構造工学論文集　Vol.32A（1986年3月）　　土木学会

有限回転を伴う充実空間曲線棒部材の幾何学的非線形理論

Geometrically Nonlinear Theory of Naturally Curved and Twisted Rods Undergoing Finite Rotations

井浦雅司 *　　平嶋政治 **
By Masashi IURA and Masaharu HIRASHIMA

A new approach is introduced to develop a finite displacement theory of naturally curved and twisted rods with finite rotations. Particular attention is paid to investigate the coupling of finite rotations under the Bernoulli-Euler hypothesis. The significant advantages of the present approach are that the exact displacement field are obtained through pure mathematical manipulations, and that the exact twist and curvatures after the deformation are caluculated with much less efforts. Moreover, the introduction of the new parameter clarifies the physical meaning of the resulting equations. The accuracy of the present equilibrium equations is confirmed through comparisons with the equilibrium equations obtained by the equilibrium method.

1．はじめに

構造物の基本的要素である一次元棒部材の幾何学的非線形理論は，これまで多くの研究者の注目を集めている。特に，有限回転はベクトル則に従わないことから，有限な回転変位を伴う棒部材の力学的挙動を解明するために理論的研究および数値解析が盛んに行なわれている。本報告では，一次元棒理論の解析において従来用いられることが少なかった有限回転ベクトル θ を用いて，回転成分の連成を考慮した充実空間曲線棒部材の有限変位理論を展開する。

微小変位理論では，ひずみ場の仮定から出発して変位関数を求める方法が主流をなしており[1]，有限変位問題においてもこの方法が広く用いられている[2)～4)]。しかしながら，有限変位問題では上記の方法を厳密に適用すると，非線形の微分方程式を解かねばならなくなり，それを避けるために，軸線方向の変位成分に関する2次項を無視するという近似化が行なわれている。その結果，得られた基礎式の適用範囲が限定されたり，また回転成分の連成が無視されるなど多くの問題点が指摘されている[5),6)]。

回転成分の連成が問題となるのは棒部材が3次元的な挙動を示す場合であり，2次元すなわち平面骨組部材の場合には，回転に関する自由度が1であり連成問題は生じることなく，有限回転の取扱いは比較的容易である。西野・倉方・後藤[7)]はBernoulli-Euler の仮定のみを用いて，平面棒部材の有限変位理論を展開しており，微小ひずみの仮定は変位場の変分量の計算をした後に用いるべきであると指摘している。

*　工博　東京電機大学　建設工学科　（350　埼玉県比企郡鳩山町石坂）
**　工博　早稲田大学　土木工学科　（160　東京都新宿区大久保3－4－1）

一方，3次元的挙動を示す棒部材においては，3軸回りの回転成分が連成することになり，様々な手法により有限変位理論が展開されている。前田・林[5]は回転行列を用いて，新たなパラメーターを導入し，断面剛の仮定を厳密に満たす変位関数を求めている。しかし，従来の棒理論と同様に，変形の記述を4個のパラメーターで行なう段階で微小回転の仮定が用いられ，また近似された変位関数においても，既往の研究と一部異なっているなどの問題を含んでいる[6]。Besseling[8]，Rosen・Friedmann[9]はEuler 角を用いて有限回転角を評価しているが，文献(5) と同様に，パラメーターの数を4個に低減する段階で微小回転の仮定が導入されているため，得られた基礎式の適用範囲が限定されてしまう。Schroeder[10]，平嶋・井浦・依田[11]，事口・久保・中井[12]は，回転行列と等価な有限回転ベクトルを用いて，全変位を平面保持則に従う変位，部材軸回りのねじれによる変位，反りに伴う変位に分けている。これらの研究の中では，文献(11)がより精確な変位関数を誘導していると考えられるが，高次項を含めた時に断面剛の仮定が満たされないという問題が残されている。島田[13]，Panayotounakos・Theocaris[14]は，幾何学的考察により充実断面空間曲線棒の有限変位理論を展開しているが，ねじれモーメントにおいて変形によるねじれ率の2次項が考慮されておらず，非線形項の扱いに統一性が欠けている。以上の研究とは異なった手法により，3軸回りの有限回転を評価している研究として，倉方・西野[6]，阿井・西野[16]，倉方[15]の報告がある。これらの研究では，変位パラメーターの設定には自由度があり，必ずしも軸線の変位成分をパラメーターにとる必要はないこと，また回転成分に関しては，微小変位理論と同等の意味を有する回転パラメーターは有限変位理論では存在しないことが示されている。最近では，後藤・松浦・長谷川[17]，林・前田[18]らも別の手法により有限回転を伴う一次元棒理論を展開している。以上の研究はいずれもBernoulli-Euler の仮定に基づいており，せん断変形は考慮されていない。Stein[19]は有限回転ベクトルを用いて，一次元部材の一般論を展開し，回転ベクトルの成分と部材軸の変位成分との関係が示されているが，独立パラメータによる回転ベクトル成分の陽な表現式は得られていない。

