

リング及びアーチの面内座屈に及ぼす 分布荷重の方向の影響

THE INFLUENCE OF THE DIRECTION OF EXTERNAL LOADS
ON THE INPLANE BUCKLING STRENGTH OF RINGS AND ARCHES

長谷川 彰夫^{*}・松野 徹^{**}. Dellelegne Teshome^{***}
By Akio HASEGAWA, Tooru MATSUNO and Dellelegne TESHOME

In the formulation of the well-known beam-column stiffness equation, the direction of external loads is generally kept constant. However, the direction of external loads in real situation may be changed such as water pressure. Hence, by using the principle of virtual work for a linearized finite displacement theory, the beam-column stiffness equation which can be applied for the problem of changed direction of external loads is developed in this paper. Illustrative examples for the inplane buckling behavior of rings and arches are presented. Finally, the influence of the direction of loads is examined and compared with the available analytical solutions.

1. まえがき

円弧部材に作用する荷重の方向には、様々なものが考えられる。重力のように、常に鉛直下向きに作用するもの、水圧のように常に面に垂直に作用するものなど、これらの荷重方向の変化は座屈現象になんらかの影響を与える。この影響については、過去、様々な解析的な手法により研究が行われており、幾つかの解も求められている。しかし、これらの解析解には、その境界条件、荷重条件などあいまいなものもあり、またその誘導方法など必ずしも十分に信頼できるものとは言えない。そこで本研究では、リング及びアーチについて有限要素解析により、荷重の方向を考慮した座屈解析を行う。

座屈解析を有限要素解析で行うにあたっては、リング及びアーチを直線梁で近似し、固有値解析を行う。ところが、その基本となる現在の、直線の梁-柱の剛性方程式は、荷重の方向を一定として扱っているために、水圧など変位の前後で荷重の方向が変化する問題を扱うことができない。そこで、線形化有限変位理論に対する仮想仕事の定理を用いて、荷重の方向の変化を考慮した梁-柱の剛性方程式を導く。そして、これを用いることにより、幾つかの荷重条件下での面内座屈の解析を行い、その結果から、古典的な既存解の検証を行うとともに、分布荷重の方向の影響を調べる。

* 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷3-7-1)

** 東京大学大学院 工学系研究科 土木工学専門課程 (〒113 東京都文京区本郷3-7-1)

*** 工修 東京大学大学院 工学系研究科 土木工学専門課程 (〒113 東京都文京区本郷3-7-1)

2. モデルの設定

荷重方向の影響を調べるため、荷重条件の異なるモデルを設定する。現実の問題となるケース、或いは既存解が存在するものなどを考慮して、Fig. 1に示す5つのモデルを設定した。すなわち、

(a) 活荷重型荷重：初期状態において、分布荷重は水平軸に沿って一様に、鉛直下向きに分布し、変形後も、荷重の方向は変化しない。

(b) 死荷重型荷重：初期状態において、分布荷重は円弧軸に沿って一様に、鉛直下向きに分布し、変形後も、荷重の方向は変化しない。

(c) 横力：初期状態において、分布荷重は中心方向を向いており、変形後も、荷重の方向は変化しない。

(d) 水圧：荷重は常に軸に垂直にかかる。そのため、変形により荷重の方向は変化する。

(e) 中心方向荷重：荷重は常に円弧中心を向く。要素では、変形により荷重の方向は変化している。

したがって、モデル (a), (b), (c) では、変形の前後における、荷重の方向は同一であるが、初期状態が異なっている。一方、モデル (c), (d), (e) では、初期状態は同一であるが、変形後の荷重の方向が異なっている。水圧のモデル (d) は、文献 1), 2) での検討にしたがって、保存力として扱う。

