

有限剛体モデルによる薄肉材の座屈問題の定式化

FORMULATION OF INSTABILITY OF THIN-WALLED MEMBERS USING A FINITE RIGID BODY MODEL

深沢泰晴* 土橋 浩** 長谷川彰夫***

By Yasuharu FUKASAWA, Hiroshi DOBASHI, Akiyo HASEGAWA

In this paper, a solution scheme is presented for the problem of spatial instability of the thin-walled members, using a discrete model which may be useful for the estimation of the ultimate strength of structures. This proposed model consists of finite number of rigid thin-walled elements and two kinds of springs which are distributed over the contact surfaces of neighbouring rigid elements. On the basis of the appropriate kinematic field of the second order, accounting for the spatial instability behavior of the model, a set of the stiffness equations of linearized finite displacements is formulated. Some simple examples are examined numerically by means of the described model, and are compared with existing results or results obtained by conventional finite element method. The present analysis is found to be satisfactory.

1. はじめに

構造物の終局強度の正確かつ簡便な算定方法の開発は、構造工学の分野における今日の重要な課題と云えよう。鋼骨組構造の場合、その終局強度解析を煩雑なものにしている主たる要因は、座屈や大変位などの幾何学的非線形性と材料的非線形性である。それらのうち、座屈問題に関しては、ティモシェンコやウラゾフ等の偉大な工学者をはじめ、過去多くの構造工学者の関心を集め、その研究成果の集積が1955～1965年頃には、薄肉材の解析理論の体系化として結実している¹⁾。

近年においては、構造解析への変分原理の適用に関する鷺津らの研究²⁾の影響を受けて、有限変位場に対して再検討が加えられ、その結果、より洗練された理論展開がなされるようになった³⁾。さらに、有限要素法の発展、移動座標を用いた増分解析法の導入、高速大容量電子計算機の利用等によって座屈後挙動のような大変位解析も可能となるなど長足の進歩がもたらされた。しかしながら、鋼骨組構造の終局強度の汎用性のある算定法となると、上記の幾何学的非線形性に材料的非線形性も加わった強い非線形問題となることもあって、精度、簡便さ、計算費用の節減等の諸点で実用上充分と云われうるような手法の確立にはまだ至っておらず、さまざまな試みがなされているのが現状である。

構造物の極限解析用として開発された川井⁴⁾の剛体ばね系モデルによる離散化解析法も、そのような試みの一つである。最近、骨組構造⁵⁾、板、シェル⁶⁾、基礎地盤⁷⁾等をはじめさまざまな力学問題へのこのモデルの適用に関する一連の研究成果が報告されるようになり、モデルの有効性が次第に実証されつつある。有限剛体要素法とも呼びうるこの解析法は、有限要素法と差分法の間間的な性質を有しており、全体剛性行列

* 工博 山梨大学教授 工学部土木工学科 (〒400 甲府市武田4丁目3-11)

** 工修 首都高速道路公団 神奈川建設局 (〒231 横浜市中区真砂町2-25)

*** 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7丁目3-1)

の組み立て易さ、材料非線形特性の組み込み易さ、極限強度の概算値を低自由度の解析で把握できること、などにその特徴が見い出せる。

薄肉断面材への剛体-ばね系モデルの適用については、断面の反り現象の取り扱いに難点があることもあって、研究は少なく、⁸⁾特に座屈問題への適用例は極く限られている。⁹⁾著者らも、薄肉断面ばりの微小変位解析について報告^{10),11)}したが、ここでは、既報のモデルに改善を加えた上で、さらに妥当と思われる2次の有限変位場を設定し、それに基づき線形化有限変位解析としての定式化を試みるものである。

2. 薄肉剛体-ばね系モデル

本文で解析の対象とする薄肉部材を図-1に示す。解析に用いる座標系は、部材の断面図形の図心Oを原点とし、部材軸に沿うxと、断面図形の主軸に一致するyとzからなる右手系の直交デカルト座標系(x, y, z)である。さらに補助座標系として、右手系の直交曲線座標系(x, n, s)を用いる。sは部材断面の薄肉中心線上の任意点を原点とし、薄肉中心線に沿ってとられ、nはsに垂直である。

解析対象の薄肉部材は、部材長Lは断面寸法Hに較べて十分大きく(L≧10H)、また板厚tは断面寸法Hに較べて十分小さい(t≦H/10)という薄肉材の幾何学的条件を満たすものであれば、断面形状は任意でよい。したがって、解析