有限回転が問題となるのは棒部材に限定されるわけでなく，板・殻部材においても，Simmonds・Danielson[20]，Pietraszkiewicz[21]，Iura・Hirashima[22]らにより，有限回転ベクトル$\boldsymbol{\Omega}$を用いて有限変位理論が展開されている。また，Pietraszkiewicz・Badur[23]は回転行列と3種類の有限回転ベクトルを用いて連続体の非線形問題を論じている。

本報告では，全回転量をωとする時に，$2\tan(\omega/2)$ の大きさを有する有限回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$を用いることにより，部材軸の変位成分の他に，有限回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$の部材軸方向の成分を新たに独立パラメーターに選び，従来の棒理論と同様に4個のパラメーターで棒部材の変形を記述している。一次元棒部材の一般論を述べるとかなり複雑となり，また部材軸上の回転成分に注目するため，ここでは反り変形が無視できる断面を有する棒部材を対象としている。まず本報告で用いる基本的な仮定を述べる。

(1) 部材断面は部材軸に沿って一定である。

(2) 無荷重状態の部材軸は，任意の初期ねじれ率と初期曲率を有する滑らかな空間曲線である。

(3) 変位前に部材軸に垂直な平面は，変位後の部材軸に対しても垂直で平面のままである。

ここに，仮定(3) はBernoulli-Euler の仮定である。

2章から5章までは仮定(1) ～(3) のみを用いて，微小ひずみの仮定を用いることなく，棒部材の変位関数および変位後の棒軸線のねじれ率と曲率を計算し，無理数で表示される結果を求めている。6章では，微小ひずみの仮定のみを導入し，平衡方程式および境界条件式を求めており，幾何学的な考察から得られる結果と一致することを7章で確かめている。なお，本報告では添字についてはEinsteinの総和規約を用いており，特に断わらない限り，ラテン文字は1,2,3 をとるものとする。

2．変位前の幾何量

まず本報告で用いる座標系およびその基底ベクトルについて説明する。任意点を原点にとり空間固定直線

直交座標系X^iを定め，その基底ベクトルを$\mathbf{i}_i$とする。次に部材軸と横断面との交点Ｓを原点とし，部材軸方向にξ^1 座標を，さらに横断面における主軸の方向にξ^2 ，ξ^3 座標をとり，その基底ベクトルを$\mathbf{e}_i$とする。また，部材の横断面内における任意の点P において，その基底ベクトルが$\mathbf{e}_i$と一致するように局所座標系z^iを導入し，その基底ベクトルを$\mathbf{b}_i$とおく。なお，座標系は全て右手系とし，その方向等はFig·1 に示す。

部材軸上の点Ｓの位置ベクトルを

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}\ (\xi^1)=x^m\ \mathbf{i}_m \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

とおくと，基底ベクトル$\mathbf{e}_1$ は

$$\mathbf{e}_1=\mathbf{x}\ (\xi^1)_{,1} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

と求まり，ここに$(\ )_{,1}$ はξ^1に関する微分を示す。

ξ座標系の基底ベクトル$\mathbf{e}_i$ について，Frenet-Serretの公式より以下の関係が成立する。

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}_{,1}=\begin{pmatrix}0 & \kappa_3 & -\kappa_2\\ -\kappa_3 & 0 & \kappa_1\\ \kappa_2 & -\kappa_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \quad \cdots (3)$$

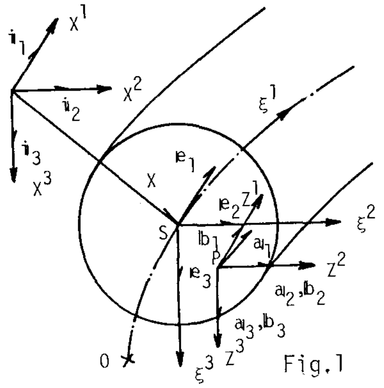

Fig.1

ここに，κ_1 は初期ねじれ率，κ_2 ・κ_3 は初期曲率であり，いずれも一般にξ^1 の関数となる。

横断面内における点P の位置ベクトルは

$$\mathbf{r}=\mathbf{x}+\xi^2\mathbf{e}_2+\xi^3\mathbf{e}_3 \quad \cdots\cdots\cdots (4)$$

