

不完全系釣合径路追跡計算上の問題点とその対策

ON THE TRACING CALCULATION OF THE EQUILIBRIUM PATH FOR IMPERFECT SYSTEMS

伊藤 文人*・野上 邦栄**

By Fumihito ITOH and Kuniei NOGAMI

In this report, discussion on the method of numerical solution of the non-linear equilibrium equation for the structure are stated. Especially, the problems arising in the course of performing the tracing calculation of the equilibrium path that includes the branch point or the critical point due to yielding are made clear and a more generalized incremental method elaborated for their disposal is proposed.

Consequently, by adopting a spherical search surface in which the arc-length of the path is used as restrictive parameter, the equilibrium points can be obtained automatically with ideal intervals for the system in which the path makes an abrupt change, and furthermore, it is made clear that the elimination method proposal by the authors is highly effective for the imperfect systems with small initial imperfection.

1. まえがき

通常の構造物は、荷重作用点の偏心、寸法の狂いおよび材料欠陥など僅かな不完全さが存在し勝ちである。このような不完全系構造物の耐荷力およびその変形挙動を把握するには、釣り合い径路を小刻みに計算し、各段階での荷重～変位関係を逐次求める数値解析が多く行われる。耐荷力問題では、構造物の釣り合い状態が複雑な連立非線形方程式で表され、これを解くために多くの解析法が提案され、実用されているが、この時釣り合い径路曲線を離散的に刻んで行かなければならない。その場合、次の解をもとめる曲線上の位置を決めるための制約条件をどのように与えるかが重要な問題になる。これまで多くの場合は、独立変数として荷重または変位成分の中の適当なものを選んでその増分を既定する方法が用いられ、それぞれ荷重増分法または変位増分法と呼ばれている¹⁾。

しかし、いずれの場合も独立変数として選ばれた変数の座標と釣り合い径路が直交する状態になると、十分な解の精度が得られなくなる。したがって、荷重と変位成分からなる空間において独立変数をどれかに固定することなく、自動的に最適な曲線の刻み方のできる方法が望ましい。この要求にそって考案された解法としては、弧長増分法^{2) 3) 4)}あるいは一般増分法⁵⁾がある。

弧長増分法は、制約条件として釣り合い径路の弧長を選ぶもので、独立変数を一つに固定しないから、大

* 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科 (158 東京都世田谷区深沢2-1-1)

** 東京都立大学助手 工学部土木工学科 (158 東京都世田谷区深沢2-1-1)

きく方向を変えるような釣り合い径路の追跡には原理的に有効な方法である。しかし、増分ベクトルおよび修正ベクトルの計算法が適当でないと、必ずしも十分な結果が得られるとは限らない。また、問題の系の不完全性を取り除きたいいわゆる「対応する完全系」の分岐点付近においては、近傍に存在する共役な釣り合い径路の方に解が飛び込んでしまい、それ以後正しい径路上の解が得られなくなる可能性を避けられない。

一般増分法は、摂動法を基礎にし一般逆行列を利用した解法であるが、弧長増分法と同様な問題点を持つばかりでなく、制約条件に用いるパラメータに対する的確な選択方法が明らかにされていない。

筆者等は上述の観点から、次の解の探索面として球状空間曲面を用いる弧長増分法をもとに、共役な釣り合い径路への移行など望ましからぬ解を検出・排除する方法を工夫し、また、初期不整の極めて小さな場合を含めた不完全系の釣り合い径路を一般的に精度良く追跡することの可能な消去法を用いることによって良い結果の得られる方法に到達したので、本論文においてその解法を紹介する⁶⁾。

2. 基本解法

いま、 m 個の変位成分と1個の荷重成分からなる変数系 x_j ($j = 1, 2, \dots, n$ ただし $n = m + 1$) に対して $(n - 1)$ 本の釣り合い方程式

$$A_i(x_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1) \dots\dots\dots (1)$$

が与えられているものとする。

多くの場合、このうちの1成分を既知のものとして与えることによって残りの全成分がこの方程式によって求められるが、完全系の分岐点付近においては、釣り合い径路がその方向を急変し、そのため例えば荷重を既知として計算しようとする解を求めるための係数行列の行列式が零に近くなり、いわゆる「性の悪い」行列になるため、精度が急激に低下したり、解が求められなくなる。さりとて、適当な変位成分を既知変数に選んでも径路の急激な方向変化のために、同じ変位成分が「適当」でなくなってしまい上記の荷重を独立変数として選んだ場合と似たようなことになる可能性が否定できない。

このようなことから、釣り合い径路を追跡する数値計算においては、いわゆる弧長増分法が一般的に適用する方法として適当であると考えられる。いま、用いる弧長を ρ で表すものとし、既知の所定の釣り合い径路上の点 p を位置ベクトル $\{x_{pj}\}$ 、これから求める釣り合い径路上の解ベクトルを $\{x_j\}$ とすれば、弧長増分法による条件は