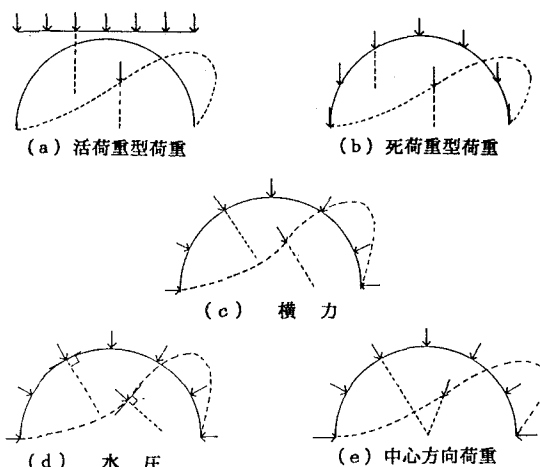


Fig. 1 荷重条件

3. 既存解

リング及び円弧アーチについては、幾つかの既存解がある。²⁾⁻⁶⁾ リングについては、初期状態で分布荷重がリング中心を向いているが、変形後の荷重方向が異なる。横力、水圧、中心方向荷重、それぞれの場合につき既存解がある。円弧アーチについては同様な初期状態において、横力についての解と、変形後の荷重の方向が特定出来ない解とが、両端ヒンジアーチと両端固定アーチの2つの場合についてある。これらの既存解は、座屈荷重を次のような式で、表わしている。

$$q_{cr} = k \frac{EI}{R^3} \dots\dots\dots (1)$$

ここでEIは曲げ剛性、Rは円弧半径であり、kは座屈係数で、荷重条件により異なる。このような既存解は比較的古い時期に、一定の制約のもとで解析的に求められたもので、その誘導過程には不明な点もあり、過去の検証も不十分で、必ずしも信頼し得るものではない。

4. 剛性方程式の誘導

有限要素法による座屈解析の基本となるよく知られた普通の梁-柱の剛性方程式では、荷重の方向が、変位に伴い、変化する問題を扱うことができず、水圧や中心方向荷重の解析を行うことが出来ない。そこで線形化有限変位理論に対する仮想仕事の定理を用いて、⁷⁾ 荷重の方向を考慮した剛性方程式を誘導する。

右手系直交座標系、 (x_i) または (x, y, z) における、各座標系方向変位成分を、 (u_i) 、 (u, v, w) とする。総和規約を用いると、体積V、表面積Sの任意の物体における仮想仕事式は、次のようになる。

$$\int_V (\bar{\sigma}_{ij} \delta e_{ij}) dV - \int_V (\bar{p}_i \delta \bar{u}_i) dV - \int_S (\bar{T}_i \delta \bar{u}_i) dS = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_{ij}$ は応力テンソル、 $\bar{e}_{ij}$ はひずみテンソル、 $\bar{p}_i$ は物体に作用している体積力、 $\bar{T}_i$ は表面力、 $\bar{u}_i$ はそれによる変位を表わしている。

ここで、 σ_{ij}^0 、 p_i^0 、 T_i^0 のもとでつり合っている基準状態 ($u_i^0=0$) の物体にさらに表面力 (端部荷重) T_i が与えられ、新たな変位 u_i が起きた後のつり合いを考える。その時、仮想仕事式 (2) の各成分は、体積力 p_i^0 の方向の変化も考慮して、次のように表わせる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^{NL} \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij}^L + e_{ij}^{NL} \quad (3. a, b)$$

$$\bar{p}_i = p_i^0 + p_i^L \quad \bar{u}_i = u_i \quad (3. c, d)$$

$$\bar{T}_i = T_i^0 + T_i \quad (3. e)$$

ここに、添え字の "o" は、基準状態での量を表わし、新たに発生した基準状態からの変化量の内、"L" は線形の項、"NL" は非線形の項である。体積力 p_i^L は体積力の方向の変化に原因する線形項である。式 (3. a) ~ (3. e) を、式 (2) に代入して 3 次以上の項を無視すると、仮想仕事式は次のようになる。

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 \delta e_{ij}^{NL} + \sigma_{ij}^0 \delta e_{ij}^L + \sigma_{ij}^L \delta e_{ij}^L) dV - \int_V (p_i^0 \delta u_i + p_i^L \delta u_i) dV - \int_S (T_i^0 \delta u_i + T_i \delta u_i) dS = 0 \quad (4)$$

ここで、表面力が新たに加わる前の基準状態において、次の関係が成立する。

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 \delta e_{ij}^L) dV - \int_V (p_i^0 \delta u_i) dV - \int_S (T_i^0 \delta u_i) dS = 0 \quad (5)$$

