験は^{12,13)}、表-1に示す物理的諸性質をもつ有機質土（黒ぼく）を等方応力条件下で正規圧密（過圧密比OCR=1）および過圧密（OCR=2.1, 5.8, 8.8, 12.7）した供試体（先行圧密圧力 $p'_p=245$ kPa）について側圧（ σ_3 ）一定非排水三軸圧縮試験を、また、正規圧密供試体（ $p'_p=98, 197, 295$ kPa）について側圧（ σ_3 ）一定排水三軸圧縮試験を実施した。

表-1 有機質土の物理的諸性質

Properties		Amounts
Liquid limit	L.L.(%)	147.1
Plastic limit	P.L.(%)	67.5
Plasticity index	P.I.(%)	79.6
Specific gravity	Gs	2.33
Ignition loss Lig	(%)	25.4

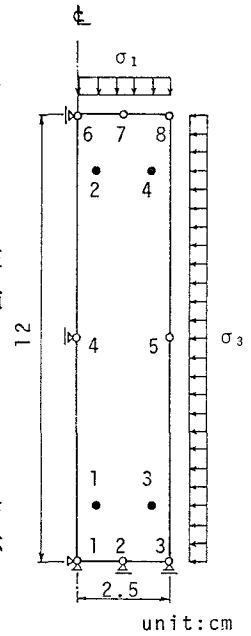


図-9 要素モデル

5. 2 数値計算のための入力データ

(1) 要素試験モデル

有限要素法による要素試験モデルとしては、排水三軸圧縮試験の円柱供試体をモデルとした。すなわち、軸対称応力条件下で解析するものとし、自重による初期応力状態を考慮するため、図-9に示すように左右対称の供試体の右半分のみを考え、要素試験に基づく実験結果との比較のために1要素で解析した。

(2) 荷重

要素試験モデルに等分布荷重として作用する軸圧 σ_1 および側圧 σ_3 は、等価節点外力に置換して各節点に与えた。

(3) 土質パラメータ

異方硬化モデルでは土質パラメータとして、修正Cam-Clayモデル²⁾と同様に、①圧縮指数 λ 、②膨張指数 κ 、③有効せん断抵抗角 ϕ' の他に異方硬化モデルに特有の、④二つの楕円型の降伏曲面の長半径の比を表わす a/a_0 、⑤塑性硬化係数 K_p の内挿関数を決定する際に必要となる γ

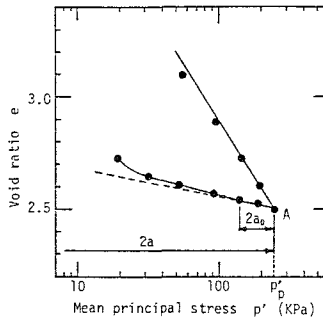


図-10 等方圧密～膨張試験

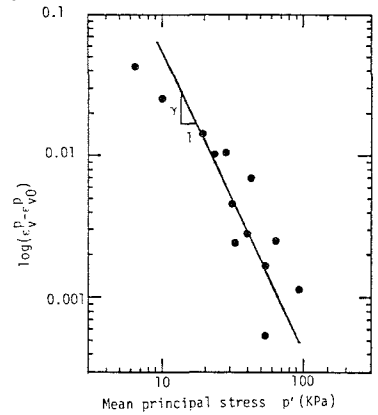


図-11 $\log(e_V^D - e_V^D) \sim \log p'$ 曲線

⑥初期塑性硬化係数 K_{p_0} 、⑦せん断弾性係数 G が必要となる。これらのうち、 λ 、 κ は、各OCRについて図-10に示すせん断に先立つ等方圧密～膨張試験より得られた正規圧密部および過圧密部の直線部分の勾配より、また a/a_0 は、同様に圧密降伏応力 $2a$ および過圧密部の直線部分の大きさ $2a_0$ より求め、平均して各々 $\lambda = 0.4438$ 、 $\kappa = 0.0594$ および $a/a_0 = 1.77$ とした。有効せん断抵抗角 ϕ' は各圧密応力での正規圧密供試体 (OCR=1) についての試験より得られたものを用い、限界状態での応力比を $m=1.69$ とした。 γ は、各OCRに対する実験データを図-11に示す $\log(e_V^D - e_V^D) \sim \log p'$ 面上で整理したうえで $\gamma=2.15$ とした。 K_{p_0} は、 10^5 kPaとした。せん断弾性係数 G は、Hardin & Black¹⁴⁾ の式より間隙比と圧密圧力から求めた。