と表わされ，これより点Ｐにおける基底ベクトル$\mathbf{a}_i$は

$$\mathbf{a}_1=\sqrt{g}\,\mathbf{e}_1-\kappa_1\xi^3\mathbf{e}_2+\kappa_1\xi^2\mathbf{e}_3 \quad ,\ \mathbf{a}_2=\mathbf{e}_2 \quad ,\ \mathbf{a}_3=\mathbf{e}_3 \quad \cdots\cdots\cdots (5)$$

と求まり，ここに

$$\sqrt{g}=1+\kappa_2\xi^3-\kappa_3\xi^2 \quad \cdots\cdots\cdots (6)$$

である。

3．有限回転ベクトル

Pitraszkiewiczによれば[21)]，既往の研究で用いられている有限回転ベクトルには，次式で定義される３種類の回転ベクトルがある。

$$\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{\phi}\quad ,\ \boldsymbol{\Omega}=\sin\omega\,\boldsymbol{\phi}\quad ,\ \boldsymbol{\theta}=2\ \tan\omega/2\boldsymbol{\phi} \quad \cdots\cdots\cdots (7.\ a\text{-}c)$$

ここに，$\boldsymbol{\phi}$は回転方向の単位ベクトル，ωはその回転軸回りの全回転量である。文献(5) では，回転行列を用いて有限回転を評価しているが，その結果は式(7.a) で定義される$\boldsymbol{\omega}$を用いても誘導できる。また，式(7.b) で定義される$\boldsymbol{\Omega}$は殼理論で広く利用されている。一方，式(7.c) で定義される$\boldsymbol{\theta}$は，これまで多く用いられておらず，その有効性については詳しく論じられていない。そこで，本報告では有限回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$を用いて，有限回転角の影響を精確に評価しようとするものである。なお，式(7.c) からわかるように，全回転量ωの適用範囲は次式の通りである。

$$-\pi<\omega<\pi \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

仮定(3) より，変位後のξ^i 座標系の単位基底ベクトル$\bar{\mathbf{e}}_i$は直交していることから，単位基底ベクトル$\mathbf{e}_i$と$\bar{\mathbf{e}}_i$との関係は$\boldsymbol{\theta}$を用いて

$$\bar{\mathbf{e}}_i=\mathbf{e}_i+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ \boldsymbol{\theta}\times\mathbf{e}_i+\frac{1}{4}(1+\cos\omega)\ \boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{e}_i) \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

と表わされる。ここで，$\boldsymbol{\theta}$を成分表示して

$$\boldsymbol{\theta}=\theta^i\ \mathbf{e}_i \quad \cdots\cdots\cdots (10)$$

とおくと，式(9) より$\bar{\mathbf{e}}_i$は以下のように表わされる。

$$\overline{e}_1=\left[1-\frac{1}{4}(1+\cos\omega)\ \{(\theta^2)^2+(\theta^3)^2\}\right]e_1+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (\theta^3+\frac{1}{2}\theta^1\theta^2)\ e_2$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (-\theta^2+\frac{1}{2}\theta^1\theta^3)\ e_3 \quad \cdots\cdots (11.a)$$
$$\overline{e}_2=\left[1-\frac{1}{4}(1+\cos\omega)\ \{(\theta^3)^2+(\theta^1)^2\}\right]e_2+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (\theta^1+\frac{1}{2}\theta^2\theta^3)\ e_3$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (-\theta^3+\frac{1}{2}\theta^2\theta^1)\ e_1 \quad \cdots\cdots (11.b)$$
$$\overline{e}_3=\left[1-\frac{1}{4}(1+\cos\omega)\ \{(\theta^1)^2+(\theta^2)^2\}\right]e_3+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (\theta^2+\frac{1}{2}\theta^3\theta^1)\ e_1$$
$$+\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (-\theta^1+\frac{1}{2}\theta^2\theta^3)\ e_2 \quad \cdots\cdots (11.c)$$

なお，θ^i とωとの間には，式(7.c)，(10)より以下の関係式が成り立つ。

$$(\theta^1)^2+(\theta^2)^2+(\theta^3)^2=4\ (1-\cos\omega)\ /\ (1+\cos\omega) \quad \cdots\cdots (12)$$