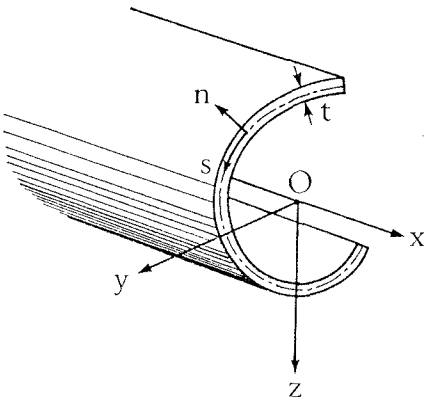


図-1 薄肉断面材と座標系

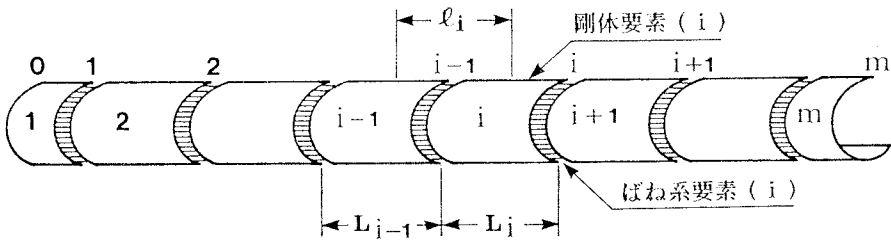


図-2 薄肉剛体-ばね系モデル

においては慣用の仮定が成り立つことになる。すなわち、断面形不変の仮定($\epsilon_n = \epsilon_s = \gamma_{ns} = 0$)と薄肉の仮定($\gamma_{xn} = \partial(\gamma_{sx}t)/\partial s|_{n=0} = 0$)である。

図-2に示すように、薄肉部材をm個の任意の長さ($=L_i ; i=1, 2, \dots, m$)の薄肉剛体要素と、その剛体要素を連結する長さが無限小のm-1個のばね系要素からなる離散化モデルに置き換える。ばね系要素は、相隣る剛体要素の端断面上に一樣に分布し、両端断面を連結するx方向の垂直ばねとs方向のせん断ばねから構成される。ばね系要素のばね定数は次のように決められる。

まず、離散化モデルのばね系要素(i)の任意点のx方向の垂直ばねとs方向のせん断ばねの単位面積あたりのばね定数をそれぞれ $k_{x,i}$ 、 $k_{s,i}$ とし、またその作用力を $f_{x,i}$ 、 $f_{s,i}$ とすると次式が書ける。

$$\begin{Bmatrix} f_{x,i} \\ f_{s,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{x,i} & 0 \\ 0 & k_{s,i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta w_i \end{Bmatrix} \tag{1}$$

ここに、 Δu_i および $\Delta \eta_i$ はばね系要素 (i) の任意点においてそれぞれ x 方向および s 方向に生ずる相対変位を表す。一方、原型部材の対応する点における応力とひずみの関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x,i} \\ \tau_{sx,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,i} \\ \gamma_{sx,i} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、E および G は、それぞれ材料のヤング率およびせん断弾性係数である。

ここで、離散化モデルのばね系要素 (i) の任意点における相対変位は、原型部材の対応する点のひずみと次式によって近似的に関係づけられるものとする。

$$\Delta u_i = \ell_i \varepsilon_{x,i}, \quad \Delta \eta_i = \ell_i \gamma_{sx,i} \quad (3a, b)$$

ここに、 $\ell_i = (\ell_i + \ell_{i+1})/2$ は、原型部材の剛性がモデルのばね系に置換される部材の長さを表している。式 (3a, b) のひずみは、原型部材の長さ ℓ_i における平均値と解釈できるし、また式 (3a, b) をひずみの差分表示とみなすこともできる。結局、式 (3a, b) を設定すれば、式 (1) および式 (2) を考慮して、ばね定数は次式のようにになる。

$$k_{x,i} = \frac{E}{\ell_i}, \quad k_{s,i} = \frac{G}{\ell_i} \quad (4a, b)$$

3. 有 限 変 位 場

前節で提案した離散化モデルの有限変位場を原型部材の有限変位場を用いて求める。モデルのばね系要素 (i) に対応する原型部材の断面の任意点の x, y, z 方向の変位成分 u_i, v_i, w_i 、ねじれ角 ϕ_i と断面の図心 O の x 方向の変位成分 U_i 、せん断中心 S の y, z 方向の変位成分 V_i, W_i 、せん断中心 S のまわりのねじれ角 Φ_i 等との間の関係は、3 次以上の高次項を省略して次式で与えられる。³⁾

$$u_i = U_i - (y - z\Phi_i)V_i' - (z + y\Phi_i)W_i' - \omega\Phi_i \quad (5a)$$

$$v_i = V_i - (z - z_s)\Phi_i - (1/2)(y - y_s)\Phi_i^2 \quad (5b)$$

$$w_i = W_i + (y - y_s)\Phi_i - (1/2)(z - z_s)\Phi_i^2 \quad (5c)$$

$$\phi_i = \Phi_i \quad (5d)$$

ここに、 y_s, z_s はそれぞれせん断中心 S の y, z 座標、 $()' = \partial() / \partial x$ である。 ω は単位反りで弾性域では自己つり合い条件を満たしているものとする。

