

繰返し荷重をうける平面骨組の弾塑性解析に おける一効率化について

A PRACTICAL METHOD OF THE ELASTO-PLASTIC ANALYSIS
OF PLANE STEEL FRAMES UNDER REPEATED LOADING

* ** ***
成行義文 平尾 潔 児嶋弘行

By Yoshifumi Nariyuki, Kiyoshi Hirao, and Hiroyuki Kojima

In the elasto-plastic analysis of steel frames with respect to the occurrence of plastic zone in the direction of the member axis, the method which divides the plastic zone of each member into numerous elements is generally used to produce results with high accuracy. However, it is difficult to apply this kind of method to frames which have many members, especially, in the case of repeated and dynamic loading, because large memory capacity and long computer time is required.

In this paper, we propose a practical method of the analysis of plane frames under repeated loading, in which the above-mentioned faults are removed by using the equivalent linear moment-curvature relationship concept. The accuracy and practicability of this method is discussed on basis of numerical examples. Consequently, we conclude that the method proposed here is practical.

1. はじめに

近年、強震下における構造物の耐震安全性が、その非弾性挙動（荷重－変形関係等）と密接な関係にあることが明らかとなり、構造物のエネルギー吸収能力とその履歴吸収エネルギーとを対比した耐震設計法に関する研究が多く成されている。したがって、構造物の耐震安全性を解析的に検討するためには、精度よくその非弾性挙動を算定し得る動的弾塑性解析法が必要となっている。しかしながら、骨組の変形挙動に影響を及ぼす重要な要因である塑性域の拡がりを考慮したこの種の解析法は、多くの演算時間ならびに記憶容量を要するため、いまだ実用化には至っていない。一般に、繰返し荷重をうける骨組の弾塑性解析では、(1)繰返し荷重に対する断面の断面力－断面変形履歴関係の解析、(2)繰返し荷重をうける骨組の荷重－変位関係の解析が必要であり、この種の解析を効率化し、実用的な解析法を導くためには、これら(1)、(2)の解析においてそれぞれ効率化を計る必要がある。すなわち、(1)については、理論的に、あるいは実験、数値解析等の結果をもとに適当に定式化された断面力－断面変形関係を用い、また(2)については、部材を分割しないで塑性域の拡がりが考慮し得る部材力式を用いることにより、解析の効率化を計ることができるものと思われる。

* 工修 徳島大学講師 工学部土木工学科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

** 工博 徳島大学工業短期大学部教授 土木工学科 (同上)

*** 工修 徳島大学助教授 工学部土木工学科 (同上)

以上のようなことより、著者らは、塑性域の拡がりを考慮した実用的な弾塑性応答解析法を確立するための第一段階として、漸増荷重をうける平面骨組を対象とし、骨組を構成する部材内の非線形な $M-\phi$ 関係を等価な線形関係に置換えることにより、従来の解析法のように部材を分割することなしに塑性域の拡がりの影響を考慮し得る一弾塑性解析法を導いた。本研究では、その第二段階として、文献13)と同様な等価線形化手法を用いて繰返し荷重をうける部材全体の $M-\phi$ 関係を線形化し、これより得られる部材力式を用いた繰返し荷重をうける平面骨組を対象とした一実用弾塑性解析法を導いた。なお、ここでは、部材断面の $M-\phi$ 関係として、完全弾塑性型の応力-ひずみ特性を有する矩形断面の理論 $M-\phi$ 関係を誘導し用いている。一般に、鋼材においては、矩形断面は実用的な断面ではないが、本解析法の精度、演算時間等の検討には、問題ないものと思われる。

以下、本論文では、 $M-\phi$ 関係の等価線形化手法、矩形断面の理論 $M-\phi$ 関係式、および、解析に用いた変形法の基本式等について述べ、2・3の数値計算結果をもとに、本解析法の精度ならびに実用性等について若干の比較検討を行っている。

2. $M-\phi$ 履歴関係の等価線形化手法

一般に繰返し荷重等をうける部材内の各断面におけるモーメント(M)ー曲率(ϕ)関係はそれらの断面が過去に経験したモーメント履歴に影響されるため、漸増荷重を対象とした場合のように、部材全体にわたって同一の $M-\phi$ 関係を用いることはできない。今、図-1(a)のようなj端にモーメント M_j が作用する単一部材i-jを考え、断面の $M-\phi$ 履歴関係を図-2のように2倍対称型であると仮定する。ただし、添字*は反転時の諸量を示している。ここで、モーメント M_j が、図-2のように繰返した場合の部材i-j内のモーメント分布ならびに部材内の各断面における弾塑性境界等の変遷を示せば図-1(b)のようである。同図よりわかるようにモーメントの弾塑性域での反転に伴い、部材内の各断面における $M-\phi$ 関係の構成則が同一ではなくなる。従って、荷重反転後の部材端の変形等を理論的に求める場合、部材を異なる $M-\phi$ 履歴則を有するいくつかの部材要素(図-1(b)では3つ)に分ける必要がある。本研究では、このような部材内の $M-\phi$ 履歴関係を漸増荷重を対象にした文献13)と同様な方法により等価な線形関係に置換えている。ここでは、まず、単一部材の両端のたわみ角増分を求め、ついで、それらを用いた非線形 $M-\phi$ 履歴関係の等価線形化について述べる。

(1) 単一部材の両端のたわみ角増分 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j$

一般に、部材の繰返し挙動等は、各単調増加(あるいは減少)過程における増分に注目すれば比較的考え易い。図-3は、任意の単調増加(減少)過程にある単一部材i-jの増分変形状を示したものである。ここで、 $\bar{M}_i, \bar{\theta}_i$ および $\bar{M}_j$