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{pj})^2 - \rho^2 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。〔この式は、Fig.1 に示すように既知の釣り合い点 $\{x_{pj}\}$ を中心に半径 ρ の球状の空間曲面を表している。〕したがって、式(1)と式(2)を連立させて、与えられた弧長 ρ に対して総ての変数 x_j を求めれば良い。これが弧長増分法の考え方である。実際には、式(2)が2次式であって多少取扱に不便であることから、式(2)の代わりに、既知の釣り合い点 $\{x_{pj}\}$ における釣り合い径路の接線方向 $\{\dot{x}_{pj}\}$ に ρ だけ離れており、その接線に直交する平面

$$\sum_{j=1}^n \dot{x}_{pj} (x_j - x_{pj}) - \rho = 0 \dots\dots (2-a)$$

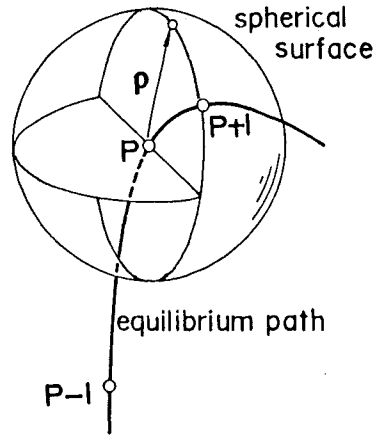


Fig.1 Ideal incremental solution method

を考え、解 $\{x_j\}$ がこの平面に載ることを条件にする方法が時々用いられ、有効性が確かめられているが^{3) 4)}、分岐点近傍のように、突如として釣り合い経路がほぼ「直角」に方向を変えるような場合には、やはり不都合な状態が起きるので、ここでは式(2)をそのまま用いることにする。

一般に、式(1)の釣り合い方程式は非線形であると考えられるので、その時には解 $\{x_j\}$ の近似として $\{x_j^{(k)}\}$ を選び、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_i &= A_i(x_j^{(k)}) \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ \Phi_n &= \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_{pj})^2 - \rho^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

とし、Newton-Raphson法を用いるものとするれば

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_{i,j}(x_j^{(k)}) dx_j &= -\Phi_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1) \\ 2 \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_{pj}) dx_j &= -\Phi_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

によって次の近似解への修正ベクトル $\{dx_j\}$ を求めれば良い。ここに $A_{i,j} = \partial A_i / \partial x_j$ を意味する。

なお、近似解 $\{x_j^{(k)}\}$ がいつでも式(3)の第2式を満足するように与えられるものとするれば、 $\Phi_n = 0$ が常に成り立つから、この時解くべき式は、式(4)に代わり次式のように書き換えることができる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_{i,j}(x_j^{(k)}) dx_j &= -\Phi_i \quad (i=1, \sim, n-1) \\ \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_{pj}) dx_j &= 0 \end{aligned} \right\} (5)$$

この第1式は、 n 次元空間における直線を与える式である。これに対して第2式は、ベクトル $\{x_j^{(k)} - x_{pj}\}$ と直行する平面を表す式である。また、上式は

$$\sum_{j=1}^n K_{i,j} dx_j + \Phi_i = 0 \quad (i=1, \sim, n) \dots \dots (6)$$

のように行列表示することもできる。ここに

$$\left. \begin{aligned} K_{i,j} &= A_{i,j}(x_j^{(k)}) \\ K_{n,j} &= x_j^{(k)} - x_{pj} \\ \Phi_n &= 0 \end{aligned} \right\} \left[\begin{array}{l} i=1, \sim, n-1 \\ j=1, \sim, n \end{array} \right] \dots \dots (7)$$

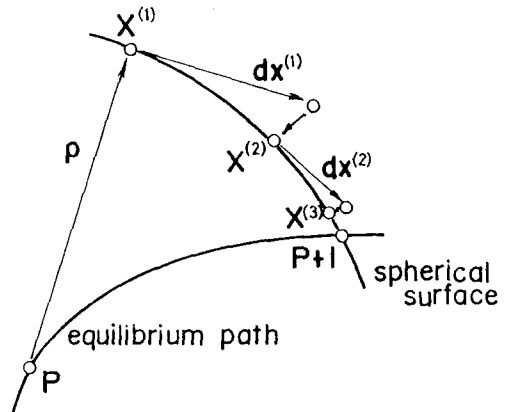


Fig.2 Basic procedure

と置いた。この時、全体係数行列 K は $(n \times n)$ の正方行列となる。

通常の Newton-Raphson 法では

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + dx_j \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

で次の近似値が計算されるが、上記の条件 $\Phi_n = 0$ を満足させるためには

$$x_j^{(k+1)} = \frac{(x_j^{(k)} - x_{pj} + dx_j) \rho}{\left\{ \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_{pj} + dx_j)^2 \right\}^{1/2}} + x_{pj} \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots \dots \dots (8)$$

によって計算すれば良い。(Fig.2)

この条件は必ずしも絶対に必要と言う訳ではないが、修正量 dx_j が大きく球面から離れてしまう場合、

この条件により球面上に引き戻すことができ、これに伴い収束回数の低減化がはかられることを考慮して以下ではこの条件が成り立つものとして検討をすすめる。

いま、釣り合い径路が定義域に存在し、かつ連続であるとし、考えている系が不完全系であって径路上に分岐点を含まないものとする。この時、独立変数として荷重あるいは変位成分のうち適当な変位成分を選んでその増分を既定する、いわゆる荷重増分法や変位増分法は、釣り合い径路上において荷重あるいは変位成分の極限点が存在する場合、この点で式(5)の第1式の $\det. A$ が零になる。しかし、上記の弧長増分法の場合、球面式である式(5)の第2式を含めた行列式 $\det. K$ は、解ベクトルが正しく釣り合い径路上にのっていれば、径路上を一定の方向に向かって移動するにつれ、その大きさを連続的に変え、しかも零になることが無い。すなわち釣り合い径路を追跡して行く時、解が正しく釣り合い径路上に載っており、しかもその方向を逆転しないならば、この行列式はその符号を変えることが無いのである。

3. 不完全系釣り合い径路計算上の問題点

前章で述べた非線形計算法は、釣り合い径路に分岐点を含まない完全系、あるいは大きな初期不整を有する不完全系を対象にする限り、殆ど計算上の問題を生じることが無い。しかし、初期不整の極めて小さい場合には、この系に対応する完全系の分岐点付近において不都合を生じ、特に次のような問題点が発生する。