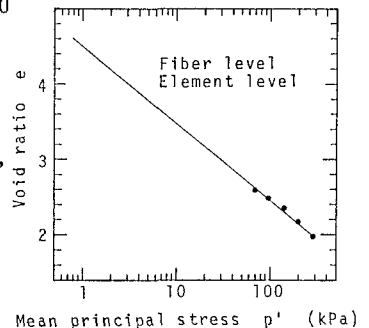


図-12 等方圧縮過程

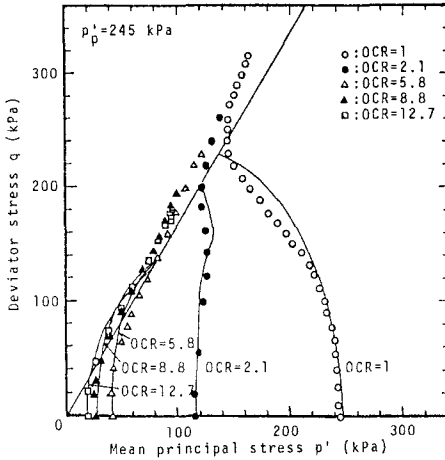


図-13 有効応力経路

5. 3 等方圧縮過程

図-12 はせん断過程に先立つ等方圧縮過程において、異方硬化モデルを導入した有限要素法による計算アルゴリズムの妥当性を検討し、さらに実際の地盤材料に対する異方硬化モデルの適用性を検証するために、一例として $p'_p=295$ kPa の場合の実験結果 (●印)、自重による初期応力状態から出発して所定の圧密圧力まで行った有限要素法による各種分点での計算結果 (実線) および fiber レベルでの計算結果 (実線) を $e \sim \log p'$ 面上で整理したものである。これより、有限要素法による計算結果は、積分点による $e \sim \log p'$ 曲線の差異はほとんどなく、その傾きが入力で与えたものと、また fiber レベルでの計算結果と一致していることから、本計算アルゴリズムの妥当性が確認される。また、今回は 1 要素で計算を行ったが、等方圧縮過程の最終段階においてもせん断応力が若干生ずるのみでほぼ等方応力状態になっていたことから、実験条件に対する計算結果の近似が良好であったものと思われる。さらに、計算結果は実験結果をかなりよく表現できていることから、等方圧縮過程における異方硬化モデルの適用の妥当性がほぼ確認できたものと思われる。