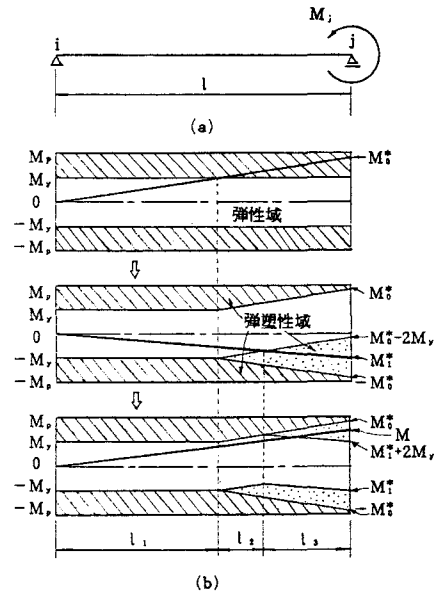


図-1 部材内の弾塑性境界の変遷

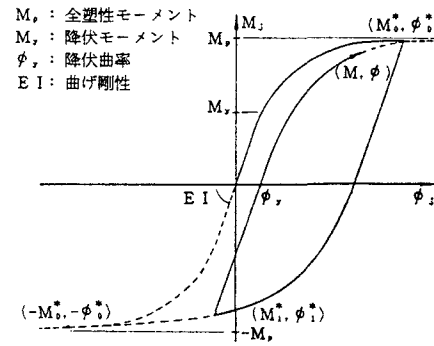


図-2 $M-\phi$ 履歴関係

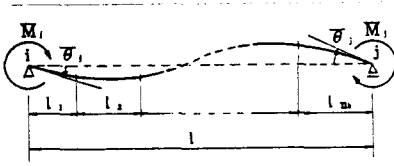


図-3 n個の要素から成る単一部材

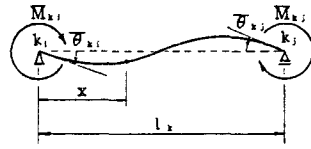


図-4 任意の部材要素 l_k

, $\bar{\theta}_j$ は、それぞれ i および j 端におけるモーメント荷重、たわみ角の増分であり、 $\bar{M}_i = \bar{M}_j = 0$ の場合は、当然変形増分は生じない。また、部材 ij はモーメント履歴を有するので、前述のように、異なる $M-\phi$ 履歴則を有する n 個の部材要素 (要素長 $l_k (k=1, 2, \dots, n)$) の集合と考えられる。

各々の部材要素内では、弾塑性境界等は連続的に変化しているため、各断面における $M-\phi$ 履歴関係を統一的に扱うことが可能である。今、図-4 のような増分材端モーメント $\bar{M}_{ki}$, $\bar{M}_{kj}$ が作用する部材要素 k を考える。この場合、要素端におけるたわみ角増分 $\bar{\theta}_{ki}$, $\bar{\theta}_{kj}$ は、部材要素内の任意断面 x における曲率増分を $\bar{\phi}_{kx}$ とすると、 ϕ -法公式¹⁵⁾より、式(1)のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_{ki} &= \int_0^{l_k} \bar{\phi}_{kx} \left(1 - \frac{x}{l_k}\right) dx \\ \bar{\theta}_{kj} &= - \int_0^{l_k} \bar{\phi}_{kx} \frac{x}{l_k} dx \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

従って、図-3 に示すような単一部材 ij の両端のたわみ角増分 $\bar{\theta}_i$, $\bar{\theta}_j$ は、式(1)を用いて幾何学的関係よりつぎのように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_i &= \frac{1}{l} \left[\sum_{k=1}^n \bar{\theta}_{ki} l_k - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^k (\bar{\theta}_{i,j} - \bar{\theta}_{i,i}) \right\} l_{k+1} \right] \\ \bar{\theta}_j &= \sum_{k=1}^n (\bar{\theta}_{kj} - \bar{\theta}_{ki}) + \bar{\theta}_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) 等価線形 $m^0-\phi^0$ 関係

図-5(a) は、単一部材 ij 内の任意断面 ξ におけるモーメント m_ξ が m_ξ^* で反転した場合の2倍対称型の $m-\phi$ 履歴ループを示している。ただし、 m および ϕ は、降伏モーメント M_y および降伏曲率 ϕ_y で正規化されたモーメントおよび曲率であり、添字 i, j は、部材の i, j 端における諸量であることを示している。ここで、任意断面 ξ におけるモーメント反転後の $m-\phi$ 関係の履歴経路を反転時の残留諸量 (m_ξ^* , ϕ_ξ^*) を除いて (すなわち、 $(m_\xi^*$, $\phi_\xi^*)$ を原点として)、 $m^0 (= m_\xi - m_\xi^*) - \phi^0 (= \phi_\xi - \phi_\xi^*)$ 座標により表わすと、一般に同図(b)のようである。部材内の各断面の $m^0-\phi^0$ 曲線は、図の太線部に含まれている。

本研究では、この $m^0-\phi^0$ 曲線群を漸増過程を対象

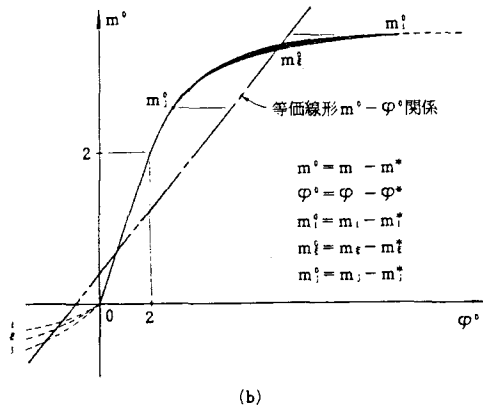
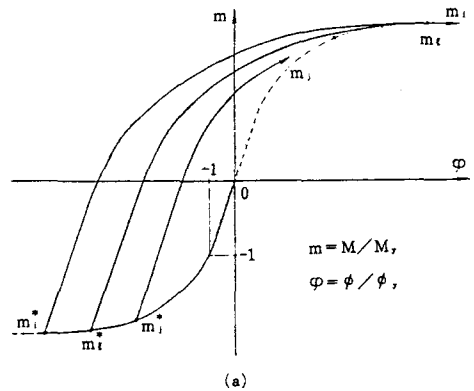


図-5 等価線形 $m^0-\phi^0$ 関係 (モーメントが同方向に増減する場合)

とした文献13)と同様な手法により式(3)で表わされるような等価な線形関係に置換えている(図中の一点鎖線)。

$$\varphi^0 = \alpha^0 + \beta m^0 \tag{3}$$

すなわち、式(3)のような $m^0 - \varphi^0$ 関係を用いた場合の部材両端のたわみ角増分 $\bar{\theta}_{e,i}$ 、 $\bar{\theta}_{e,j}$ は、 ϕ -法公式により直に式(4)のように得られ、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_{e,i} &= k' \{ 3 \alpha^0 + (2 m_i^0 + m_j^0) \beta \} \\ \bar{\theta}_{e,j} &= k' \{ 3 \alpha^0 + (m_i^0 + 2 m_j^0) \beta \} \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