第1の問題点は、主として分岐点の反対側に存在する共役な釣り合い径路によるものである。もし、近傍に共役な釣り合い径路が存在し、その径路の一部が、前回の釣り合い点を中心とする球面上の近似解の位置でその球面と接する平面と交叉していると、少なくとも条件を満足する点が2点存在することになり、解は「近似解」に「近い」方に近付いてゆくので、結果的には Fig.3 のように共役な釣り合い径路の方に飛び込んでしまう可能性がある。

この場合には、対応する完全系の分岐点より遠方に飛び込んでいるのが普通であり、この位置における $\det. K$ は、対応する完全系の $\det. K$ の値に近い値を持つ。完全系では分岐点で $\det. K = 0$ となってその先では符号が逆転するので、当面の不完全系についても $\det. K$ の符号が正常な場合は逆になってしまう。

第2の問題点は、前回の釣り合い点を中心にした球面を考えた時、対応する完全系の分岐点付近で釣り合い径路が方向を急変していて、その径路と球面の交点が中心点における接線の延長上の点と甚だしく違った位置になっている場合には、近似解として選んだ最初の点が釣り合い径路とはかなり離れているこ

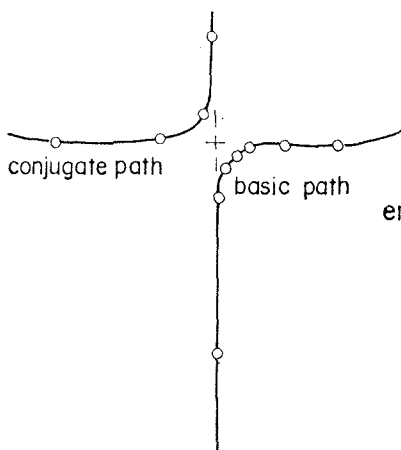


Fig.3 Problem type-1

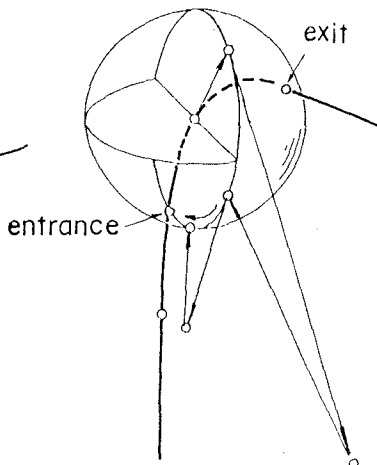


Fig.4 Problem type-2

とがあり、近くに共役な釣り合い径路が存在すると式(5)の解が必要な真の解に近寄る方向を向かず、逆に共役な径路に引かれて所要の解からは離れて行ってしまうような結果になることが有り得る。

一般に、前回の釣り合い点を中心とする球面は、釣り合い径路によって「串刺」になっており、欲しいのはその串の出口であって、そこでは $\det. K$ が出発点と同符号を持つが、その入口では式(7)の K_n の符号

が逆になるので、 $\det. K$ が逆符号を持つ。したがって、共役な釣り合い径路がいま考えている球面と交叉していなくても、球面上の近似点が串刺の出口から離れて行ってしまった結果、やがて「入口」に近づくか、または極めて収束回数が増える可能性がある。このような場合には、式（５）を繰り返して解きながら近似点を移動させているうちに、途中で $\det. K$ の符号が逆転する。すなわち、問題の球面上の $\det. K$ の値の分布には、必ず同符号の領域と逆符号の領域が存在し、逐次近似の途中における点が球面上の逆符号領域に入ってしまうと、Fig.4 のように最終解が「入口」に戻ってしまう可能性が高い。

4. 具体的処置法

この章では、前章で述べたような僅かな初期不整を有する不完全系の問題点に対する対策について、および数値計算上の $\det. K$ が零になる時の具体的な取扱法について論議をすすめる。

(1) 消去法

基本的には、不完全系であっても、分岐点近傍においては完全系と類似の問題を抱えており、完全系が分岐点に飛び込んだ時、 $\det. K$ の値が零になる状態と同じ現象が発生することになる。そのため 2 章の計算法は $\det. K = 0$ の状態に対して何等かの工夫が必要になる。なお、数値計算上 $\det. K = 0$ となる場合、構造系によって、式（５）の第 1 式のうち 1 本あるいは同時に幾本かが従属式になる状態が存在し得るが、以下では簡単のために、いわゆる単純分岐点のみを持つ場合に限定することにする。

2 章で述べたように Newton-Raphson 法を用いる場合、解くべき非線形釣り合い方程式は、式（５）の連立式となる。一般には、この式の m 本の式が互いに独立であれば、例えば $d x_r$ を独立な変数として、

$$\sum_{j=1}^{n-1} A_{i,j} d x_j = -A_{i,r} d x_r - \Phi_i, \quad (j \neq r) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \dots (9)$$

の左辺の係数行列の行列式 $\det. A$ が零にならない限り、解として一本の直線が得られる。その場合、独立な変数 $d x_r$ の選び方が悪いと、時には $\det. A$ が零になってしまって解が得られないように見えることがあるが、解としての直線が存在する場合には、独立な変数の選び方を適当に変えることによって問題の行列式が零にならないようにすることが可能である。