式(11)で求まった$\overline{e}_i$を用いると，仮定(3) より，任意点Pの変位ベクトル**U**は，部材軸の変位ベクトルを**u**とすれば

$$\mathbf{U}=\mathbf{u}+\xi^2(\overline{e}_2-e_2)+\xi^3(\overline{e}_3-e_3) \quad \cdots\cdots (13)$$

と求まる。ベクトル**U**，**u**を成分表示して

$$\mathbf{U}=U^i\ e_i\ ,\qquad \mathbf{u}=u^i\ e_i \quad \cdots\cdots (14.a,b)$$

とおくと，各成分U^i は以下のように求まる。

$$U^1=u^1+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos\omega)\ (-\theta^3+\frac{1}{2}\theta^1\theta^2)+\frac{1}{2}\xi^3(1+\cos\omega)\ (\theta^2+\frac{1}{2}\theta^3\theta^1) \quad \cdots (15.a)$$
$$U^2=u^2-\frac{1}{4}\xi^2(1+\cos\omega)\ \{(\theta^3)^2+(\theta^1)^2\}+\frac{1}{2}\xi^3(1+\cos\omega)\ (-\theta^1+\frac{1}{2}\theta^2\theta^3) \quad \cdots (15.b)$$
$$U^3=u^3+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos\omega)\ (\theta^1+\frac{1}{2}\theta^2\theta^3)-\frac{1}{4}\xi^3(1+\cos\omega)\ \{(\theta^1)^2+(\theta^2)^2\} \quad \cdots (15.C)$$

4．変位後の幾何量

変位後の単位基底ベクトル$\overline{e}_1$は，式(11.a)とは別に

$$\overline{e}_1=(\mathbf{x}+\mathbf{u})_{,1}\ /\ |(\mathbf{x}+\mathbf{u})_{,1}| \quad \cdots\cdots (16)$$

と表わすこともできる。これを成分表示すると，

$$\overline{e}_1=\{(1+u^1|_1)\ e_1+u^2|_1\ e_2+u^3|_1\ e_3\}\ /\sqrt{G_0} \quad \cdots\cdots (17)$$

となり，ここに$(\ )|_1$ は共変微分を示し，

$$u^1|_1=u^1{}_{,1}-\kappa_3\ u^2+\kappa_2\ u^3\ ,\qquad u^2|_1=u^2{}_{,1}+\kappa_3\ u^1-\kappa_1\ u^3 \quad \cdots\cdots (18.a,b)$$
$$u^3|_1=u^3{}_{,1}-\kappa_2\ u^1+\kappa_1\ u^2\ ,\qquad G_0=(1+u^1|_1)^2+(u^2|_1)^2+(u^3|_1)^2 \quad \cdots (18.c,d)$$

である。式(11.a)，(17)より，変位成分u^i と回転成分θ^i との間に次の関係式が得られる。

$$1-\frac{1}{4}(1+\cos\omega)\ \{(\theta^2)^2+(\theta^3)^2\}=u^1\|_1 \quad \cdots\cdots (19.a)$$
$$\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (\theta^3+\frac{1}{2}\theta^1\theta^2)=u^2\|_1 \quad \cdots\cdots (19.b)$$
$$\frac{1}{2}(1+\cos\omega)\ (-\theta^2+\frac{1}{2}\theta^3\theta^1)=u^3\|_1 \quad \cdots\cdots (19.b)$$

ここに，

$$u^1\|_1=(1+u^1|_1)\ /\sqrt{G_0}\ ,\qquad u^2\|_1=u^2|_1/\sqrt{G_0}\ ,\qquad u^3\|_1=u^3|_1/\sqrt{G_0} \quad \cdots\cdots (20.a\text{-}c)$$

である。

式(19)は，3個の未知数θ^i に対して，方程式の数が3本であることから，θ^i が変位成分u^i により表わせるように思われる。しかしながら，式(12)，(18.d)を用いると，式(19)はお互いに独立ではなく，2本の式から残りの1本の式が導かれることが容易にわかる。すなわち，独立な式は2本であり，θ^i をu^i により表わすには未知数が1つ多いことがわかる。単に，θ^i をu^i により表わすためには，θ^i の中から任意に1つを独立パラメーターにとればよいわけである。しかしながら，従来の棒理論とのつながりを考えた時に，断面の回転を表わすe_1 軸回りの回転成分θ^1 を新たなパラメーターに採用することが自然と思われる。そこで本報告では，変位パラメーターとして，u^i の他に次式で定義されるパラメーター を導入する。

$$\theta^1=2\tan\vartheta/2=2\sin\vartheta\ /\ (1+\cos\vartheta)\ ,\qquad (-\pi<\vartheta<\pi) \quad \cdots\cdots (21)$$