ただし、 $k' = \frac{\phi_e l}{6}$

これらと理論 $m^0 - \varphi^0$ 関係を式(1)に代入して得られる理論たわみ角増分 $\bar{\theta}_{t,i}$ 、 $\bar{\theta}_{t,j}$ とを式(5)のように等置することにより、式(3)を決定するパラメータ α^0 、 β が式(6)のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta}_{e,i} &= \bar{\theta}_{t,i} \quad , \quad \bar{\theta}_{e,j} = \bar{\theta}_{t,j} \\ \alpha^0 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\bar{\theta}_{t,i}}{k'} - (2 m_i^0 + m_j^0) \beta \right\} \\ \beta &= \frac{\bar{\theta}_{t,i} - \bar{\theta}_{t,j}}{k' (m_i^0 - m_j^0)} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

以上は、図-5(a)に示したような部材内のモーメントが同時に同じ方向に反転する場合であるが、図-6(a)のように、部材内の各断面におけるモーメントの進行方向が異なる場合($m^0 - \varphi^0$ 曲線は、同図(b)のようである)も全く同様に等価線形 $m^0 - \varphi^0$ 関係を求めることができる。また、 $m - \varphi$ 履歴特性は、2倍対称型である必要はなく、式(1)における任意の部材要素 k の両端のたわみ角増分 $\bar{\theta}_{k,i}$ 、 $\bar{\theta}_{k,j}$ を求めるのに必要な曲率増分 $\bar{\phi}_{k,k}$ が得られるように定式化されていればよい。

3. 矩形断面の理論 $m - \varphi$ 履歴関係 および たわみ角増分 $\bar{\theta}$ 。

一般に、矩形断面等の簡単な断面を除き、理論的に非線形断面力-断面変形関係を導くことは容易ではない。また、簡単な断面においても、それらの履歴関係を理論的に求めることは難しく、そのような関係式はほとんど報告されていない。そこで本研究では、矩形断面を対象として理論的にそれらの関係を誘導し、これを用いて本解析法の妥当性を検討している。以下、矩形断面の理論 $m - \varphi$ 履歴関係およびこれを用いた場合の任意の部材要素 e のたわみ角増分 $\bar{\theta}_{e,i}$ 、 $\bar{\theta}_{e,j}$ について簡単に示す。

(1) 理論 $m - \varphi$ 履歴関係

応力(σ)-ひずみ(ε)特性は、図-7に示すような完全弾塑性型とし、平面保持を仮定して、断面内のエネルギーの釣り合いを考えることにより、理論 $M - \phi$ 履歴関係を求めた。

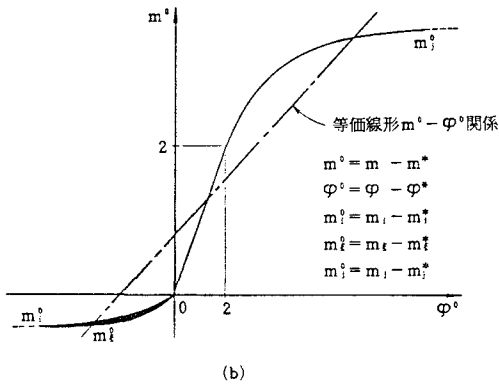
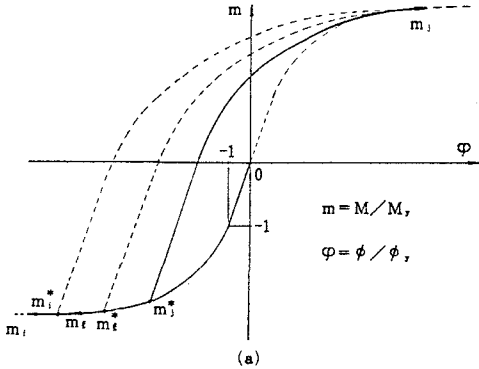


図-6 等価線形 $m^0 - \varphi^0$ 関係 (モーメントが異方向に増減する場合)

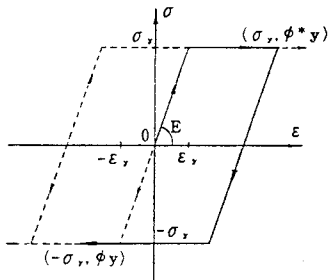


図-7 応力-ひずみ履歴関係

まず、図-8のようにモーメント M が反転した場合(実線)を考える。 M^*, ϕ^* は、それぞれ反転時の諸量を表わしている。このとき、断面内のひずみ分布は、図-9のように変遷する。また断面内の中立軸下方 y の位置の応力-ひずみ履歴経路は、図-7の実線のようなのである。ここで、モーメント反転後の断面に貯えられるエネルギー $\bar{U}$ は、次式のように表わされる。

$$\bar{U} = \int_{\phi^*}^{\phi} M \, d\phi = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\phi^*}^{\phi} \sigma \, d\varepsilon \, dy \quad (7)$$

上式を ϕ で微分することにより、図-8のような反転後の M と ϕ の関係がつぎのように得られる。

$$\frac{d\bar{U}}{d\phi} = M = \frac{d}{d\phi} \left\{ b \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\phi^*}^{\phi} \sigma \, d\varepsilon \, dy \right\} \quad (8)$$

同様な操作をすべてのパターンについて行なった結果、完全弾塑性型の応力-ひずみ関係を有する矩形断面の理論 $M-\phi$ 関係における反転後の履歴則はつぎのように表わされることがわかった。

$$\left. \begin{aligned} \text{① 弾性域} \quad (s m_n^* \leq s m \leq s m_{n+1}^*, \therefore m_{n+1}^* = m_n^* + 2s) \\ \varphi = m + \varphi_n^* - m_n^* \\ \text{② 一次塑性域} \quad (s m_{k+1}^* \leq s m \leq s m_{k-1}^*, \therefore g = n - 2(k-1), k=1, 2, \dots, k_{max}) \\ s\varphi = \frac{2s}{\sqrt{3-s(m-m_k^*)}} + \varphi_k^* \\ \text{③ 二次塑性域} \quad (s m_k^* \leq s m \leq m_p) \\ \varphi = \frac{s}{\sqrt{3-2sm}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 $m = M/M_p$, $m_p = M_p/M_p$ (M_p は全塑性モーメント), $\varphi = \phi/\phi_p$ である。 n は、履歴過程における塑性域でのモーメントの反転回数を表わしており、初期漸増過程で反転した場合は $n=0$ である。新たな一次塑性域において反転した場合 n は1だけ増加し、既通過の履歴経路に再び達した場合は、その経路が有していた n に戻る。 $m_i^*, \varphi_i^* (i=0, 1, 2, \dots, n)$ は、塑性域における各反転時のモーメントと曲率を表わしている。 s は、反転後の経路の向きを表わす係数であり、 $s = (-1)^i$ により与えられる。ここで、 $m_k^* > 0$ の時、 $z = n+1$, $m_k^* < 0$ の時 $z = n$ である。 k_{max} は、一次塑性域の個数を表わしており、 n が偶数の場合 $k_{max} = n/2 + 1$, n が奇数の場合 $k_{max} = (n+1)/2$ である。また、漸増過程の場合は、弾性域と二次塑性域のみであり残留諸量(*印)は零である。図-10は、一例として $n=4$ の場合の $m-\varphi$ 履歴関係を模式的に示したものである。式(9)および図-10より、この場合の履歴則は基本的に2倍対称型となっているのがわかる。