この変換のための消去法においては、式（５）の第 1 式の係数 $A_{i,j}$ の中で、最も大きな絶対値を持つものを選び出し、その係数を含む行を用いて他の行の該当する j 列を消去するのが良い。その消去のあと、再び残りの行のなかで最大の絶対値を持つ係数を選び出し、同様の消去を行う。以下、同様にして消去を進めていくと最後には最も絶対値の小さいものに残ることになり、その列を s 列目であるとする、 s 列の係数の値 B_{is} は必ずその行のピボットとして使われた項の係数 D_i よりも絶対値が小さく、その行の他の列の係数はすべて零になっている。すなわち、この時

$$D_i d x_i + B_{is} d x_s = -C_i, \quad |D_i| > |B_{is}| \quad (i \neq s) \quad (i = 1, \dots, n-1) \dots (10)$$

の形になっている。もし近似値が正確に釣り合い径路の上に載っていれば右辺の C_i はすべて零であるから、この式はその点を通る直線であり、 $d x_s$ はその直線にそったベクトルの成分としては最大のものである。この $d x_s$ を独立な変数として扱えば、式（５）の第 1 式が唯一の解を持つものである限り、解曲線の接線方向に患わされることなく解を得ることができる。その意味で、この $d x_s$ を最も主要な変数（主変数）と考えて良い。

この式と式（５）の第 2 式を連立させることによって解が一義的に定まり、収束した状態では式（10）がその釣り合い点における径路の接線を与えることが明らかである。また、上記の計算の間に軸となる係数

値を使って順次 $\det. K$ の値が求められる。これは絶対値の大きいものから順次掛け合わされることになる。

上述の消去法について、プログラム上の具体的取扱法は、式（6）において

$$K_{i,n+1}=\Phi_i \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

と置いた〔 $n \times (n+1)$ 〕次元行列として計算を行えば良い。この時、式（7）の第2式は

$$K_{nj} = \frac{(x_j^{(k)} - x_{pj})}{\rho} \quad (j=1, \sim, n) \cdots (12)$$

とおくと都合が良い。この式は、 K_{nj} が点 $\{x_{pj}\}$ の接線方向の単位ベクトルの j 座標成分であることを意味し、弧長 ρ の大きさに無関係になる。したがって、 $\det. K$ は弧長 ρ とは無関係な量になり、 $\{x_{pj}\}$ の値を一定にしておく限り $\{x_j\}$ のみの関数になる。

なお、第 i 回目の最大の絶対値を含む行を用いて他の行の該当する j 列を消去する場合、この最大の絶対値の行を第 i 行に移行しておくと便利である。その消去手順の流れを示すとFig.5 のようになる。

しかし、式（5）の第1式の中に従属なものが存在すると、式（9）の消去を進めている途中にすべての

$$A_{i,j} = 0, \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

が同時に成り立つような行が現れる。その結果、必要な消去が出来なくなり、それ以外の行は

$$D_i \, d x_i + B_{ir} d x_r + B_{is} d x_s = -C_i \cdots \cdots \cdots (13)$$

の形になる。これは直線ではなく、2次元の平面を表す。先の例と同様に、近似値が正しく釣り合い径路の上に載っていれば、これは解を通る平面を表している。

式（5）の第1式を変形した結果が式（13）になった場合には、ある行 j については

$$D_j = 0, \quad B_{jr} = 0, \quad B_{js} = 0 \cdots \cdots \cdots (14)$$

が成り立っている。この状態で式（5）の第2式と連立させても、 $d x_r$ と $d x_s$ の両方を決定することは出来ないが、式（13）を用いて式（5）の第2式の適当な係数を消去し、

$$B_{nr} d x_r + B_{ns} d x_s = -C_n \cdots \cdots \cdots (15)$$

の形にすることはできる。ここで B_{nr} と B_{ns} のうち、絶対値の大きい方のもの（ここでは便宜上 B_{nr} がそれに該当するものとする）を用いて式（13）の $d x_r$ の列を消去すると、式（10）と同形になる。ただし、第 j 行目の係数については依然として式（14）の関係が残っており、そのためこれらの式が平面を表すことにおいて変わりはない。しかし、第 j 行目を除く残りの行と式（15）を組み合わせたものは一本の直線

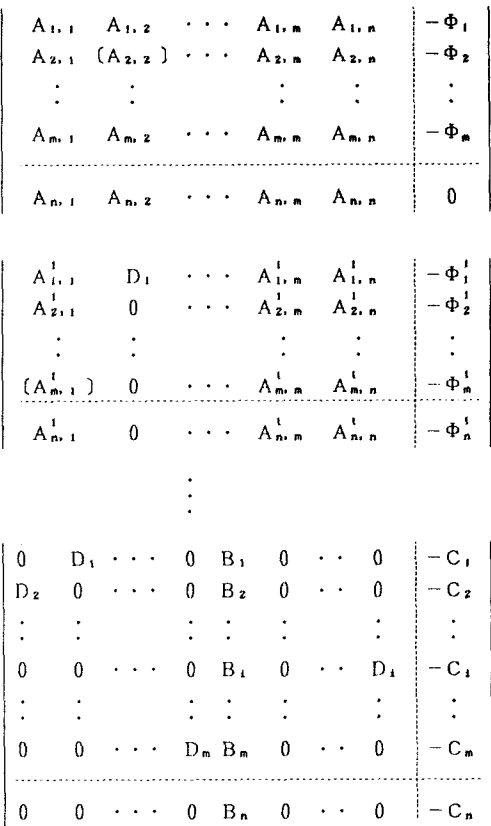


Fig.5 Elimination procedure

を表しており、これが解を示しているのである。

解が一点ではなく、直線として与えられている状態で、次の近似値を「一点」だけ選び出すためには、なにか条件を一つだけ追加しなければならない。その条件として、最も合理的であると思われるのは、現在の近似値から「最も近い位置であること」を条件とすることであろう。これは

$$\sum_{i=1}^n (d x_i)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

を条件に加えると言うことであり、したがって、 B_{nr} を D_r と書くことにより

$$\sum_{i=1}^n d x_i (d x_i / d x_s) = \sum_{i=1}^n B_{is} (C_i + B_{is} d x_s) / D_i \quad (i \neq s) = 0 \cdots \cdots (16)$$