5. 4 せん断過程

(1) 非排水三軸圧縮試験

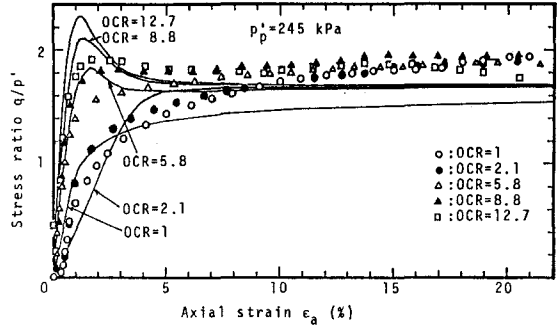


図-14 応力比～軸ひずみ関係

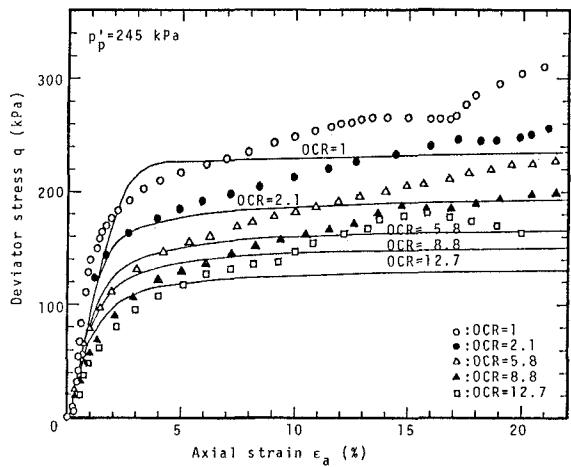


図-15 軸差応力～軸ひずみ関係

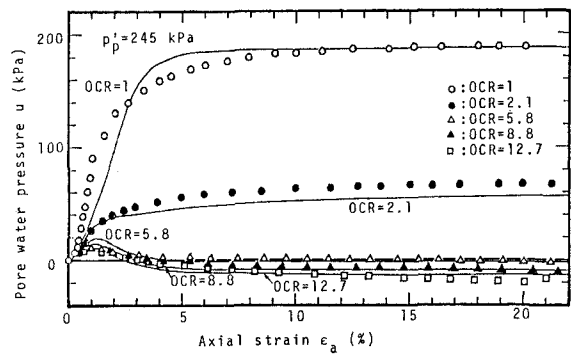


図-16 間隙水圧～軸ひずみ関係

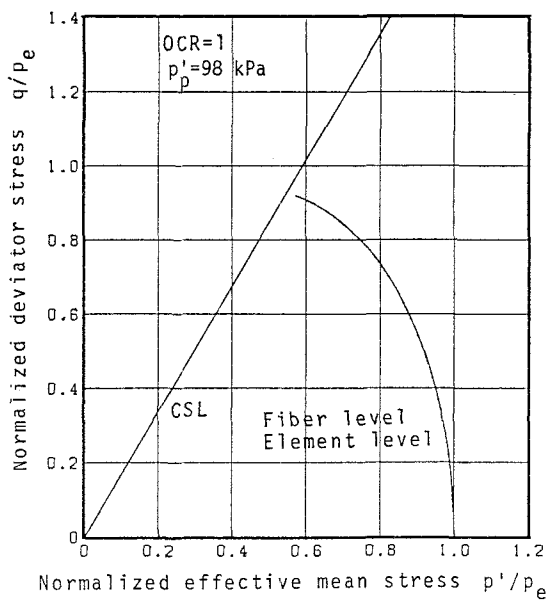


図-17(a) $p'/p_e \sim q/p_e$ 関係

図-13 ～16は、三軸圧縮試験結果（○，●，△，▲，□印）およびfiber レベルでの計算結果（実線）を OCR をパラメータとして各々有効応力経路、応力比～軸ひずみ関係、軸差応力～軸ひずみ関係および間隙水圧～軸ひずみ関係に関して示したものである。図-13 の有効応力経路に関しては、OCR=1および2.1の場合には計算結果と実験結果とはよく一致しているが、OCR が大きくなるにしたがい、計算結果は実験結果からはずれていく傾向が見られる。図-14 の応力比～軸ひずみ関係および図-15 の軸差応力～軸ひずみ関係とも、計算結果と実験結果とは定量的には一致していないが、定性的には計算結果は実験結果の傾向をおおむね表現できているものと思われる。また、図-16 の間隙水圧～軸ひずみ関係に関しては、計算結果は実験結果を定量的にもよく表現できている。以上より、非排水三軸圧縮試験に関しては、fiber レベルにおいて異方硬化モデルの適用の妥当性がおおむね確認できたものと思われる。

(2) 排水三軸圧縮試験

図-17 (a) ～(d) は、せん断過程における有限要素法による計算アルゴリズムの妥当性を検討するために、一例として $p'_p = 98\text{kPa}$ の場合について各々等価圧密圧力 p_e で正規化した有効応力経路 ($p'/p_e \sim q/p_e$ 関係)、応力比～せん断ひずみ関係、軸差応力～せん断ひずみ