(2) 部材要素 e のたわみ角増分 $\bar{\theta}_{i,j}, \bar{\theta}_{j,i}$

ここでは、任意の部材要素 e の両端 i, j におけるたわみ角増分 $\bar{\theta}_{i,j}, \bar{\theta}_{j,i}$ の求め方について簡単に示す。式(9)および図-10より、部材要素 e 内の任意断面 x における $(m_{x,n}^*, \varphi_{x,n}^*)$ 以後の $m_{x,n}-\varphi_{x,n}$ 履歴経路は、 m_k^* の正負および n によって異なり、基本的に、図-11

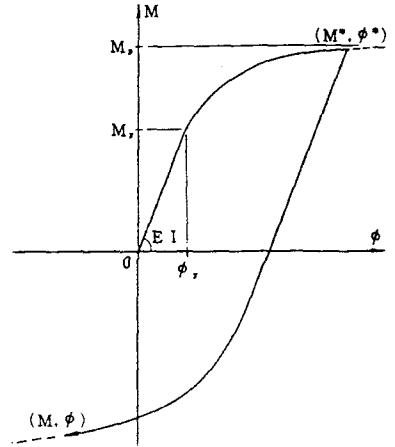


図-8 反転後の $M-\phi$ 履歴経路

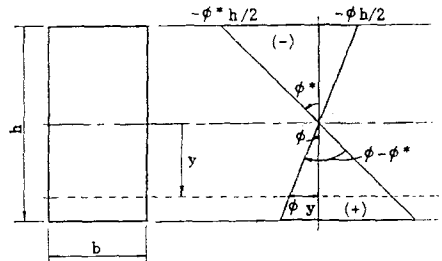


図-9 矩形断面およびひずみ分布の変遷

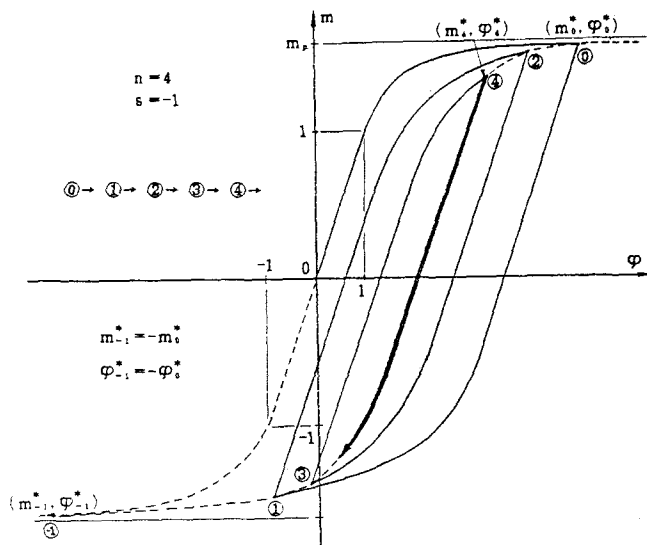


図-10 矩形断面の理論 m - φ 履歴曲線

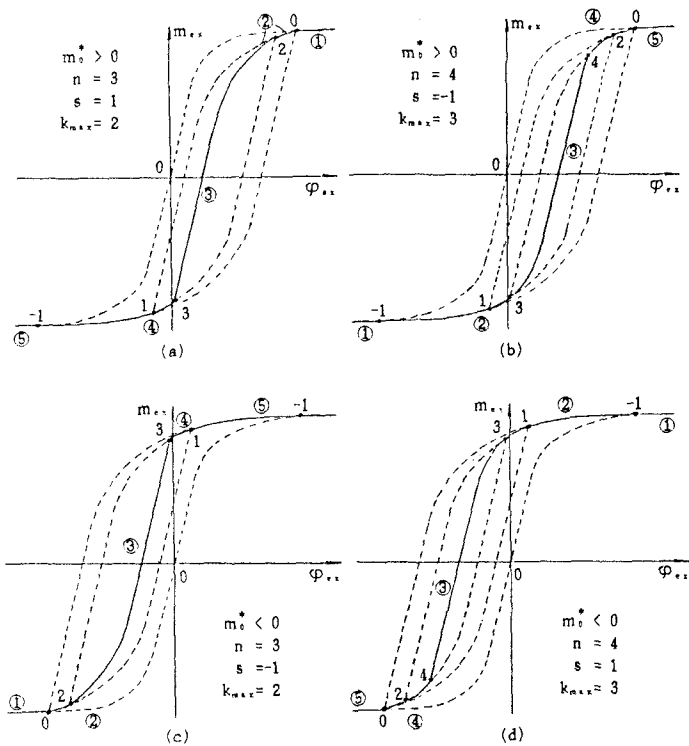


図-11 m_{s-1} - φ_{s-1} 履歴経路の4パターン

(a)~(d)のような4つのパターンに分類される。これらの経路は統一的に次式により表わされる。

$$\textcircled{1} \quad \text{二次塑性域} \quad (s m_{e,x}^* \leq m_{e,x}^0 \leq s m_{e,x}^* < m_p^*)$$

$$\varphi_{e,x}^0 = \frac{s}{\sqrt{3 - 2 s m_{e,x}^0}}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{一次塑性域} \quad (s m_{e,x}^* \leq m_{e,x}^0 \leq s m_{e,x}^*, \quad \therefore g = n - 2(k - 1), \quad k = 1, 2, \dots, k_{max})$$