式 (5a~d) の変位関数を部材軸方向の変位成分の 2 次項を省略した有限ひずみと変位の関係式に代入し、3 次以上の高次項を無視すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,i} = & U_i' - y V_i' - z W_i' - \omega \Phi_i' \\ & + z V_i' \Phi_i - y W_i' \Phi_i + (z_s V_i' - y_s W_s') \Phi_i \\ & + (1/2)\{(V_i')^2 + (W_i')^2\} + (1/2)\{(y - y_s)^2 + (z - z_s)^2\}(\Phi_i')^2 \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\gamma_{sx,i} = \Theta \Phi_i' \quad (6b)$$

$$\varepsilon_{y,i} = \varepsilon_{z,i} = \gamma_{xn,i} = \gamma_{ns,i} = 0 \quad (6c)$$

式 (6c) は近似的に成り立つものとしている。

なお、式 (6b) 中の Θ は n, s のみの関数であり、開断面部および閉断面部に対してそれぞれ次式で表される量である。

$$\Theta = \begin{cases} 2n & (\text{開断面部}) \\ 2n + \frac{\oint h ds}{t \oint (1/t) ds} & (\text{閉断面部}) \end{cases} \quad (7a) \quad (7b)$$

ここに、 h はせん断中心 S から s の接線におろした垂線の長さであり、 n 方向を正としている。

ここで、式(6a～c)を差分式に書き換え、式(3a, b)の関係を考慮すると、離散化モデルのばね系要素(i)の任意点に生ずる x 方向および s 方向の有限相対変位 Δu_i および $\Delta \eta_i$ が求められる。すなわち、行列を用いて表すと (superscriptの T は転置を意味する) 、

$$\begin{aligned} \Delta u_i = & \mathbf{B}_{1i}^T \mathbf{U}_i - \mathbf{B}_{2i}^T (y \mathbf{V}_i + z \mathbf{W}_i) + \omega \mathbf{B}_{3i}^T \Phi_i \\ & + \mathbf{V}_i^T (z \mathbf{D}_{1i} + z_s \mathbf{D}_{2i}) \Phi_i - \mathbf{W}_i^T (y \mathbf{D}_{1i} + y_s \mathbf{D}_{2i}) \Phi_i \\ & + (1/2) \mathbf{V}_i^T \mathbf{D}_{3i} \mathbf{V}_i + (1/2) \mathbf{W}_i^T \mathbf{D}_{3i} \mathbf{W}_i \\ & + (1/2) \{ (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 \} \Phi_i^T \mathbf{D}_{4i} \Phi_i \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\Delta \eta_i = \Theta \mathbf{B}_{1i}^T \Phi_i \quad (8b)$$

ここに、

$$\mathbf{U}_i = \langle U_{i-1} \quad U_i \quad U_{i+1} \rangle^T, \quad \mathbf{V}_i = \langle V_{i-1} \quad V_i \quad V_{i+1} \rangle^T \quad (9a, b)$$

$$\mathbf{W}_i = \langle W_{i-1} \quad W_i \quad W_{i+1} \rangle^T, \quad \Phi_i = \langle \Phi_{i-1} \quad \Phi_i \quad \Phi_{i+1} \rangle^T \quad (9c, d)$$

さらに、

$$\mathbf{B}_{1i} = (\ell_i/2L_i) \langle -1 \quad 0 \quad 1 \rangle^T, \quad \mathbf{B}_{2i} = \langle 1/L_i \quad -(1/L_i + 1/L_{i+1}) \quad 1/L_{i+1} \rangle^T \quad (10a, b)$$

$$\mathbf{B}_{3i} = \langle -1/L_i \quad (\ell_i/L_i)(1/\ell_i + 1/\ell_{i+1}) \quad \ell_i/(L_i \ell_{i+1}) \rangle^T \quad (10c)$$

$$\mathbf{D}_{1i} = \begin{pmatrix} 0 & 1/L_{i-1} & 0 \\ 0 & 1/L_i & 0 \\ 0 & 1/L_{i+1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{2i} = (\ell_i/2L_i^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10d, e)$$

$$\mathbf{D}_{3i} = (\ell_i/4L_i^2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{4i} = (\ell_i/4L_i^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10f, g)$$