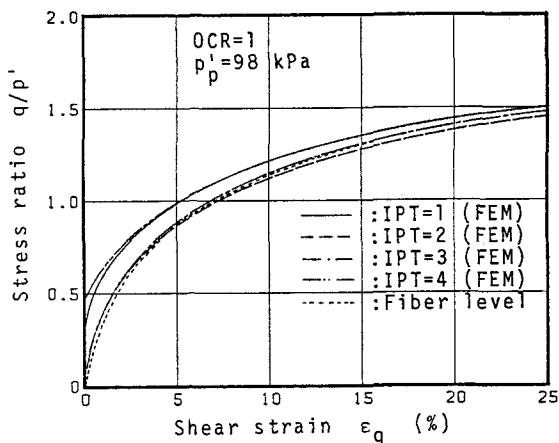


図-17(b) 応力比～せん断ひずみ関係

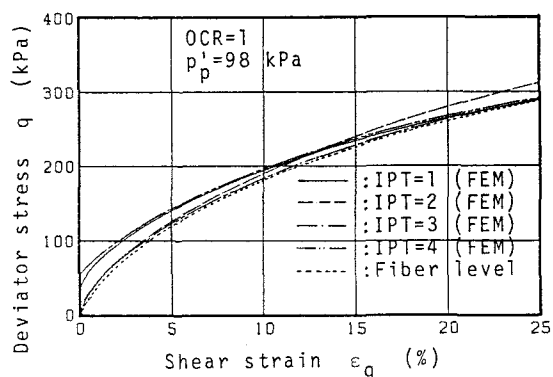


図-17(c) 軸差応力～せん断ひずみ関係

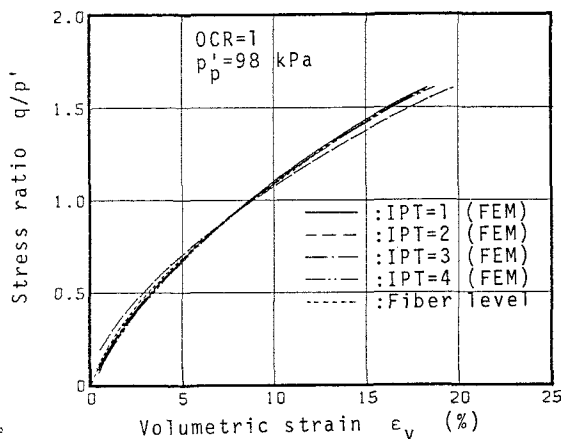


図-17(d) 応力比～体積ひずみ関係

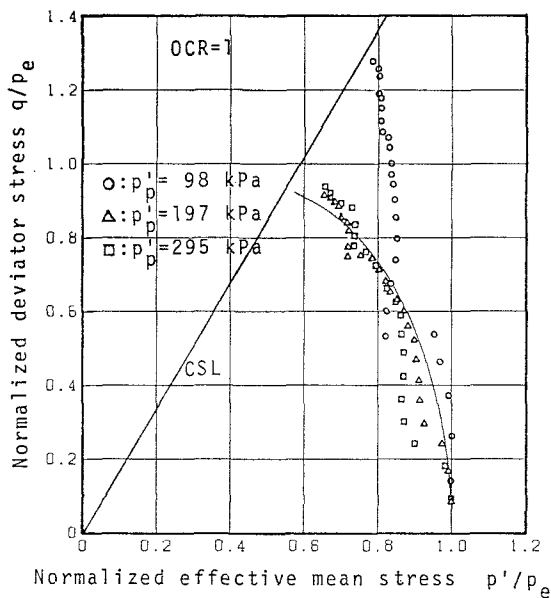


図-18 $p'/p_e \sim q/p_e$ 関係

み関係および応力比～体積ひずみ関係に関して有限要素法およびfiber レベルにおける計算結果を示したものである。これより、有限要素法による計算結果は積分点 (IPT で区別する) により若干の差異が認められるがfiber レベルにおける計算結果とおおむね一致していることから有限要素法の本計算アルゴリズムの妥当性が確認される。また、積分点3 (IPT=3) における計算結果がfiber レベルにおける計算結果と最も良く一致している。これは、せん断開始時、すなわち、等方圧縮終了時における応力状態が他の積分点に比べ最も等方状態に近く計算条件がfiber レベルでのものに最も近かったためと考えられる。以下に示す計算結果は有限要素法による積分点3のものである。

図-18 ～21は、三軸圧縮試験結果 (○, △, □印) および積分点3における計算結果 (実線) を圧密圧力 p'_p をパラメータとして各々有効応力経路、応力比～せん断ひずみ関係、軸差応力～せん断ひずみ関係および応力比～体積ひずみ関係に関して示したものである。図-18 の $p'/p_e \sim q/p_e$ 関係に関しては、各積分点における計算結果とfiber レベルでの計算結果とは全く一致しており本計算アルゴリズムの妥当性が確認される。一方、実験結果と計算結果とを比較すると、計算結果は $p'_p = 98 \text{ kPa}$ の場合には $p'/p_e = 0.8$ 付近から実験結果からはずれる傾向が見られるが、この他はおおむね計算結果は実験結果を表現している。