ここで，回転角に対する許容範囲に注目すると，本報告の適用範囲は文献(6) の２倍となっており，より大きな回転変位を扱うことが可能である。

式(12)，(19.a)，(21)より，cos ω はu，ϑ を用いて以下のように表わせる。

$$\cos\omega = -1 + \frac{1}{2}(1+\cos\vartheta)(1+u^{1}\|_{1}) \quad \cdots\cdots \quad (22)$$

式(22)を式(19.b,c)に代入し，式(12)を用いると，残りの回転成分である θ^{2}，θ^{3} が u^{i}，ϑ により以下のように表わされる。

$$\theta^{2} = \lambda\ \{u^{2}\|_{1}\sin\vartheta/(1+\cos\vartheta) - u^{3}\|_{1}\},\quad \theta^{3} = \lambda\ \{u^{2}\|_{1} + u^{3}\|_{1}\sin\vartheta/(1+\cos\vartheta)\} \quad (23.a,b)$$

ここに，

$$\lambda = 2/(1+u^{1}\|_{1}) \quad \cdots\cdots \quad (24)$$

である。以上で，全回転角 ω，回転成分 θ^{2}，θ^{3} が変位パラメーターー u^{i}，ϑ により表わされ，これらを式(15)に代入すると変位関数 U^{i} は

$$U^{1} = u^{1} - \xi^{2}(u^{2}\|_{1}\cos\vartheta + u^{3}\|_{1}\sin\vartheta) + \xi^{3}(u^{2}\|_{1}\sin\vartheta - u^{3}\|_{1}\cos\vartheta) \quad \cdots\cdots \quad (25.a)$$

$$\begin{aligned} U^{2} = u^{2} - \xi^{2}[\ &(1-\cos\vartheta)/\lambda + \lambda\ \{(u^{2}\|_{1})^{2}(1+\cos\vartheta)/4 + \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\sin\vartheta \\ &+ (u^{3}\|_{1})^{2}(1-\cos\vartheta)/4\}\ ] + \xi^{3}[-\tfrac{1}{\lambda}\sin\vartheta + \lambda\ \{\tfrac{1}{4}(u^{2}\|_{1})^{2}\sin\vartheta \\ &- \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\cos\vartheta - \tfrac{1}{4}(u^{3}\|_{1})^{2}\sin\vartheta\}\ ] \quad \cdots\cdots \quad (25.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^{3} = u^{3} + \xi\ [&\tfrac{1}{\lambda}\sin\vartheta + \lambda\ \{\tfrac{1}{4}(u^{2}\|_{1})^{2}\sin\vartheta - \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\cos\vartheta - \tfrac{1}{4}(u^{3}\|_{1})^{2}\sin\vartheta\}\ ] \\ &- \xi^{3}[\ (1-\cos\vartheta)/\lambda + \lambda\ \{(u^{2}\|_{1})^{2}(1-\cos\vartheta)/4 - \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\sin\vartheta \\ &+ (u^{3}\|_{1})^{2}(1+\cos\vartheta)/4\}\ ] \quad \cdots\cdots \quad (25.c) \end{aligned}$$

と求まる。付言するならば，式(25)で求まった変位関数 U^{i} は，非線形の式で表わされるひずみ－変位の関係式に代入すると，断面剛の仮定を完全に満足していることがわかる。さらに，式(11.b,c)，(23) より，

$$\cos\vartheta = (\overline{e}_{2}\cdot e_{2} + \overline{e}_{3}\cdot e_{3})\ \lambda/2 \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

なる関係式が得られ，これより新しく導入されたパラメーター ϑ の物理的意味が明らかとなる。

次に，以下の式で定義される変位後のねじれ率 $\overline{\kappa}_{1}$ と曲率 $\overline{\kappa}_{2}$，$\overline{\kappa}_{3}$ を求める。

$$\overline{\kappa}_{1} = \overline{e}_{2,1}\cdot\overline{e}_{3},\quad \overline{\kappa}_{2} = \overline{e}_{3,1}\cdot\overline{e}_{1},\quad \overline{\kappa}_{3} = \overline{e}_{1,1}\cdot\overline{e}_{2} \quad \cdots\cdots \quad (27.a\text{-}c)$$