なお、式(9a～d)における V_i および W_i はそれぞればね系要素(i)のせん断中心の y 方向および z 方向の変位成分である。一方、 U_i および Φ_i は、ばね系要素(i)においては不連続となるので、 U_i は剛体要素(i)の中央断面の図心の x 方向の変位成分、 Φ_i は剛体要素(i)のねじれ角を表すものとしている。

4. 増分形剛性方程式

剛体—ばね系モデルに対する増分形剛性方程式を仮想仕事式を用いて導く。まず、内力の仮想仕事 δW_i は、ばね系要素における仮想仕事の総和として次のように表される。²⁾

$$\delta W_i = \sum_{i=0}^m \int_A \{ (f_{x,i}^{(0)} + f_{x,i}) \delta(\Delta u_i) + (f_{s,i}^{(0)} + f_{s,i}) \delta(\Delta \eta_i) \} dA \quad (11)$$

ここに、 $f_{x,i}^{(0)}$ 、 $f_{s,i}^{(0)}$ はそれぞればね系要素(i)の x 方向および s 方向の内力 $f_{x,i}$ 、 $f_{s,i}$ の前段階のつり合い状態における値を意味する。ここで、 $f_{x,i}$ 、 $f_{s,i}$ 、 Δu_i 、 $\Delta \eta_i$ をそれぞれ1次項と2次

項に分けて表す。すなわち、

$$f_{x,i} = f_{x,i}^{(1)} + f_{x,i}^{(2)}, \quad f_{s,i} = f_{s,i}^{(1)} + f_{s,i}^{(2)} \quad (12a, b)$$

$$\Delta u_i = \Delta u_i^{(1)} + \Delta u_i^{(2)}, \quad \Delta \eta_i = \Delta \eta_i^{(1)} + \Delta \eta_i^{(2)} \quad (12c, d)$$

式(11)は、式(12a~d)を代入し3次以上の高次項を省略すると次のようになる。

$$\delta W_1 = \sum_{i=1}^m \int_A \{ f_{x,i}^{(1)} \delta(\Delta u_i^{(1)}) + f_{s,i}^{(1)} \delta(\Delta \eta_i^{(1)}) + f_{x,i}^{(0)} \delta(\Delta u_i^{(2)}) + f_{s,i}^{(0)} \delta(\Delta \eta_i^{(2)}) + f_{x,i}^{(0)} \delta(\Delta u_i^{(1)}) + f_{s,i}^{(0)} \delta(\Delta \eta_i^{(1)}) \} dA \quad (13)$$

式(13)に式(8a, b)を代入し、式(1)を考慮して整理すると次式が得られる。

$$\delta W_1 = \sum_{i=1}^m \delta \langle \mathbf{U}_i^T \quad \mathbf{V}_i^T \quad \mathbf{W}_i^T \quad \Phi_i^T \rangle \{ (\mathbf{K}_i^e + \mathbf{K}_i^g) \langle \mathbf{U}_i^T \quad \mathbf{V}_i^T \quad \mathbf{W}_i^T \quad \Phi_i^T \rangle^T + \mathbf{F}_i^{(0)} \} \quad (14)$$

上式中の $\mathbf{K}_i^e$ はいわゆる線形剛性行列であり、次のように表される。

$$\mathbf{K}_i^e = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e & \mathbf{K}_{13}^e & \mathbf{K}_{14}^e \\ & \mathbf{K}_{22}^e & \mathbf{K}_{23}^e & \mathbf{K}_{24}^e \\ & & \mathbf{K}_{33}^e & \mathbf{K}_{34}^e \\ \text{Sym.} & & & \mathbf{K}_{44}^e \end{pmatrix} \quad (15)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_{11}^e = k_{x,i} \mathbf{A} \mathbf{B}_{1i} \mathbf{B}_{1i}^T, \quad (16a)$$

$$\langle \mathbf{K}_{12}^e \quad \mathbf{K}_{13}^e \quad \mathbf{K}_{14}^e \rangle = -k_{x,i} \langle S_y \quad S_z \quad S_\omega \rangle \mathbf{B}_{2i} \mathbf{B}_{2i}^T \quad (16b)$$

$$\langle \mathbf{K}_{22}^e \quad \mathbf{K}_{23}^e \quad \mathbf{K}_{24}^e \quad \mathbf{K}_{33}^e \quad \mathbf{K}_{34}^e \rangle = \langle I_{yy} \quad I_{yz} \quad I_{y\omega} \quad I_{zz} \quad I_{z\omega} \rangle \mathbf{B}_{2i} \mathbf{B}_{2i}^T \quad (16c)$$

$$\mathbf{K}_{44}^e = k_{x,i} I_{\omega\omega} \mathbf{B}_{3i} \mathbf{B}_{3i}^T + k_{s,i} J_d \mathbf{B}_{4i} \mathbf{B}_{4i}^T \quad (16d)$$