式 (5) を用いることにより式 (4) は次のようになる。

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 \delta e_{ij}^{NL} + \sigma_{ij}^L \delta e_{ij}^L) dV - \int_V (p_i^L \delta u_i) dV - \int_S (T_i \delta u_i) dS = 0 \quad (6)$$

具体的に、面内直線梁要素を対象とし、部材の図心軸を x 軸とする x z 面を考え、軸応力について線形の構成則を用いると式 (6) は次のようになる。

$$\int_V \{ N^0 / A \delta (w' - z^2 / 2) + E (u' + zw'') \delta (u' + zw'') \} dV - \int_V (p_i^L \delta u_i) dV - \int_S (T_i \delta u_i) dS = 0 \quad (7)$$

ここで E はヤング率を示し、 N^0 は基準状態での軸力、A は断面積、()' は x に関する微分を表わす。

式 (7) の中で荷重方向の変化を扱っているのは、第 2 項の p_i^L である。そこで水圧と中心方向荷重、それぞれの場合につき p_i^L を調べる。

水圧の場合、Fig. 2 に示すように、基準状態での水圧 q の下では、変形後に新たに発生する分布荷重は、次のように、表わせる

$$p_x = q \sin \lambda \quad p_z = q \cos \lambda - q \quad (8. a, b)$$

これを、テーラー展開して変位に関し 1 次の項まで求めると p_i^L が定まる。

$$p_x^L = q \lambda \quad p_z^L = 0 \quad (9. a, b)$$

中心方向荷重 q をうける場合は Fig. 3 に示すように、要素が (u, w) 変位したときに新たに発生する分布荷重は、次のように表わすことが出来る。

$$p_x = -qu/h \quad p_z = q(R-w)/h - q \quad (10. a, b)$$

ただし h は次の式で与えられる。

$$h = [u^2 + (R-w)^2]^{1/2} \quad (11)$$

$R \gg u, w$ の近似を用いると、h は次のようになる。

$$1/h = (1+w/R)/R \quad (12)$$

これを用いて、 P_x, P_z の 1 次の項を求める。

$$p_x^L = -qu/R \quad p_z^L = 0 \quad (13. a, b)$$

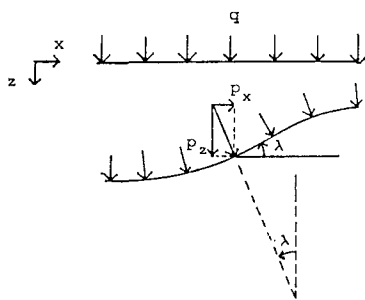


Fig. 2 水圧

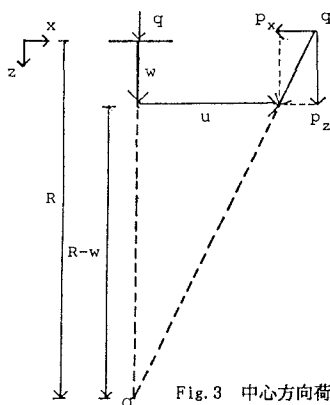


Fig. 3 中心方向荷重

剛性方程式を導くため、次に示すようなよく知られた u に関しては 1 次、 w に関して 3 次のエルミット多項式の内挿関数を導入する。

$$N_1 = 1 - x/L \quad N_2 = x/L \quad \dots \dots \dots (14. a, b)$$

$$N_3 = 1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 \quad N_4 = -x + 2x(x/L) - x(x/L)^2 \quad \dots \dots \dots (14. c, d)$$

$$N_5 = 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \quad N_6 = x(x/L) - x(x/L)^2 \quad \dots \dots \dots (14. e, f)$$