$${}_k \varphi_{e,x}^0 = \frac{2s}{\sqrt{3 - s(m_{e,x}^0 - m_{e,x}^*)}} + \varphi_{e,x}^*$$

$$\textcircled{3} \quad \text{弾性域} \quad (s m_{e,x}^* \leq m_{e,x}^0 \leq s m_{e,x}^*)$$

$$\varphi_{e,x}^0 = m_{e,x}^0 - m_{e,x}^* + \varphi_{e,x}^*$$

$$\textcircled{4} \quad \text{一次塑性域} \quad (s m_{e,x}^* \leq m_{e,x}^0 \leq s m_{e,x}^*, \quad \therefore g' = n - (2k' - 1),$$

$$k' = 1, 2, \dots, k_{max} - k_0, \quad n \text{ が偶数}; k_0 = 1, \quad n \text{ が奇数}; k_0 = 0)$$

$${}_k \varphi_{e,x}^0 = \frac{-2s}{\sqrt{3 + s(m_{e,x}^0 - m_{e,x}^*)}} + \varphi_{e,x}^*$$

$$\textcircled{5} \quad \text{二次塑性域} \quad (-m_p^* < s m_{e,x}^0 \leq s m_{e,x}^*, \quad n - 2(k_{max} - k_0))$$

$$\varphi_{e,x}^0 = \frac{-s}{\sqrt{3 + 2 s m_{e,x}^0}}$$

(10)

ここで、 $m_{e,x}^0 = m_{e,x} - m_{e,x}^*$ 、 $m_{e,x}^* = m_{e,x}^* - m_{e,x}^*$ 、 $\varphi_{e,x}^0 = \varphi_{e,x} - \varphi_{e,x}^*$ であり、 $m_{e,x}^*$ および $\varphi_{e,x}^*$ は、それぞれ、モーメントおよび曲率の増分を考える場合の初期値である。また、図-11中の①~⑤の番号は、式(10)中のそれらと対応している。また、式(10)中の $\varphi_{e,x}^*$ ($t = 0, 1, 2, \dots, n$)は、式(11)のようにモーメントの関数として表わされる。

$$\varphi_{e,x,t}^* = \sum_{q=1}^t \frac{2s \times (-1)^q}{\sqrt{3 - (-1)^q s(m_{e,x,q}^* - m_{e,x,n-1}^*)}} + \frac{s}{\sqrt{3 - 2 s m_{e,x,0}^*}}$$

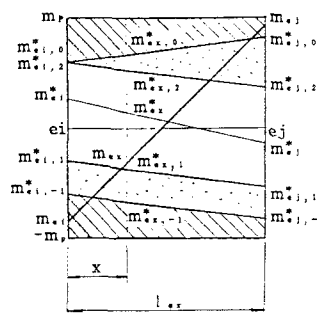
($r = n - q + 1, \quad q = 1, 2, \dots, t, \quad t = 1, 2, \dots, n$)

(11)

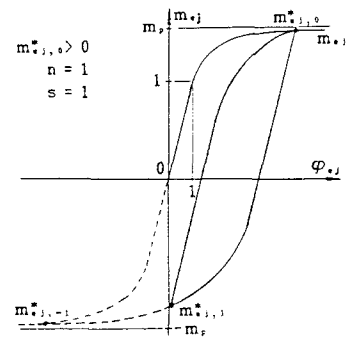
$$\varphi_{e,x,0}^* = \frac{s}{\sqrt{3 - 2 s m_{e,x,0}^*}}$$

図-12(a)は、任意の部材要素e内の弾性、弾塑性境界分布およびモーメント分布等の1例を示したものであり、同図(b)は、j端の $m_{e,j} - \varphi_{e,j}$ 履歴関係を示している。

部材要素eの両端のたわみ角増分 $\bar{\theta}_{e,i}$ 、 $\bar{\theta}_{e,j}$ は、式(1)に、式(10)を代入することにより式(12)のように得られる。



(a)



(b)

図-12 要素e内の弾塑性境界およびモーメント分布

$$\bar{\theta}_{e,i} = \int_0^{l_0} \bar{\phi}_{e,x} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) dx = \phi_y \int_0^{l_0} \varphi_{e,x}^0 \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) dx$$

$$\bar{\theta}_{e,j} = - \int_0^{l_0} \bar{\phi}_{e,x} \frac{x}{l_0} dx = - \phi_y \int_0^{l_0} \varphi_{e,x}^0 \frac{x}{l_0} dx$$

(12)

4. 変形法の基本式および解析方法

ここでは、本法で用いた部材力式および比較に用いた部材を分割する解析法における部材力式を示すとともに、それらを用いた解析方法について簡単に述べる。

(1) 変形法の基本式（両端剛節部材の部材力式）

図-13は、任意の荷重反転点からのモーメント増分 $\bar{M}_i, \bar{M}_j$ および軸方向力増分 $\bar{N}$ （これらを部材力増分とよぶ）が作用した場合の両材端の接線回転角増分 $\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_j$ および軸方向変形増分 $\bar{u}$ （これらを部材変形増分とよぶ）を示している。各諸量は、それぞれ図中の矢印の方向を正とする。ここで、 i 端から ξ の距離にある点のたわみ増分を $\bar{\eta}_\xi$ 、曲率増分を $\bar{\phi}_\xi$ 、モーメント増分を $\bar{M}_\xi$ とし、式(3)を考慮すると、つぎのような曲げに関する微分方程式が得られる。ただし、 $\bar{\alpha} = \alpha^0 M_y$ 、 $\bar{M}_\xi = m_\xi^0 M_y$ 、 $\bar{\phi}_\xi = \phi_\xi^0 \phi_y$ である。

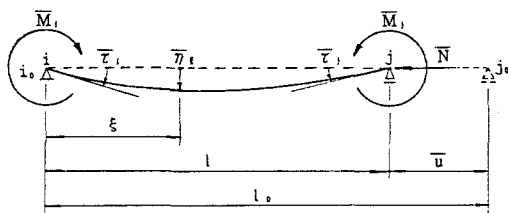


図-13 部材力と部材変形の増分の正方向

$$\frac{d^2 \bar{\eta}_\xi}{d \xi^2} = -\bar{\phi}_\xi = -\frac{1}{EI} (\bar{\alpha} + \beta \bar{M}_\xi) \quad (13)$$