また、

$$S_y = \int_A y dA, \quad S_z = \int_A z dA, \quad S_\omega = \int_A \omega dA \quad (17a \sim c)$$

$$I_{yy} = \int_A y^2 dA, \quad I_{yz} = \int_A yz dA, \quad I_{zz} = \int_A z^2 dA \quad (17d \sim f)$$

$$I_{y\omega} = \int_A y\omega dA, \quad I_{z\omega} = \int_A z\omega dA, \quad I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad (17g \sim i)$$

$$J_d = \int_A \Theta^2 dA \quad (17j)$$

なお、弾性解析においては、 y 、 z および ω の主座標としての直交性から次式が成り立つ。

$$S_y = S_z = S_\omega = I_{yz} = I_{y\omega} = I_{z\omega} = 0 \quad (18)$$

この場合は、式(16a~c)、(18)より式(15)の右辺の非対角項はすべて0となる。

さらに、式(14)中の $\mathbf{K}_i^g$ はいわゆる幾何剛性行列であり、次のように書ける。

$$\mathbf{K}_i^g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{K}_{22}^g & 0 & \mathbf{K}_{24}^g \\ & & \mathbf{K}_{33}^g & \mathbf{K}_{34}^g \\ \text{Sym.} & & & \mathbf{K}_{44}^g \end{pmatrix} \quad (19)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_{22}^g = \mathbf{K}_{33}^g = \mathbf{D}_{3i} \int_A f_{x,i}^{(0)} dA \quad (20a)$$

$$\mathbf{K}_{24}^g = \mathbf{D}_{1i} \int_A z f_{x,i}^{(0)} dA + z_s \mathbf{D}_{2i} \int_A f_{x,i}^{(0)} dA \quad (20b)$$

$$\mathbf{K}_{34}^s = -\mathbf{D}_{1i} \int_A y f_{x,i}^{(0)} dA - y_s \mathbf{D}_{2i} \int_A f_{x,i}^{(0)} dA \quad (20c)$$

$$\mathbf{K}_{44}^s = \mathbf{D}_{4i} \int_A \{(y-y_s)^2 + (z-z_s)^2\} f_{x,i}^{(0)} dA \quad (20d)$$

また、式(14)中の $\mathbf{F}_i^{(0)}$ は次式で与えられる、

$$\mathbf{F}_i^{(0)} = - \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{B}_{1i} \int_A f_{x,i}^{(0)} dA \\ \mathbf{B}_{2i} \int_A y f_{x,i}^{(0)} dA \\ \mathbf{B}_{2i} \int_A z f_{x,i}^{(0)} dA \\ \mathbf{B}_{3i} \int_A \omega f_{x,i}^{(0)} dA - \mathbf{B}_{1i} \int_A \Theta f_{s,i}^{(0)} dA \end{array} \right\} \quad (21)$$

次に、剛体要素(i)の中央断面の図心Oのx方向変位成分 U_i 、ばね系要素(i)のせん断中心のy、z方向の変位成分 V_i 、 W_i 、剛体要素(i)のねじれ角 Φ_i のそれぞれに対応する外力を $P_{x,i}$ 、 $P_{y,i}$ 、 $P_{z,i}$ 、 T_i とし、前段階のつり合い状態におけるそれらを $P_{x,i}^{(0)}$ 、 $P_{y,i}^{(0)}$ 、 $P_{z,i}^{(0)}$ 、 $T_i^{(0)}$ とすると、剛体-ばね系モデルにおいて外力のなす仮想仕事 δW_2 は次のように表される、

$$\delta W_2 = - \sum_{i=0}^m \{ (P_{x,i}^{(0)} + P_{x,i}) \delta U_i + (P_{y,i}^{(0)} + P_{y,i}) \delta V_i + (P_{z,i}^{(0)} + P_{z,i}) \delta W_i + (T_i^{(0)} + T_i) \delta \Phi_i \} \quad (22)$$

すなわち、

$$\delta W_2 = - \sum_{i=0}^m \delta \langle \mathbf{U}_i^T \quad \mathbf{V}_i^T \quad \mathbf{W}_i^T \quad \Phi_i^T \rangle (\bar{\mathbf{F}}_i + \bar{\mathbf{F}}_i^{(0)}) \quad (23)$$