この内挿関数を用いることにより、 $0 < x < L$ の部材の任意断面での変位成分を、両端の i, j 節点に生じている変位 $(u_i, w_i, \lambda_i, u_j, w_j, \lambda_j)$ で表わすことが出来る。

$$u = \{A\}^t \{U\} \quad w = \{B\}^t \{U\} \quad \dots \dots \dots (15. a, b)$$

ただし

$$\{A\} = \{N_1 \ 0 \ 0 \ N_2 \ 0 \ 0\}^t \quad \{B\} = \{0 \ N_3 \ N_4 \ 0 \ N_5 \ N_6\}^t \quad \dots \dots \dots (16. a, b)$$

$$\{U\} = \{u_i \ w_i \ \lambda_i \ u_j \ w_j \ \lambda_j\}^t \quad \dots \dots \dots (17)$$

式(7)の左辺第2項は変形後に新たに発生する分布荷重の式(9)または式(13)であり、第3項は新たな節点力であることに注意しながら、式(15)を式(7)に代入することにより、荷重の方向を考慮した剛性方程式を導くことが出来る。

$$\{F\} = (K_E + K_G + K) \{U\} \quad \dots \dots \dots (18)$$

$\{F\}$ は節点力ベクトル、 K_E, K_G, K は剛性マトリックスである。これらは次のように表わされる。

$$\{F\} = \{P_{xi}, P_{zi}, M_i, P_{xj}, P_{zj}, M_j\}^t \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$K_E = \int EA \{A'\} \{A'\}^t dx + \int EI \{B'\} \{B'\}^t dx \quad \dots \dots \dots (20)$$

$$K_G = \int N^0 \{B'\} \{B'\}^t dx \quad \dots \dots \dots (21)$$

水圧の場合、式(7)において、次の関係に注意して、

$$p_i^L \delta u_i = q \lambda \delta u = q(-w) \delta u \quad \dots \dots \dots (22)$$

剛性マトリックス K は、次のようになる。

$$K = \int q \{A\} \{B'\}^t dx \quad \dots \dots \dots (23)$$

中心方向荷重の場合、式(7)において、次の関係に注意して

$$p_i^L \delta u_i = (-qu/R) \delta u \quad \dots \dots \dots (24)$$

剛性マトリックス K は、次のようになる。

$$K = \int q/R \{A\} \{A\}^t dx \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここで I は、断面 2 次モーメントである。 K_E は、よく知られた微小変位理論における、軸力問題と曲げ問題の剛性マトリックスであり、 K_G は面内の梁-柱のよく知られている幾何剛性マトリックスである。また K は荷重の方向を考慮したために、あらたに加わった剛性マトリックスであり次のように陽に与えられる。

水圧の場合

$$K = q \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -L/12 & 0 & 1/2 & L/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & L/12 & 0 & 1/2 & -L/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

中心方向荷重の場合

$$K = q/R \begin{bmatrix} L/3 & & & & & \\ 0 & 0 & & & \text{Sym.} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ L/6 & 0 & 0 & L/3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

5. 数値計算結果

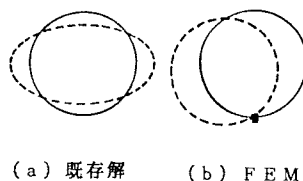
リング及びアーチを直線梁で近似し、荷重の方向を考慮した梁-柱の剛性方程式を用いて座屈解析を行い、既存解³⁾との比較を行う。要素分割数は30以上で充分な精度を得ることができたので、ここでは32で行った。

(1) リング：本解析と既存解との比較をTable 1に示す。本解析によると固有値の1次モードはすべて0になっている。既存解においては、リングの剛体回転を排除して解を求めているため、表に示す座屈係数に対応する座屈波形は、Fig. 4(a)に示すように対称である。しかし、有限要素解析では、 x 、 z 変位が拘束され、回転角が連続するという条件の支持点を与えるため、Fig. 4(b)のような支持点を中心とした剛体回転が1次モードにおいて生ずる。そこで2次モードを比較したところ、既存解とほぼ等しい値を得ることができた。

(2) 円弧アーチ：アーチとしてFig. 5のような両端ヒンジアーチを考える。計算結果をTable 2に示す。これによれば、中心の角度 α が小さいうちは、荷重条件による座屈係数の差は小さく、数%程度である。しかし角度が大きくなるにつれ差は拡がり、150°では、水圧の座屈係数は、横力の3倍、死荷重の5倍にもなる。これから荷重条件により、座屈係数に大きな差が出ることがわかる。なお α が180°の時、座屈係数の値がすべて0になるのは、 $\alpha=180^\circ$ でアーチは一点ヒンジ支持のリングとなり、不安定構造物となるためである。既存解³⁾との比較をTable 3,4に示す。横力については、Table 3に示すように、値はほぼ一致した。荷重の方向を特定できなかった既存解については、Table 4に示すように、水圧についての計算結果とほぼ一致