式(13)に、 $\bar{M}_\xi = \bar{M}_i + (\bar{M}_j - \bar{M}_i) \xi / l$ なる関係を代入し、 $\bar{\eta}_\xi$ 、 $\bar{\phi}_\xi$ を求め、 i および j 端における境界条件（ $\xi = 0$ において $\bar{\eta}_\xi = \bar{\tau}_i$ 、 $\bar{\phi}_\xi = 0$ 、および、 $\xi = l$ において $\bar{\eta}_\xi = -\bar{\tau}_j$ 、 $\bar{\phi}_\xi = 0$ ）を考慮すれば、 $(\bar{M}_i, \bar{M}_j)$ と $(\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_j)$ との関係式が、式(14)のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_i &= \frac{4EI}{\beta l} \bar{\tau}_i - \frac{2EI}{\beta l} \bar{\tau}_j - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \\ \bar{M}_j &= -\frac{2EI}{\beta l} \bar{\tau}_i + \frac{4EI}{\beta l} \bar{\tau}_j - \frac{\bar{\alpha}}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

さらに、 $\bar{M}_i = M_i - M_i^*$ 、 $\bar{M}_j = M_j - M_j^*$ 、 $\bar{\tau}_i = \tau_i - \tau_i^*$ 、および $\bar{\tau}_j = \tau_j - \tau_j^*$ （添字* は反転時の諸量であることを示す。）を式(14)に代入して、 (M_i, M_j) と (τ_i, τ_j) との関係式に変換すると式(15)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{4EI}{\beta l} \tau_i - \frac{2EI}{\beta l} \tau_j - \frac{\alpha_i}{\beta} \\ M_j &= -\frac{2EI}{\beta l} \tau_i + \frac{4EI}{\beta l} \tau_j - \frac{\alpha_j}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 α_i, α_j は式(16)のようである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\alpha} - \beta M_i^* + \frac{2EI}{l} (2\tau_i^* - \tau_j^*) \\ \alpha_j &= \bar{\alpha} - \beta M_j^* - \frac{2EI}{l} (\tau_i^* - 2\tau_j^*) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

k^*			C^*
$\frac{EA}{l_0}$	0	0	0
0	$\frac{4EI}{\beta l}$	$-\frac{2EI}{\beta l}$	$-\frac{\alpha_i}{\beta}$
0	$-\frac{2EI}{\beta l}$	$\frac{4EI}{\beta l}$	$-\frac{\alpha_j}{\beta}$

表-1 剛性行列 k^* と荷重項 C^*

また、軸方向力 N と軸方向変形 u との関係は、線形として取り扱っており、部材の断面積を A とすると、周知のように $N = EA u / l$ と表わされる。以上のことより、両端剛節部材の部材力 $S^* = \{N, M_i, M_j\}^t$ と部材変形 $u^* = \{u, \tau_i, \tau_j\}^t$ との関係を行列表示すれば、次のようである。

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{k}^* \mathbf{u}^* + \mathbf{C}^* \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{k}^*$ および $\mathbf{C}^*$ は表-1に示すような剛性行列および荷重項である。

また、本研究では、3. で述べたような軸力Nの影響を無視した場合の理論M- ϕ 関係を用いており、曲げと軸力との降伏相関関係ならびに塑性流動則等は考慮していない。したがって、塑性端部材の部材力式は両端剛接部材の部材力式(式(17))より容易に導かれる。

(2) 比較に用いた部材分割法における部材力式

本解析法との比較に用いた分割法(部材を予め適当な部材要素に分割して解析する方法)では、部材の分割要素(各要素を1つの部材とみなす)内では曲率は、モーメントに比例して線形的に変化する($\phi_{\xi} = \phi_i + (\phi_j - \phi_i)\xi/l$)と仮定している。したがって、この場合には、前出の曲げに関する微分方程式(13)中の $\bar{\alpha}, \beta$ は、次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{EI(\bar{\phi}_j \bar{M}_i - \bar{\phi}_i \bar{M}_j)}{\bar{M}_j - \bar{M}_i} \\ \beta &= \frac{EI(\bar{\phi}_j - \bar{\phi}_i)}{\bar{M}_j - \bar{M}_i} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また、 ϕ -法公式より、式(16)中の τ_i^*, τ_j^* が次式のように得られるため、結局、分割法においては、

$$\left. \begin{aligned} \tau_i^* &= \int_0^1 \phi_{\xi}^* \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi = \frac{1}{6}(2\phi_i^* + \phi_j^*) \\ \tau_j^* &= \int_0^1 \phi_{\xi}^* \frac{\xi}{l} d\xi = \frac{1}{6}(\phi_i^* + 2\phi_j^*) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

表-1中の α_i, α_j は、式(20)のように表わされることになる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \bar{\alpha} - \beta M_i^* + EI \phi_i^* \\ \alpha_j &= \bar{\alpha} - \beta M_j^* + EI \phi_j^* \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(3) 解析方法

本法および分割法は、(1),(2)で述べたように基本式の形が全く同じであり、したがって解析方法もほとんど差異がない。両法とも、任意の荷重Pに対する収束変位uを求めるのに、Newton-Raphson法と等価な接線剛性法により求めているが、その収束計算に必要な増分基本式としては、表-1中の非線形パラメータ $\alpha_i, \alpha_j, \beta$ を微小荷重増分間では一定とみなして得られる次式を用いている。

$$\Delta \mathbf{S}^* = \mathbf{k}^* \Delta \mathbf{u}^* \quad (21)$$

また、本研究では、解析に際して次のような仮定を設けている。

- 1) 曲げモーメントと軸力およびせん断力との降伏相関関係は無視する。
- 2) 荷重は節点に作用する比例繰返し荷重および一定荷重とする。
- 3) 骨組の挙動は荷重制御によって追跡し、不安定領域での解析は行わない。
- 4) 幾何的非線形性は考慮しない。