ここに

$$\bar{\mathbf{F}}_i = \langle P_{x,i} \mathbf{C} \quad P_{y,i} \mathbf{C} \quad P_{z,i} \mathbf{C} \quad T_i \mathbf{C} \rangle^T \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_i^{(0)} = \langle P_{x,i}^{(0)} \mathbf{C} \quad P_{y,i}^{(0)} \mathbf{C} \quad P_{z,i}^{(0)} \mathbf{C} \quad T_i^{(0)} \mathbf{C} \rangle^T \quad (25)$$

$$\mathbf{C} = \langle 0 \quad 1 \quad 0 \rangle^T \quad (26)$$

仮想仕事式は次式のように書ける、

$$\delta (W_1 - W_2) = 0 \quad (27)$$

式(14)、(23)を式(27)に代入し、整理すると、剛体-ばね系モデルに対する増分形剛性方程式が次のように得られる、

$$\sum_{i=0}^m \{ (\mathbf{K}_i^s + \mathbf{K}_i^r) \mathbf{Q}_i - (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i^{(0)}) \} = 0 \quad (28)$$

ここに、 $\mathbf{Q}_i$ は $i-1$ 、 i 、 $i+1$ の剛体要素並びにばね系要素に関する変位ベクトルである、すなわち、

$$\mathbf{Q}_i = \langle \mathbf{U}_i^T \quad \mathbf{V}_i^T \quad \mathbf{W}_i^T \quad \Phi_i^T \rangle^T \quad (29)$$

または

$$\mathbf{Q}_i = \langle U_{i-1} \quad U_i \quad U_{i+1} \quad V_{i-1} \quad V_i \quad V_{i+1} \quad W_{i-1} \quad W_i \quad W_{i+1} \quad \Phi_{i-1} \quad \Phi_i \quad \Phi_{i+1} \rangle^T \quad (30)$$

さらに、式(28)中の $\mathbf{R}_i^{(0)}$ は前段階のつり合い状態における不平衡力ベクトルであり、次式で表せる、

$$\mathbf{R}_i^{(0)} = \bar{\mathbf{F}}_i^{(0)} - \mathbf{F}_i^{(0)} \quad (31)$$

上式の右辺の $\bar{\mathbf{F}}_i^{(0)}$ および $\mathbf{F}_i^{(0)}$ は、それぞれすでに式(25)および(21)で与えられている、

もちろん、座屈荷重は、式(28)に境界条件を考慮して得られる全体剛性行列を0とする固有値方程式の解として定められる、なお、境界条件の取り扱いについては、差分法による構造解析の場合と同様な手法を用いる、

5. 数 値 解 析 例

(1) 薄肉ばりの横倒れ弾性座屈解析

はじめに、4. の一般式から特別な場合として、薄肉ばりの横倒れ弾性座屈の支配方程式を導いておく。 z 軸に関して対称な断面の薄肉ばりが、 y 軸まわりの曲げのみを受けるときには、次式が成り立つ。

$$y_s = 0 \quad (32a)$$

$$\mathbf{K}_{12}^e = \mathbf{K}_{13}^e = \mathbf{K}_{14}^e = \mathbf{K}_{23}^e = \mathbf{K}_{24}^e = \mathbf{K}_{34}^e = 0 \quad (32b)$$

$$\mathbf{K}_{22}^e = \mathbf{K}_{33}^e = \mathbf{K}_{34}^e = 0 \quad (32c)$$

したがって、横倒れ座屈変形のつり合い式は、式(28)において $\bar{\mathbf{F}}_i + \mathbf{R}_i^{(0)}$ を0とおき、式(32a~c)を考慮して次のように導かれる。

$$\sum_{i=0}^m \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{x,i} & \mathbf{I}_{yy} \mathbf{B}_{2i} \mathbf{B}_{2i}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{x,i} \mathbf{I}_{\omega\omega} \mathbf{B}_{3i} \mathbf{B}_{3i}^T + \mathbf{k}_{s,i} \mathbf{J}_d \mathbf{B}_{1i} \mathbf{B}_{1i}^T \end{bmatrix} + \mathbf{M}_{z,i}^{(0)} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{D}_{1i} \\ \mathbf{D}_{1i} & \beta_z \mathbf{D}_{4i} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_i \\ \Phi_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (33)$$