Table 1 リングの座屈係数

		1 次 モード	2 次 モード
横 力	既 存 解	4. 0	
	F E M	0. 0	4. 03
水 圧	既 存 解	3. 0	
	F E M	0. 0	3. 02
中心方向荷重	既 存 解	4. 5	
	F E M	0. 0	4. 53



(a) 既存解 (b) F E M

Fig. 4 リングの座屈

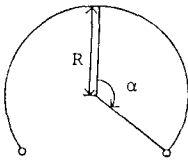


Fig. 5 両端ヒンジ円弧アーチ

した。このことから、この既存解は水压下での座屈を表わしていたことを、確認することができた。また両端固定アーチについて求められている既存解³⁾についても検証を行うと Table 5, 6 のようになり、やはり同様な結果を得ることができた。

6. まとめ

分布荷重の方向の変化を考慮した面内梁-柱の剛性方程式を誘導した。この剛性方程式をリング及び円弧アーチの面内座屈に適用し、一定の範囲で得られていた既存解を検証した。円弧アーチの面内座屈に対する荷重の方向の影響は、アーチの中心角が小さいうちは、少ないが、中心角が大きくなるに従い顕著になることがわかった。このことは、従来の有限要素解析では、荷重の方向が変化する問題を扱っていなかったもので、特に重要と思われる。

7. 参考文献

- 1) Bodner, S. R. ; On the Conservativeness of Various Distributed Force Systems, J. Aeronaut. Sci., Vol. 25 , pp. 132-133 , Feb. 1985
- 2) Brush, D. O. and Almroth, B. O. ; Buckling of Bars, Plates, Shells ; McGraw-Hill, 1975
- 3) C. R. C. JAPAN; Handbook of Structural Stability, コロナ社 , 1971
- 4) Timoshenko & Gere ; Theory of Elastic Stability, 2nd. Ed. ; McGraw-Hill, 1963
- 5) Singer, J. and Babcock, C. D. ; On the Buckling of Rings under Constant Directional and Centrally Directed Pressure , Trans. ASME, Series E, NO. 1 , pp. 215-218 , Mar. 1970
- 6) Batterman, S. C. and Soler, A. I. ; Buckling of Rings , Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM6 , pp. 1291-1296, Dec. 1970
- 7) Hasegawa, A. et al ; A Concise and Explicit Formulation of Out-of-plane Instability of Thin-Walled Members , Proc. JSCE Struct. Eng. /Earthq. Eng., Vol 2, No. 1, pp. 57s-65s, Apr. 1985

(1985年 10月18日 受付)

Table 2 両端ヒンジアーチの座屈係数

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
活荷重	36.87	9.29	3.50	1.08	0.14	0.0
死荷重	35.90	8.27	2.59	0.63	0.09	0.0
横力	36.04	8.73	3.28	0.99	0.13	0.0
水压	35.09	8.00	3.01	1.25	0.44	0.0
中心方向荷重	36.08	8.93	3.80	1.71	0.40	0.0

Table 3 両端ヒンジアーチの既存解との比較 1

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	36.00	8.72	3.27	1.00	0.13	0.0
横力	36.04	8.73	3.28	0.99	0.13	0.0

Table 4 両端ヒンジアーチの既存解との比較 2

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	35.00	8.00	3.00	1.25	0.44	0.0
水压	35.09	8.00	3.01	1.25	0.44	0.0

Table 5 両端固定アーチの既存解との比較 1

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	74.94	19.59	9.00	4.63	1.99	0.70
横力	76.41	19.62	9.02	4.65	2.00	0.71

Table 6 両端固定アーチの既存解との比較 2

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
既存解	73.32	18.14	8.00	4.59	3.27	3.00
水压	74.42	18.17	8.02	4.61	3.29	3.02