によって求める点を規定することができることに相当する。しかし、この計算に多くの手間と時間を割くよりも、多少便宜的ではあるが、この際の主変数 $d x_s$ を零と置いた点をねらい、

$$d x_i = -C_i / D_i \quad (i \neq s) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdots \cdots (17)$$

によって次の近似値を求めても大差はなく、この方が次の近似値を求めるための計算は速い。

また、収束した状態では、総ての C_i が零であるから、解として与えられた直線は、式(13)による平面と式(15)による平面の交線を表しており、もし当面の球の中心から得られた解を結ぶ直線が一つの釣り合い径路を示すものであるとすれば、その径路と直交する別な解曲線の接線を表しており、これがいわゆる「後座屈径路」の接線に一致しているものと考えられる。

(2) 初期値の設定

一般的には、第0回目の釣り合い点 $P=0$ の位置ベクトル $\{x_{0j}\}$ として無荷重状態を選び、弧長 ρ が余り大きく選ばれていない限り、第一回目の近似としては線形解析による解を用いれば良い。

第2回目以後の各釣り合い点の近似解としての位置ベクトルを最初に設定する場合、最も合理的に行われる方法は、釣り合い状態における径路の接線上に初期値を設定することである。いま、求められた釣り合い径路上の点 $\{x_{pj}\}$ は式(1)を満足する。次いで求められるべき解ベクトルが $\{x_{pj} + d x_j\}$ で与えられるものとし、これも式(1)を満足するべきであるとすれば、この $\{d x_j\}$ は

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} (x_{pj}) d x_j = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \cdots \cdots (18)$$

$$\sum_{j=1}^n (d x_j)^2 - \rho^2 = 0 \cdots \cdots (19)$$

を満足しなければならない。式(18)は n 次元空間における直線を表しており、これは前節において求めた解の接線と同じものである。式(19)はその直線の長さが ρ に一致しなければならないことを示しているから、例えば主変数 $d x_s$ の長さを仮に1として接線ベクトルを計算しておき、その長さ(絶対値)が式(19)を満足するように修正すれば良い。

前回の解は釣り合い径路の上ののっているのであるから、前節の式(10)または式(13)と式(15)から $d x_r$ を消去した結果は

$$d x_i + B_{is} d x_s = 0, \quad (i \neq s) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \cdots \cdots (20)$$

の形になっており、すべての $d x_i$ は $d x_s$ によって与えられる。すなわち、この主変数は式(19)と式(20)から $B_{ss}=0$ として

$$d x_s = \pm \rho / \{1 + \sum_{i=1}^n B_{is}^2\}^{1/2} \cdots \cdots (21)$$

で与えられ、これによってすべての $d\mathbf{x}_i$ 、ひいては次の第0次近似解が決定できる。複号は、今回得られた解の $\mathbf{x}_s$ から前回の解の $\mathbf{x}_{ps}$ を差し引いたベクトル成分と同じ符号を選んで用いるのが自然である。もしこれが正しくなければ、結果として得られる $\det. K$ の符号が逆になるから、その時に方向を逆転してやれば良い。

(3) $\det. K$ の符号の逆転

3章で述べたように、釣り合い点を求めて見た結果、 $\det. K$ の符号が逆になっている場合は、

- ① 共役な釣り合い径路に飛び込んでしまったか、
- ② 問題の球面と交叉する径路の「入口」に戻ってしまったか

のいずれかである。

これらのトラブルは、 $\det. K$ の符号の逆転によって異常が判別できるが、最も簡単な対策は、前回の釣り合い点（現在の球面の中心）に戻り「弧長」を短くして再出発すれば良く、多くの場合はこれで次の点を正しく求められるようになる。ただし、弧長 ρ を余り小さくし過ぎると、それにつれて修正ベクトルの大きさも小さくなることになり、位置ベクトル $\{\mathbf{x}_i\}$ の大きさととの関係で逆に精度が悪くなってしまうので、適当な下限を定めておく必要がある。

逆に、釣り合い径路追跡計算において何も問題が生じなければ、必要に応じて弧長 ρ を大きくして良い。通常釣り合い径路の曲率が大きくなり、そのため前節で述べたような初期値の決めかたをした場合の収束までの所要繰返し数が増加してきた時には、それに応じて球面半径 ρ を小さくするのが良く、逆に収束が極めて速い時には径路が直線に近くなっているので、 ρ を大きくした方が経済的である。当然この場合も、あらかじめ上限を決めておかなければならない。この処置を自動的に行う方法として、収束回数を基礎にした次式で与えられる弧長を用いるのも有効である。

$$\rho = \frac{\alpha + N_s N_c}{\alpha + N_c^2} \rho \quad \dots \dots \dots (22)$$

ここに N_s は目標収束回数、 N_c は前回の釣り合い点を求めるのに要した収束回数および α は任意の常数である。

しかし、半径が限度一杯に小さい場合には、別な対策が必要になる。簡単な一つの方法は、極めて単純に、同じ球面で得られた解の反対側に初期値をとってやり直すことである。何等かの理由で解が釣り合い径路の「入口」に戻ってしまったような場合で、しかも径路の曲率があまり大きくない場合にはこれで正しい解に到達できる。これは材料非線形の影響などで急激に径路が方向を変えたような場合に経験される現象である。