式(11)を用いて ω，θ^{i} で $\overline{\kappa}_{i}$ を表わすと，

$$\overline{\kappa}_{1} = (1+\cos\omega)\ \theta^{1}{}_{,1}/2 + (1+\cos\omega)\ \theta^{3}\theta^{2}{}_{,1}/4 - (1+\cos\omega)\ \theta^{2}\theta^{3}{}_{,1}/4 \quad (28.a)$$

$$\overline{\kappa}_{2} = (1+\cos\omega)\ \theta^{2}{}_{,1}/2 + (1+\cos\omega)\ \theta^{1}\theta^{3}{}_{,1}/4 - (1+\cos\omega)\ \theta^{3}\theta^{1}{}_{,1}/4 \quad (28.b)$$

$$\overline{\kappa}_{3} = (1+\cos\omega)\ \theta^{3}{}_{,1}/2 + (1+\cos\omega)\ \theta^{2}\theta^{1}{}_{,1}/4 - (1+\cos\omega)\ \theta^{1}\theta^{2}{}_{,1}/4 \quad (28.c)$$

となる。式(21)～(23)を用いて，変位パラメーターにより $\overline{\kappa}_{i}$ を表わすと以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_{1} = &[1/\lambda + \{(u^{2}\|_{1})^{2} + (u^{3}\|_{1})^{2}\}\ \lambda/4]\ \vartheta_{,1} + \{(u^{2}\|_{1})_{,1}\ u^{3}\|_{1} - (u^{3}\|_{1})_{,1}\ u^{2}\|_{1}\}\ \lambda/2 \\ &+ \kappa_{1}\ u^{1}\|_{1} + \kappa_{2}\ u^{2}\|_{1} + \kappa_{3}\ u^{3}\|_{1} \quad \cdots\cdots \quad (29.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_{2} = &-(u^{2}\|_{1}\sin\vartheta - u^{3}\|_{1}\cos\vartheta)\ (u^{1}\|_{1})_{,1}\ \lambda/2 + (u^{2}\|_{1})_{,1}\ \sin\vartheta - (u^{3}\|_{1})_{,1}\ \cos\vartheta \\ &- \kappa_{1}(u^{2}\|_{1}\cos\vartheta + u^{3}\|_{1}\sin\vartheta) + \kappa_{2}[1 + (\cos\vartheta - 1)/\lambda - \lambda\ \{(u^{2}\|_{1})^{2}(1+\cos\vartheta)/4 \\ &+ \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\sin\vartheta + (u^{3}\|_{1})^{2}(1-\cos\vartheta)/4\}\ ] + \kappa_{3}[(\sin\vartheta)/\lambda + \lambda\ \{\tfrac{1}{4}(u^{2}\|_{1})^{2}\sin\vartheta \\ &- \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\cos\vartheta - \tfrac{1}{4}(u^{3}\|_{1})^{2}\sin\vartheta\}\ ] \quad \cdots\cdots \quad (29.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\kappa}_{3} = &-(u^{2}\|_{1}\cos\vartheta + u^{3}\|_{1}\sin\vartheta)\ (u^{1}\|_{1})_{,1}\ \lambda/2 + (u^{2}\|_{1})_{,1}\ \cos\vartheta + (u^{3}\|_{1})_{,1}\ \sin\vartheta \\ &+ \kappa_{1}(u^{2}\|_{1}\sin\vartheta - u^{3}\|_{1}\cos\vartheta) + \kappa_{2}[-(\sin\vartheta)/\lambda + \lambda\ \{\tfrac{1}{4}(u^{2}\|_{1})^{2}\sin\vartheta \\ &- \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\cos\vartheta - \tfrac{1}{4}(u^{3}\|_{1})^{2}\sin\vartheta\}\ ] + \kappa_{3}[1 + (\cos\vartheta - 1)/\lambda \\ &- \lambda\ \{(u^{2}\|_{1})^{2}(1-\cos\vartheta)/4 - \tfrac{1}{2}u^{2}\|_{1}u^{3}\|_{1}\sin\vartheta + (u^{3}\|_{1})^{2}(1+\cos\vartheta)/4\}\ ] \quad (29.C) \end{aligned}$$

ここで，文献(6) では $\overline{\kappa}_{i}$ の計算において変位成分の４次以上の項を無視しているのに対し，式(29)では変位成分について何の制限も設けていないことに注意を要する。