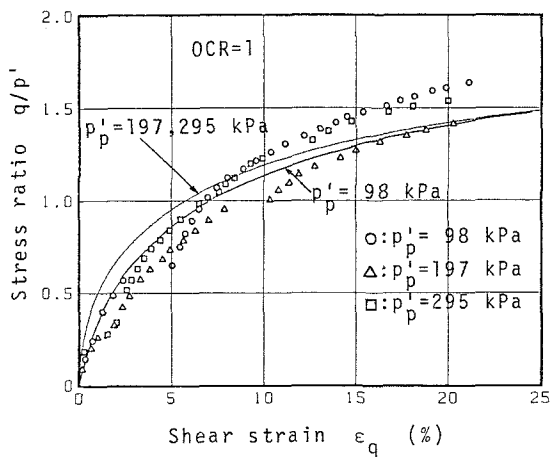


図-19 応力比～せん断ひずみ関係

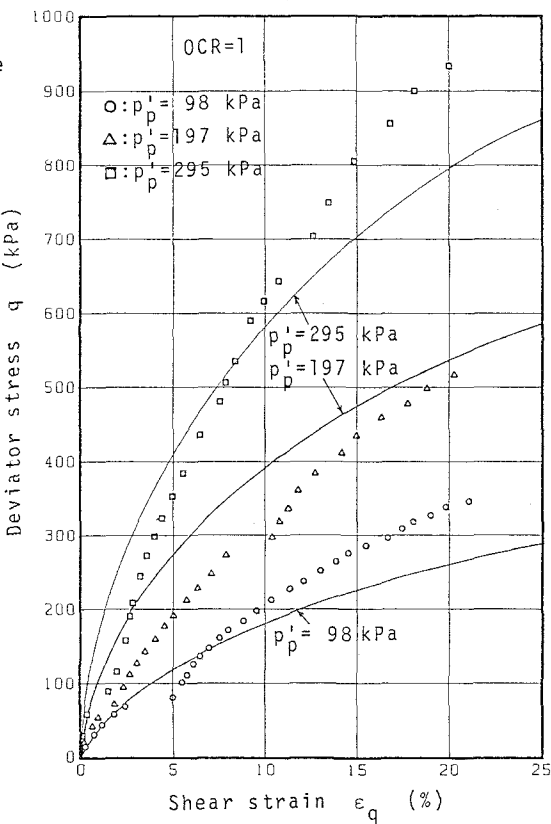


図-20 軸差応力～せん断ひずみ関係

図-18 の $p'/p_e \sim q/p_e$ 関係に関しては、各積分点における計算結果とfiber レベルでの計算結果とは全く一致しており本計算アルゴリズムの妥当性が確認される。一方、実験結果と計算結果とを比較すると、計算結果は $p'_p = 98 \text{ kPa}$ の場合には $p'/p_e = 0.8$ 付近から実験結果からはずれる傾向が見られるが、この他はおおむね計算結果は実験結果を表現している。

図-19 の応力比～せん断ひずみ関係および図-20 の軸差応力～せん断ひずみ関係に関しては、非排水試験の場合と同様に各圧密圧力の場合とも計算結果は実験結果の傾向をおおむね表現できているものと思われる。図-21 の応力比～体積ひずみ関係に関しては、計算結果は実験結果を過小に見積る傾向にあり、図-18 ～20の検証結果に比較して多少近似度合いが低下する傾向にある。

以上のことから、異方硬化モデルを導入した有限要素法の計算アルゴリズムによる本法は要素試験レベルでの等方圧縮およびせん断過程で示す実際の地盤材料の応力・変形特性を大略的に表現し得ることが確認された。