球面の反対側に初期値を採り直して計算した結果として、新しい初期値の近傍にあらためて解が得られ、しかもそこでも $\det. K$ の符号が逆であつたら、これはその球面が対応する完全系の分岐点を跨いでいて、得られた二つの解の一方は共役な径路上の点であり、他方は本来の径路の「入口」であると考えて良い。この場合には、あらためて「対応する完全系の分岐点」を狙った位置に次の初期値を選び、そこでは近似的に $\det. K \approx 0$ が成り立つと言う前提に立って（1）節に記した $\det. K = 0$ の場合の方法を用いれば所要の解に到達することができる。すなわちこの時には（1）節に述べた D_i が始めから零の近似値であると見做し、これを零として取り扱うのである。これが可能であるためには、（1）節で述べたような消去の順序をとることが極めて重要であることには注意するべきであろう。

初期値を球面の反対側に採ったにも関わらず、再び近似値が大きく移動して同じ解に到達してしまった場合には、釣り合い径路の方向変化が激しく、収束計算において近似値が真の解の近傍を通らずに径路の「入口」に移動してしまったものと判断されるが、この場合にはこのトラブルから脱出できることを保証できる

ような方法が見当たらない。しかしこのように急激な径路の方向変換は、対応する完全系の分岐点が近くに存在する場合に起きるものであり、それだけに当面の不完全系が対応する完全系と極めて類似した性質を持っているものと考えられるから、前節で述べた後座屈径路に移行する方法が準用できる可能性が強い。すなわち、この場合も $\det. K$ が近似的に零であるものと見做し、計算上は零でない D_i を零と見做して修正ベクトルの計算を行えば、次の近似値が「後座屈径路」に近づくことが期待できる。すなわち、初期値から修正ベクトルを計算する段階でこの方法を使えば、次の近似値が正しい解に近づき、以後は正常に収束できることが期待できるであろう。

なお、適当な限界値を決めておいて、 $\det. K$ の絶対値がその限界より小さくなった場合には無条件で $\det. K = 0$ と見做してしまうことも好ましい。一般に数値形電子計算機では丸めの誤差の存在により、厳密な意味での零を検出しなければ零と判断しないようなプログラムでは却って悪い結果になることが少なくないからである。

5. スケーリングについて

一般に構造物の問題では、荷重または応力に対して、ひずみまたは変位を表す数値が極めて微小である。したがって、上記のような方法をそのまま生の値を用いながら適用すると、例えば球面の半径が荷重変数に対しては小さ過ぎ、変位に対しては大き過ぎることになる。このため、変位に対して必要な精度を確保しようとする、極めて厳しい収束判定条件が必要になり、また考慮する球面半径を極めて小さく選ばなければならない結果、荷重が主変数であるような場合には無駄に多くの計算を繰り返すことになる。したがって、着目したい最も重要な状態における荷重変数とその時の変位の主要な変数がほぼ「同程度の」大きさを持つように「スケーリング」をしておくことが大層有効である。つまり、 n 次元の変数系 x_j に対してスケーリング常数を β_j として、

$$\beta_j \overline{x_j} = x_j$$

の関係を持つ変数 $\overline{x_j}$ を導入すれば良い。

また、スケーリングによって、取り扱う変位の数値を大きくすることは、同時に対応する完全系の分岐点付近における完全系と不完全系の釣り合い径路を、数値の上で見掛け上引き離す効果を持ち、その結果として完全系の分岐点から不完全系の釣り合い径路が「離れる」ことになり、分岐点の近傍におけるトラブルの発生を未然に防ぐことになる。

したがって完全系の分岐点付近でのトラブルから解放されるための一つの手段として、変位に対するスケーリングを変えることも屢々有効である。完全系の後座屈径路はその基本径路と分岐点で交叉しており、分岐点から出発して進行する方向としては主変数が正の方向と負の方向と二通りある。対称分岐の場合、完全系ではどちらの方向に進んでも差支えなく、その選択の基準は無い。また、どちらの方向に進んでも前述の行列式 $\det. K$ の符号は同じになる。そのため、極めて初期不整の小さい不完全系を対象とした時には、もし適当なスケーリングをししないと、逐次近似計算の途中で修正ベクトルが十分にその方向を変えられないため、分岐点をはさむ基本径路上だけで向きを変えることになり、その結果上記の考え方によるプログラムでは、そこで分岐点に到達したものと判断することになる。そこで、計算機は完全系の場合と同様に分岐点の位置を推定し、そこから後座屈径路の方向を見出して、そちらに進み始めることになる。その場合、(2)節で述べた次回初期値の決定方法に従うものとする、一旦架空の分岐点を求めているため、回りの進行方向としては必ずしも正しい向きを与えない。運悪く逆な向きに向いたとしても、重要な手掛りである $\det. K$ の符号が、この場合については役立たないので、計算はそのまま誤った方向に続行されてしまうのである。もちろん、このことについては、プログラム上適切な処置をすることによって克服可能であるが、万一誤っ