なお、材端条件の変更および構造物の崩壊条件等は、文献(13)と同様である。

5. 計算例および考察

本研究では、本法(非分割法)の精度ならびに演算時間等を検討するために、図-14(a)のような矩形断

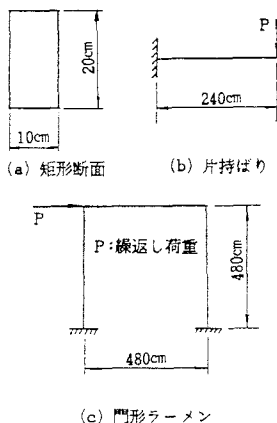


図-14 解析の対象とした断面形および平面骨組

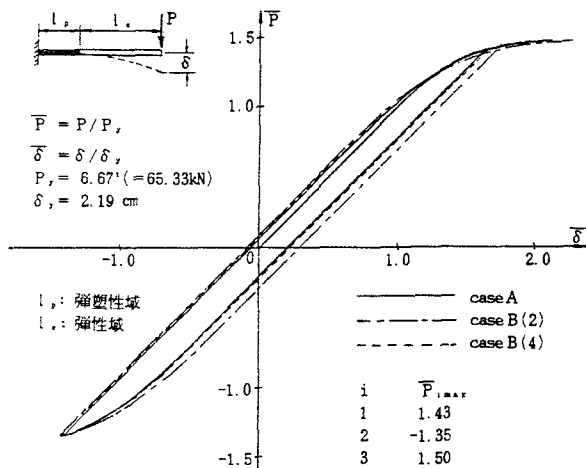


図-15 $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲線 (片持ばり)

面を有する片持ばり (同図(b)) および 1 層門型ラーメン (同図(c)) を対象として、本法および分割法等による解析をそれぞれ行ない、それらの結果を比較した。降伏応力 σ_y は 2400 kg/cm^2 (235.20 MPa)、弾性係数 E は、 $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (206.00 GPa) とした。

また、比較に用いた分割法では、解析に先立って、骨組を構成する各部材の非弾性領域を 2 あるいは 4 当分割し、各分割要素をそれぞれ 1 つの部材とみなして解析を行った。

以下の計算例においては、本解析法 (非分割法) を case A、分割法を case B (n) (n は弾塑性領域の等分割数)、塑性関節法を case C と表わすことにする。

(1) 精度に関する比較と考察

ここでは、図-14(b)、(c) に示した片持ちばりおよび門型ラーメンの荷重 (P) - 変位 (δ) 曲線をもとに本法の精度について若干の比較と考察を行う。図はすべて縦軸に降伏荷重 P_y で正規化された荷重 $\bar{P}$ を、また、横軸に降伏変位 δ_y で正規化された変位 $\bar{\delta}$ をとっている。

図-15は、片持ちばりを対象とし、繰返し荷重 P を図中に示すように変動させた場合 ($\bar{P}_{i, \max}$; i 回目の反転時の荷重) の $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲線を示したものである。また、分割法では、前述のように、図中の黒塗りの部分 (l_p) を n 等分割 (case B (n)) しており、以下の例でも同様である。図-15よりわかるように、本法 (case A) と分割法 (case B (4)) との結果は、ほとんど一致しており、ともに、理論 $M-\phi$ 曲線 (図-10) と同じパターンの履歴ループを描いている。

図-16は、門型ラーメンを対象として、同様な比較を行ったものである。本例では、前例と異なり、 $\bar{P}-\bar{\delta}$ 履歴ループが次第に大きくなるように $\bar{P}_{i, \max}$ を変動させている。この場合も、図-15と同様 case A と case B (4) の結果は、ほとんど一致しているのがわかる。また、塑性関節法 (case C) による結果も付加されているが、これらのループを比較すると、case C による結果は骨組の履歴吸収エネルギーをかなり過小評価する傾向が見られる。

本法と分割法との精度の優劣については、部材分割要素を 1 本の部材として取扱い、それらの部材内では曲率はモーメントに比例して線形的に変化するとみなして解析する分割法に比べ、部材内の曲率分布を厳密に考慮できる本法の方が精度的には当然優れているものと思われる。また、分割法では、部材の適当な分割方法および分割数を予め予備計算等によって求めておく必要がある。一般に繰返し荷重をうける場合には、

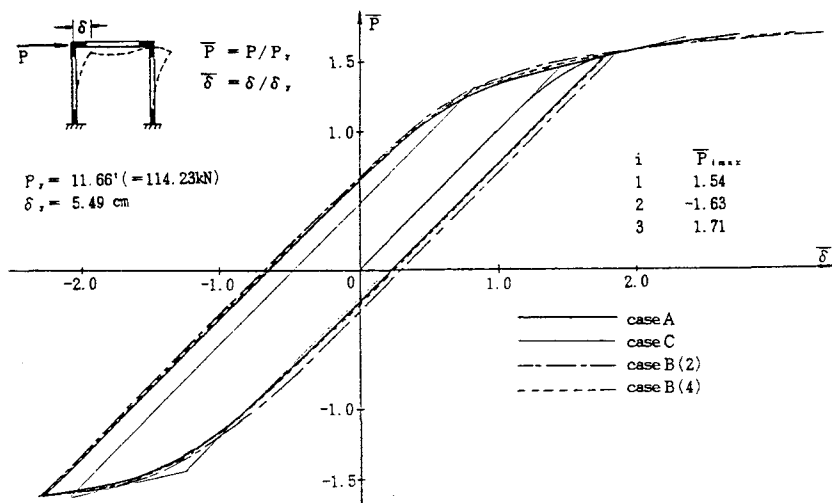


図-16 $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲線 (両端固定門形ラーメン)

初期負荷過程と繰返し過程とで、適当な部材の分割方法等が異なるため、分割法ではこの点に関する検討も必要である。しかし本法ではそのような予備計算等は一切不要である。

(2) 演算時間に関する比較と考察

ここでは、本法と分割法および塑性関節法との演算時間の比較を行なう。

表-2 は、図-14(b), (c) に示したような片持ばりおよびラーメンを対象とした場合の分割法(case B(4)) による演算時間 T と本法(case A) による演算時間 T_0 との比 $\bar{T}$ を示したものである。ただし、表中の L_c は荷重 P の繰返し回数を表わしており、漸増載荷のときは $L_c = 1$ である。また、各々の場合の反転時の荷重 $\bar{P}_{i, \dots}$ ($i=1, 2, \dots, 5$) は、片持ばりの場合、 $1.43 \rightarrow -1.48 \rightarrow 1.43 \rightarrow -1.4 \rightarrow 1.5$ 、ラーメンの場合、 $1.54 \rightarrow -1.63 \rightarrow 1.75 \rightarrow -1.71 \rightarrow 1.78$ というように変動させている。表-2 より、本法は分割法と比較して演算時間の面で大変有利な解析法であることがわかる。ここで、 L_c の増加とともに、 $\bar{T}$ が若干減少する傾向が見られる。これは、本例の場合、 $L_c = 3$ あるいは、4 以後の繰返し荷重の振幅の一時的な減少に伴い、本法において部材内の要素数が増えたためであると思われるが、 $\bar{T}$ の減少率は L_c の増加とともに急激に低下する傾向があること ($L_c = 6$ の場合、片持ばりで約 4.2、ラーメンで約 17)、また、一般に変動荷重の振幅がランダムに近い状態で変動すること等を考えれば、実用上問題はないものと思われる。