5．内力と外力による仮想仕事

ξ^i 座標系におけるGreen のひずみテンソルをe_{ij}とおくと，基底ベクトルを用いて

$$e_{ij} = (\bar{\mathbf{a}}_i \cdot \bar{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)/2 \quad \cdots (30)$$

と定義される。ここに，

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = (\sqrt{G_0} - \bar{\kappa}_3\xi^2 + \bar{\kappa}_2\xi^3)\,\bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\kappa}_1\xi^3\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\kappa}_1\xi^2\bar{\mathbf{e}}_3, \quad \bar{\mathbf{a}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3 \quad \cdots (31.a\text{-}c)$$

と求まることから，e_{ij}は以下のように表わされる。

$$e_{11} = (\varepsilon_0 - \kappa_3^*\xi^2 + \kappa_2^*\xi^3)\,\{\sqrt{g} + (\varepsilon_0 - \kappa_3^*\xi^2 + \kappa_2^*\xi^3)/2\} + \rho^2\kappa_1^*(\kappa_1^* + 2\kappa_1)/2 \quad \cdots (32.a)$$

$$e_{12} = e_{21} = -\kappa_1^*\xi^3/2, \quad e_{13} = e_{31} = \kappa_1^*\xi^2/2, \quad e_{22} = e_{23} = e_{32} = e_{33} = 0 \quad \cdots (32.b\text{-}d)$$

ここに，

$$\varepsilon_0 = \sqrt{G_0} - 1, \quad \kappa_i^* = \bar{\kappa}_i - \kappa_i, \quad \rho^2 = (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \quad \cdots (33.a\text{-}c)$$

である。ξ^i座標系における第２種のPiola-Kirchhoff 応力テンソルをτ^{ij}とおくと，内力による仮想仕事は

$$IVW = \int_V (\tau^{11}\delta e_{11} + 2\tau^{12}\delta e_{12} + 2\tau^{13}\delta e_{13})\,dV \quad \cdots (34)$$

となり，ここに

$$dV = \sqrt{g}\;d\xi^1\,d\xi^2\,d\xi^3 \quad \cdots (35)$$

である。

式(5) からわかるように，任意点Ｐにおける基底ベクトルは直交していないために，構成方程式の表現が複雑となる。そこで，文献(11)と同様に，ξ^i 座標系の量をZ^i 座標系の量に変換する。まず，Z^i 座標系におけるひずみテンソルをε_{ij}とおけば，e_{ij}との間に以下の関係が成立する。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\xi^m}{\partial Z^i}\frac{\partial\xi^n}{\partial Z^j}e_{mn} \quad \cdots (36)$$

ここに，

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial Z^1} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial\xi^2}{\partial Z^1} = \frac{\kappa_1\xi^3}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial\xi^3}{\partial Z^1} = -\frac{\kappa_1\xi^2}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial\xi^2}{\partial Z^2} = 1, \quad \frac{\partial\xi^3}{\partial Z^3} = 1 \quad \cdots (37.a\text{-}e)$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial Z^2} = \frac{\partial\xi^3}{\partial Z^2} = \frac{\partial\xi^1}{\partial Z^3} = \frac{\partial\xi^2}{\partial Z^3} = 0 \quad \cdots (37.f)$$

である。式(32)，(36)よりε_{ij}は以下のように求まる。

$$\varepsilon_{11} = (\varepsilon_0 - \kappa_3^*\xi^2 + \kappa_2^*\xi^3)\left\{1/\sqrt{g} + (\varepsilon_0 - \kappa_3^*\xi^2 + \kappa_2^*\xi^3)/(2g)\right\} + \rho^2 \times (\kappa_1^*)^2/(2g)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = -\kappa_1^*\xi^3/2\sqrt{g}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \kappa_1^*\xi^2/2\sqrt{g}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \varepsilon_{33} = 0 \quad \cdots (38.a\text{-}d)$$

次に，ξ^i 座標系におてる応力テンソルをσ^{ij}とおくと，その物理成分$\tilde{\sigma}^{ij}$との間に以下の関係式が成立する[6]。

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{b_{ii}}\sqrt{\bar{b}_{jj}} \quad (\text{ i,j not summed }) \quad \cdots (39)$$