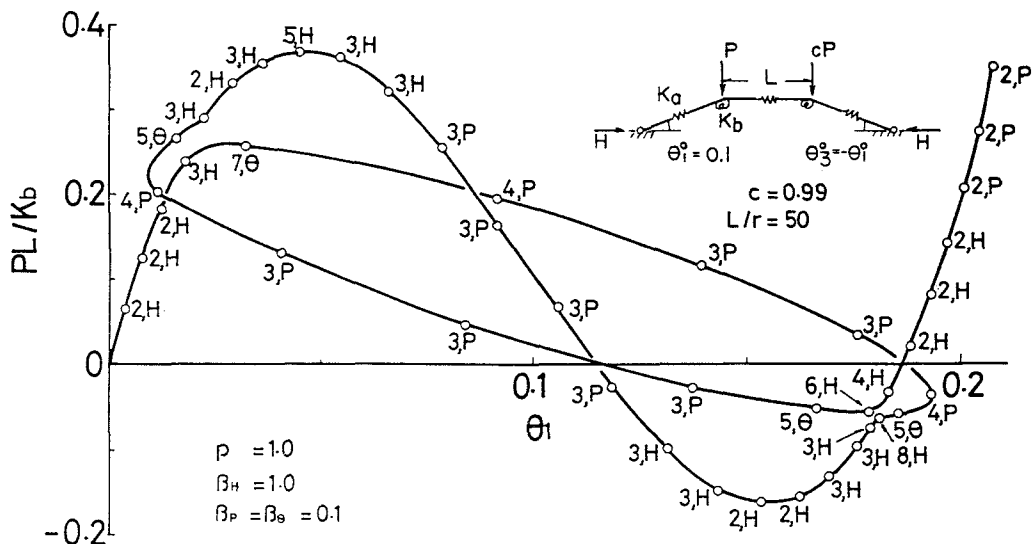


Fig.6 Equilibrium path ($PL/K_b - \theta_1$) of 2-hinged arch model (imperfect system)

た方向に進み出してもそれを検出できないような状態は好ましくないので、不完全系を対象にしているにも関わらず計算機が「分岐点に到達した」と言うメッセージを出したら、これはスケーリングが悪いのだと判断し、その修正を行った上で再計算を行う方が良い。

なお、釣り合い方程式の誘導において、通常無次元化が行われるが、この時各変数成分が同程度の大きさになるようなより良い無次元化を行うことが、スケーリングと同様精度向上につながることは言うまでもない。

6. 数値計算例

実際の例題を用いて本解法の検討を試みる。なお、用いた計算機は、NECパーソナルコンピュータPC-9801Eである。

完全系の釣り合い経路に臨界点（限界点と分岐点）を含んでいる構造系を計算の対象とするため、2ヒンジアーチ型モデルを採り上げることにする。特に、限界点に達する前に分岐点が存在する系（要素長に対する細長比 $L/r=50$ ）を考え、初期不整として微小な荷重不整 $c=0.99$ を持つ場合における釣り合い経路の追跡計算を行った。この計算においてスケーリング常数 β は、水平反力 H 、荷重 P および増分回転変位 θ の数値の位を揃えるように与えた。さらに球面半径 ρ は、式(2.2)において $N_s=5$ および $\alpha=3$ において変化させている。その結果を示したのがFig.6

であり、回転バネ常数 K_b により無次元化された荷重 PL/K_b と端増分回転変位 θ_1 の釣り合い経路曲線を示している。図中の各釣り合い位置における数値と文字は、それぞれ所要収束回数と主要な変数を示している。図から明らかなように、対応する完全系の臨界点付近において何ら問題なく理想的な釣り合い点が自動的に計算され、直線経路領域では粗く臨界点近傍に

Table-1

L/r	ρ	β_w	β_θ	β_H	β_a	β_P
50	0.3	1.0	0.3	9.0	1.0	0.4
32	0.2	1.0	0.2	4.0	1.0	1.0
25	0.2	1.0	0.2	3.0	1.0	0.2
10	0.1	1.0	0.2	4.0	1.0	1.0

β_w : 軸方向伸びに対するスケーリング常数

β_a : 鉛直反力に対するスケーリング常数

おいては密に求められている。

また、本解法は対応する完全系の場合についても計算でき、 L/r の変化に対して、球面半径およびスケーリング常数を Table-1 のように与えた場合の釣り合い径路曲線を示したのが Fig.7である。

座屈を生じない系の場合には、ほぼ一定の間隔で釣り合い点が求められ、臨界点を持つ系の径路計算においては、十分な精度で臨界点を乗り越え、後座屈挙動を追跡している。

次に、完全系において分岐点が存在する柱を採り上げ、初期不整として変位不整 $\theta^0 = 0.001$

を持つ場合の弾塑性解析を行った。材料は、完全弾塑性体とし降伏角を $\theta_y = 0.005$ と与えた。解析結果を示したのが Fig.8である。図中の縦軸は回転バネ常数 K で無次元化した荷重を、横軸は端増分回転変位 θ_1 を取っている。スケーリング β は図表示範囲の最大値をもって行った。基本径路と降伏後の新しい釣り合い径路との交差する付近の釣り合い点を十分に追跡しており、全体として妥当な釣り合い径路追跡計算を行うことができた。

なお、以上の数値解析における収束判定は、ノルム評価で行い $\varepsilon = 10^{-4}$ とした。

最後に、正弦波の変位不整 ($\theta^0 = 0.0001$, $\delta^0/S \approx 3 \times 10^{-5}$) を持つ柱の後座屈挙動について要素数 $m = 20$