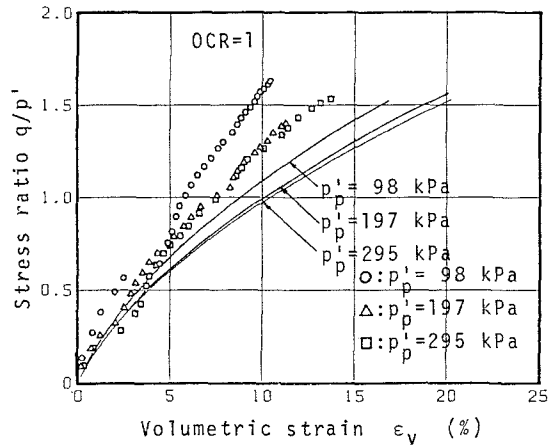


図-21 応力比～体積ひずみ関係

6. 結言

本研究は、等方圧密した有機質土の非排水三軸圧縮試験結果および排水三軸圧縮試験結果に基づき異方硬化モデルの実際の地盤材料に対する適用性の検証を試みたもので、実験結果と異方硬化モデルによるfiberレベルでの計算結果および有限要素法による要素試験解析結果との比較検討を行ったものである。本研究の成果を要約すれば以下になる。

- (1) 等方圧縮過程および排水三軸圧縮試験における有限要素法による要素試験解析結果とfiberレベルでの計算結果はほとんど一致する結果となり、有限要素法による本計算アルゴリズムの妥当性を要素試験レベルにおいてほぼ確認した。
- (2) 等方圧縮およびせん断過程においては、fiberレベルのみならず有限要素法による計算結果は実験結果をおおむね表現し得た。
- (3) 要素試験レベルにおいて、異方硬化モデルを導入した本手法の実際の地盤材料に対する適用性がおおむね確認できた。

謝辞：実験およびデータ整理で本校卒業生古川昭彦、樋口裕および研究科学生山内邦彦の諸君の多大なる協力を得た。記して、深甚なる謝意を表します。なお、本研究の数値計算には、防衛大学校共同利用電子計算機室のHITAC M-200Hを使用した。

参考文献

- 1) 松井保・阿部信晴：土の構成式入門 5.弾塑性体理論と適用（その1），土と基礎，31-11(310)，pp.97-105，November，1983.
- 2) Roscoe, K.H. and J.B. Burland: On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay, Engineering Plasticity (ed. J. Heyman and F.A. Leckie), Cambridge University Press, pp.535-609, 1968.

- 3) Krieg, R.D.: A practical two surface plasticity theory, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 42, pp. 641-646, 1975.
- 4) Dafalias, Y.F. and E.P. Popov: Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, Vol. 43, pp. 645-651, 1976.
- 5) Mróz, Z., V.A. Norris and O.C. Zienkiewicz: Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils, *Geotechnique*, Vol. 29, No. 1, pp. 1-34, 1979.
- 6) Dafalias Y.F. and L.R. Herrmann: Bounding Surface Formulation of Soil Plasticity, *Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads* (ed. G.N. Pande and O.C. Zienkiewicz), John Wiley & Sons, pp. 253-282, 1982.
- 7) 岡本敏郎・田中英治: 異方硬化則に基づいた構成式の軟岩への適用, 土木学会第37回年次学術講演会, III-120, pp. 237-238, 1982.
- 8) 北村良介・春山元寿・高橋秀一: Two-surfaceモデルによる地盤材料の構成式について (第2報), 土木学会第39回年次学術講演会, III-3, pp. 5-6, 1984.
- 9) Yamada, Y., N. Yoshimura and T. Sakurai: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elasto-plastic problems by the finite element method, *Int. Journal Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 343-354, 1968.
- 10) Bathe, K.H., H. Ozdemir and E.L. Wilson: Static and dynamic geometrical and material nonlinear analysis, *Structural Engineering Lab., Univ. of California, Berkeley*, Feb., 1974.
- 11) G.C. Nayak and O.C. Zienkiewicz: Elasto-plastic analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 5, pp. 113-135, 1972.
- 12) 森雅美・山口晴幸・石川信隆: Mrózモデルの有機質土(黒ぼく)への適用, 第40回土木学会年次学術講演会, III-264, pp. 527-528, 1985.
- 13) 森雅美・山口晴幸: 有機質土の要素試験結果および異方硬化モデルによる解析, 「泥炭に関する研究討論会」論文集, 1986.
- 14) Hardin, B.O. and W.L. Black: Vibration modulus of normally consolidated clay, *Proc. ASCE*, Vol. 94, No. SM2, pp. 353-369, 1968.

(1985年10月18日受付)