上式中の $\mathbf{B}_{1i}$, $\mathbf{B}_{2i}$, $\mathbf{B}_{3i}$, $\mathbf{D}_{1i}$, $\mathbf{D}_{4i}$ は式(10a~e)によって表されるものであり、また β_z は次式で与えられる。

$$\beta_z = -2z_s + (1/I_{zz}) \int_A (y^2 + z^2) z \, dA \quad (34)$$

式(33)に境界条件を考慮して得られる系全体の剛性行列の行列式を0とおいた固有値方程式より座屈荷重が定められる。

弾性解析は本モデルの本来の目的とするところではないが、定式過程をチェックし、また解の収束性を調べるためもある。I 形弾性ばりの横倒れ座屈荷重を極く単純なケースについて数値計算で求めてみた。すなわち、図-3中に示すような単純支持された2軸対称なI形断面ばりが強軸まわりの一定曲げモーメントを受ける場合を対象とした。同図に示すように、要素数を増大させたときの正解への収束性はまずまずであり、剛体要素数を10以上とすれば誤差はほぼ2%以内におさまることがわかった。

(2) 柱の弾性および弾塑性大变位解析

4. で導いた増分形式の剛性方程式を用い元たわみのある柱の大変位解析を行ってみた。まず、エラスティカの楕円積分と比較するために、一端固定、他端自由の圧縮柱の曲げ座屈後挙動を弾性大变位解析によって追跡した。柱の断面は図-3のものと同一とし、弱軸まわりの曲げに対する結果を図-4に示す。剛体要素数を10とし、各荷重増分段階における解の収束は、Newton-Raphson法によって行った。図-4はこのモデルが大変位解析にも十分耐えることをうかがわせている。