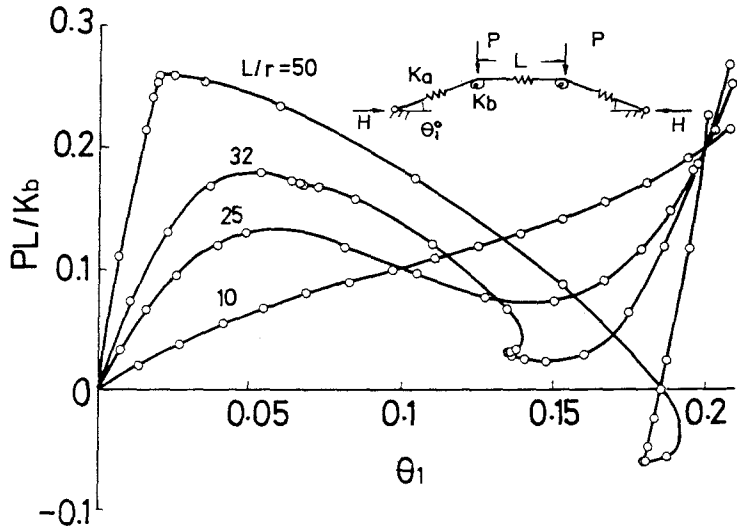


Fig.7 Equilibrium paths of the perfect model

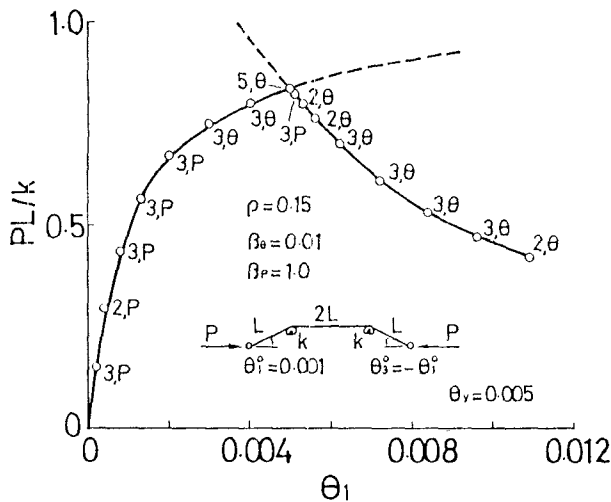


Fig.8 Elasto-plastic analysis of column

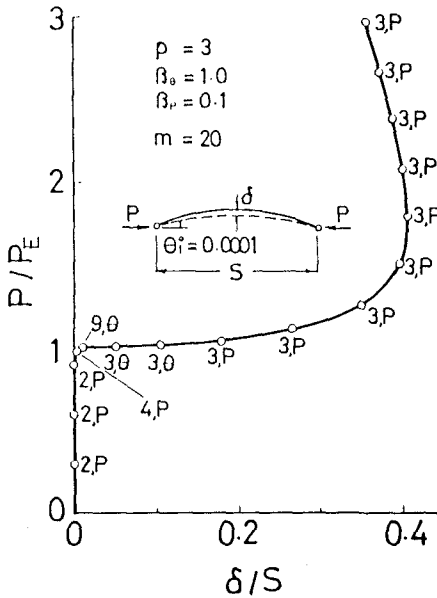


Fig.9 Post-buckling behavior of column

を用いて解析した。その結果が Fig. 9 である。ここに縦軸は荷重と Euler 座屈値の比 (P/P_E) を、横軸はスパン中央の鉛直たわみとスパン比 (δ/S) をとっている。なお、収束判定は $\varepsilon = 10^{-5}$ とした。係数行列の次元数が大きくなった場合、解の精度および所要収束回数の増加が心配されたがこの結果で見るとあまりその心配は無いものと思われる。

7. 結論

構造物の分岐点を含む釣り合い径路を追跡する数値計算法として、弧長増分法に基礎をおいた一般的解法の提案を行った訳であるが、結論として次のようにまとめることができる。

- 1) 球状探索面を用いた弧長増分法の採用により、制約条件パラメータの選定から解放され、求める釣り合い点が相互に理想的距離をもって計算できる。しかし、球面は釣り合い径路と少なくとも2点で交差するので、逆向きの解や共役な径路への移行した解に収束する可能性があり、4章(3)節の処理法を行う必要がある。
- 2) 本消去法は、解の精度が常に保たれ、自動的に主要な変数を選ぶことができるとともに、分岐点の存在する場合、従属式が最後にまわされるなどの利点をもつ。したがって、完全系および僅かな初期不整を持つ不完全系における問題に対して、本消去法を導入することにより、その分岐点近傍の計算精度を高めることができる。また、この消去法と並行して行列式の値を計算し、その値の符号を利用することにより自動的に分岐点を乗り越えることができる。
- 3) 釣り合い径路追跡計算を行う場合、着目する変数成分が同程度の大きさを持つようにスケーリングすることが重要であり、これにより特に分岐点近傍におけるトラブルの発生を防ぐことができる。
- 4) 本解法は、幾何学的非線形問題ばかりでなく材料非線形の影響を考慮した問題、さらには大次元行列を扱う解析にも充分適用可能である。

文献

- 1) E.Hinton, D.R.J.Owen, C.Taylor : Recent advances in non-linear computational mechanics, Pineridge press limited, 1982
- 2) 細野 透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その1、その2)、日本建築学会論文報告集、No.242, pp.41~48, No.243, pp.21~30, 1976
- 3) E.Riks : An incremental approach to the solution of snapping and buckling problem, Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp.529-551, 1979
- 4) 野上邦栄・伊藤文人・尾崎浩明 : 有限剛体要素モデルを用いた骨組部材の弾性解析、JSSCマトリックス解析法研究論文集、No.17, pp.215-220, 1983
- 5) Y.Hangai : Application of the generalized inverse to the geometrically nonlinear problem, SM, Archives, Vol.6, pp.129-167, 1981
- 6) 野上邦栄・伊藤文人 : 球状探索面を用いた反復法、土木学会第39回年次学術講演会講演概要集 (第1部)、pp.39-40, 1984
- 7) J.M.T.Thompson and G.W.Hunt : Elastic instability phenomena, Jhon Wiley and Sons, 1984

(1985年10月18日受付)