	$\bar{T} = T/T_0$	
	$L_c = 3$	$L_c = 5$
片持ばり	6.00	4.50
ラーメン	20.50	17.20

表-2 演算時間の比較
(case B(4) と case A)

表-3 は、同様に本法による演算時間 T_0 と塑性関節法による演算時間 T_p との比 $\bar{T}_p$ を示したものである。この表でも、表-2 の場合と同様に L_c の増加とともに $\bar{T}_p$ が若干大きくなる傾向が見られるが、 $\bar{T}_p$ は大旨 1.6 前後であり、漸増荷重を対象とした場合と同程度となっている。

これらのことより、本法は、塑性関節法には幾分劣るものの、従来の部材を分割する方法に比べて、演算時間の面で大変実用的な解析法であると思われる。

	$\bar{T}_p = T_p/T_0$	
	$L_c = 3$	$L_c = 5$
片持ばり	1.47	1.54
ラーメン	1.52	1.67

表-3 演算時間の比較
(case A と case C)

(3) 計算機内に要する記憶容量に関する考察

本研究における数値計算は、すべて徳島大学中型計算機FACOM-M360を利用し、一般ジョブのCクラス(region size=1024KB)によって計算した。本法と比較に用いた分割法の演算の流れおよびプログラムのステップ数はほとんど同じであり、また、両者の計算機内に要する記憶容量に影響を及ぼす最も大きな要因は、ともに骨組を構成する部材数および節点数である。従って、解析の対象とする骨組によって若干差があるが1スパンラーメンを考えると、同じ記憶容量が与えられれば、分割法による最適部材分割数を n_0 とすると、本法で解き得る層数と分割法で解き得る層数の比は n_0 以上となる。そして、その比は、 n_0 が大きい程、また、分割法で解き得る層数が多い程、大きくなる傾向がある。これらのことより、本法は、分割法に比べ、計算機内に要する記憶容量の面でも有利であることがわかる。

6. おわりに

本研究では、漸増荷重をうける平面骨組を対象とし、骨組を構成する部材を分割することなしに塑性域の拡がりを考慮し得る文献(13)の一実用弾塑性解析法を、繰返し荷重をうける場合にも適用し得るように拡張し、2, 3の数値計算結果をもとに本法の実用性(精度、演算時間等)について検討したものである。今回得られた主な結果を要約すると次のようである。

- (1) 本法(非分割法)は非弾性部材内の曲率分布を厳密に考慮し得るため、それらをいくつかの直線で近似する分割法よりも精度は良好である。
- (2) 分割法と本法との演算時間の比は、片持ばりで約4~6、1層1スパンラーメンで約17~20、また、本法と塑性関節法との演算時間の比は、約1.5~1.7であり、本法は塑性関節法には幾分劣るものの、従来の部材を分割する方法に比べて、演算時間の面で大変実用的な解析法である。
- (3) 本法は部材を分割する必要が無いため、分割法を用いる場合の最適部材分割数を画一的に n_0 とすると、本法で解き得る1スパンラーメンの層数は、分割法で解き得るその n_0 倍以上である。
- (4) (1)~(3)より、本法は比較的精度のよい、実用的な塑性域の拡がりを考慮した平面骨組の一弾塑性解析法であると思われる。

なお、本研究では、矩形断面の理論 $M-\phi$ 関係を用いて、本解析法の妥当性について検討したが、ここでの結論は、任意の $M-\phi$ 関係を用いた場合にもあてはまるものである。また、本法の任意の断面より成る平面骨組への適用、あるいは、曲げと軸力等の降伏相関関係ならびに残留応力等の考慮に関しては、各々の場合の断面力-断面変形関係の適当な定式化が必要であるが、これらに関しては、現在検討中である。

参考文献

- 1) 加藤 勉著：鉄骨構造の耐震設計，丸善，1983年1月。
- 2) R.Riddell and N.M.Newmark:Statistical Analysis of The Response of Nonlinear Systems Subjected to Earthquakes,department of Civil Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign Urbana Illinois,August,1979.
- 3) 武藤 清著：構造物の動的設計・耐震設計シリーズ／応用編，丸善，1977年1月。

- 4) 秋山 宏：建築物の耐震極限設計，東京大学出版会，1980年9月。
- 5) 大野・西岡・藤野：構造物が地震時に受ける塑性ひずみエネルギー量の定量的評価，土木学会論文報告集，No. 333, 1983年5月, pp. 91~99.
- 6) Ohno, T. and Nishioka, T.: An Experimental Study on Energy Absorption capacity of Columns in Reinforced Concrete Structures, Proc. of JSCE, No. 2, Oct. 1984, pp. 23~33.
- 7) J.R.Pique: On The Use Simple Model In Nonlinear Dynamic Analysis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering Constructed Facilities Division, Cambridge, September, 1976.
- 8) T.Ohta and T.Yamasaki: Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering the Effects of Residual Stress and Finite Deformation, Proc. of JSCE, No. 194, October, 1971, pp. 151~161.
- 9) 藤本・和田・白方・小杉：筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究，建築学会論文報告集，第 209号, 1973年7月, pp. 41~51.
- 10) 児嶋・平尾・武智：塑性域の拡がりを考慮した鋼構造平面骨組の一弾塑性解析，徳島大学工学部研究報告，第21号, 1976年3月, pp. 1~16.
- 11) 平尾・児嶋・成行：鋼構造平面骨組の材料の非線形性に関する2・3の考察，徳島大学工学部研究報告，第25号，1980年3月, pp. 99~114.
- 12) 平尾 潔：鋼構造平面骨組の非線形挙動と終局耐荷力に関する研究，京都大学学位論文，第1313号，1980年7月。
- 13) 成行・平尾・児嶋：等価M- ϕ 関係を用いた平面骨組の一弾塑性解析，構造工学論文集, Vol. 31A, 1985年3月, pp. 223~234.
- 14) 当麻・高橋・W.F.Chen：鋼管部材の弾塑性変形挙動解析，第6回日本地震工学シンポジウム講演集，1982年，pp. 721~728.
- 15) 太田俊明著：構造物の非弾性解析，技報堂出版，1980年1月, pp. 90.