次に、上記の場合と実質同じ柱について、単純な弾塑性有限変位解析を試みた。すなわち、①材料は完全弾塑性体である。②降伏条

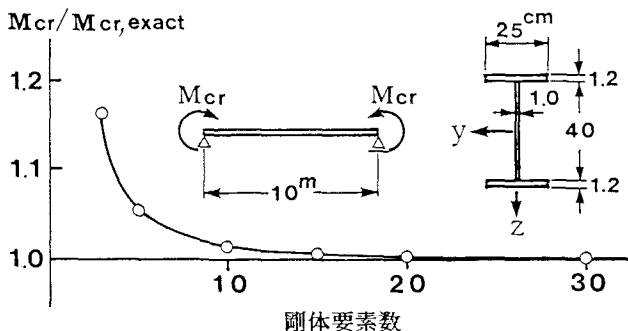


図-3 横倒れ座屈値の精度と要素数の関係

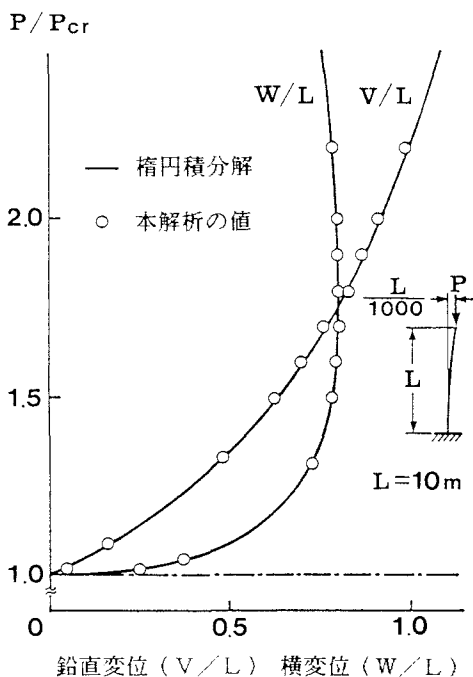


図-4 エラスティカ問題の解の比較

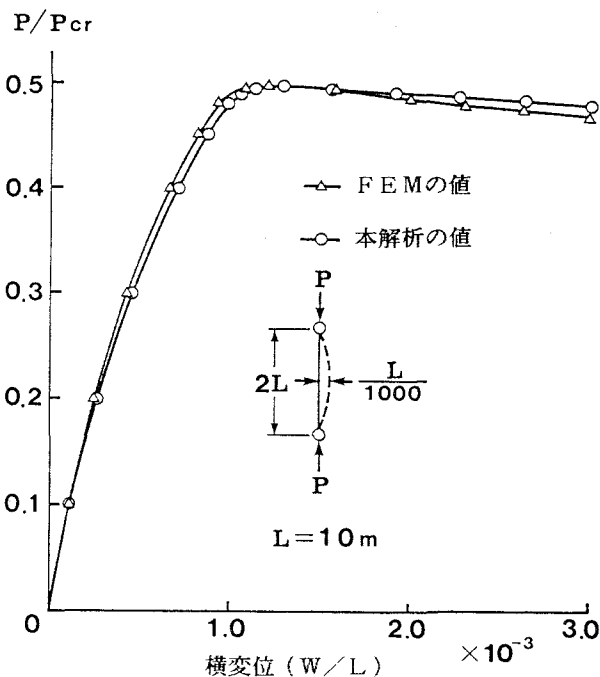


図-5 柱の弾塑性大変位解析結果の比較

件にはせん断応力は関与しない、③残留応力は考えない、と仮定し、弱軸まわりの曲げ降伏挙動を追跡した。有限要素法による解析も並行して行い、両者の場合とも、要素分割は10とし、 $0.45 P_{cr}$ (P_{cr} はオイラーの座屈荷重)の荷重までは荷重増分法を、それ以降は弧長法を採用し、各増分段階ごとの解の収束はNewton-Raphson 法によった。その結果を図-5に示すが、両者の間には若干の差がみられる。なお、この計算に要したCPUタイムは有限要素法の24秒に対し、本モデルでは13秒と大幅な減少が認められた。

6. ま と め

構造物を合理的に設計するには、その構造物の極限状態を的確に把握することが必要不可欠な条件の一つである。しかしながら、鋼骨組構造物に関する限り、その極限状態に対する汎用性のある解析方法はまだ確立されていないのが現状であり、さまざまな模索が行われている段階にある。このような事情を顧慮し、鋼骨組構造物の極限強度の評価法の開発の一環として、本論文では川井⁴⁾によって構造物の極限解析用として発案された剛体-ばね系モデルの考え方を薄肉部材の3次元的不安定挙動を含む極限状態の解析に応用することを試みた。

提案したモデルは、有限個の薄肉剛体要素と、断面上に一樣に分布し相隣る剛体要素間を連結する垂直ばねとせん断ばねからなるばね要素とによって構成される。従来、剛体-ばね系モデルの薄肉材への適用においては、曲げねじれによる断面の反り現象の取り扱いがあい路となっていたが、ここでは、対応する薄肉材の差分化した変位場を用いることによって、モデルの有限変位場を近似的に導出した。これに基づき、仮想仕事式により増分形式の線形化剛性方程式を導くなど、解析に必要な定式化をはかった。

このような離散化モデルを用いて、2、3の極く単純なケースについて具体的な数値解析を試みた。すな

わち、ここでの定式過程を検証するとともに、解の収束性を調べるためにはりの横倒れ座屈荷重の計算を行った。また、元たわみのある圧縮柱に対するエラスティカ問題や弾塑性耐荷力解析に適用してみた。それらの結果はほぼ満足のいくものであったが、このモデルの本来の目的であるねじりを伴う鋼構造部材や鋼骨組構造の3次元的な極限状態の解析法としての有効性については、今後さらに検討していく必要があると考えている。

参 考 文 献

- 1) Vlazov, V. Z. : Thin-walled elastic beams, Israel Program for Scientific Translations, pp. 263 ~ 342, 1961.
- 2) Washizu, K. : Variational method in elasticity and plasticity, 3rd ed., Pergamon press, pp.138~144, 1982.
- 3) 西野文雄 : 薄肉断面部材の基礎理論, 奥村敏恵教授還暦記念「鋼構造の研究」, 技報堂, pp.381 ~ 462, 1977.
- 4) Kawai, T. : Some consideration on the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.16, pp.81 ~ 120, 1980.
- 5) Kawai, T. : New element models in discrete structural analysis, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.141, pp.187 ~ 193, 1977.
- 6) 都井 裕, 川井忠彦 : 薄肉構造の離散化解析(その3)——平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション——, 日本造船学会論文集, 第 152号, pp.307~316, 1982.
- 7) 三藤正明, 竹内則雄, 川井忠彦 : 新離散化モデルによる基礎を考慮した骨組構造物の極限解析, 構造工学論文集, Vol.31A, pp.235 ~ 243, 1985.
- 8) Kawai, T. : Studies on the ultimate strength analysis of a ship structure by means of a new discrete thin-walled beam element(1), Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.150, pp.381~388, 1982.
- 9) 田中充雄, 野上邦栄, 伊藤文人 : 有限剛体要素モデルを用いた梁の横ねじれ座屈解析, 土木学会第40回年次学術講演会概要集(第1部), pp.123~124, 1985.
- 10) Fukasawa, Y., Dobashi, H. and Nishino, F. : Ultimate strength analysis of thin-walled polygonal section beams by means of a rigid body-spring system model, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.33, pp.255 ~ 263, 1983.
- 11) 深沢泰晴, 土橋 浩 : 薄肉開断面ばりの剛体一ばね系モデルの定式化, 構造工学論文集, Vol. 31A, pp.133 ~ 140, 1985.

(1985年10月18日受付)