ここに，

$$b_{ij} = \mathbb{b}_i \cdot \mathbb{b}_j, \quad \bar{b}_{ij} = \bar{\mathbb{b}}_i \cdot \bar{\mathbb{b}}_j, \quad \mathbb{b}_i = \mathbf{e}_i, \quad \bar{\mathbb{b}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \bar{\mathbb{b}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3,$$

$$\bar{\mathbb{b}}_1 = (\sqrt{g} + \varepsilon_0 - \kappa_3^*\xi^2 + \kappa_2^*\xi^3)\,\bar{\mathbf{e}}_1/\sqrt{g} \quad \cdots (40.a\text{-}f)$$

である。また，σ^{ij}とτ^{ij}との間には

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial Z^i}{\partial\xi^m}\frac{\partial Z^j}{\partial\xi^n}\tau^{mn} \quad \cdots (41)$$

なる関係が成立することから，内力による仮想仕事は次式のように書き直せる。

$$IVW=\int_V\left[\frac{\widehat{\sigma}^{11}}{\sqrt{g}}\left\{\delta\varepsilon_0-\xi^2\delta\kappa_3^*+\xi^3\delta\kappa_2^*+\frac{\rho^2\ \kappa_1^*\ \delta\kappa_1^*}{\sqrt{g}+\varepsilon_0-\kappa_3^*\xi^2+\kappa_2^*\xi^3}\right\}+\frac{(-\widehat{\sigma}^{12}\xi^3+\widehat{\sigma}^{13}\xi^2)\ \delta\kappa_1^*}{\sqrt{g}}\right]dV \quad \cdots\cdots (42)$$

分布外力ベクトルを$\mathbb{P}$，部材端外力ベクトルを$\overline{\mathbb{P}}$とおき，それぞれ成分表示して

$$\mathbb{P}=p_1\ e_1+p_2\ e_2+p_3\ e_3\ ,\quad \overline{\mathbb{P}}=\overline{p}_1\ e_1+\overline{p}_2\ e_2+\overline{p}_3\ e_3 \quad \cdots\cdots (43.a,b)$$

とおくと，外力による仮想仕事は

$$EVW=\int_V(p_i\ \delta U^i)\ dV+\left[\int_A(\overline{p}_i\ \delta U^i)\ dA\right]_{\xi^1=\xi^1_*}^{\xi^1=\xi^1_{**}} \quad \cdots\cdots (44)$$

と表わされ，ここに

$$dA=d\xi^2\ d\xi^3 \quad \cdots\cdots (45)$$

であり，ξ^1_*，ξ^1_{**}は部材両端におけるξ^1の座標値を示す。

6．微小ひずみを仮定した有限変位理論

これまで扱ってきた充実空間曲線棒部材の理論は，仮定(1)～(3)のみに基づいており，いわゆる微小ひずみの仮定は用いられていない。既往の研究の大部分においては，当初から微小ひずみの仮定を導入する場合が多いが，本報告では，4章に示したように，変位関数および変位後のねじれ率を，何の近似を行なうことなく無理数による表現式を得ている。また，5章においては応力テンソルの物理成分による仮想仕事を求めており，ここでも近似化は行なわれていない。しかしながら，式(42)からわかるように，部材軸の伸びひずみε_0，変形に起因する曲率変化量κ_2^*，κ_3^*がρ^2の係数として，座標値ξ^2，ξ^3と共に関与している。よって，このままの形で断面力を定義することは困難であることから，この章では以下の仮定を追加して，微小ひずみの仮定に基づく有限変位理論を展開する。

本章で追加する微小ひずみの仮定を具体的に示すと次のようになる。

$$\varepsilon_0\ ,\ \xi^2\times\kappa_3^*\ ,\ \xi^3\times\kappa_2^*\ll\sqrt{g} \quad \cdots\cdots (46)$$

内力による仮想仕事は式(46)を適用することにより

$$IVW=\int_V\left[\frac{\widehat{\sigma}^{11}}{\sqrt{g}}\left\{\delta\varepsilon_0-\xi^2\delta\kappa_3^*+\xi^3\delta\kappa_2^*+\frac{\rho^2}{\sqrt{g}}\kappa_1^*\delta\kappa_1^*\right\}+\frac{(-\widehat{\sigma}^{12}\xi^3+\widehat{\sigma}^{13}\xi^2)}{\sqrt{g}}\delta\kappa_1^*\right]dV \quad (47)$$

となる。仮想仕事の原理を適用すると，IVW=EVW となり，これより平衡方程式と境界条件式が求まる。

まず，平衡方程式を表わすと，

$$\begin{aligned}&\{N\overline{e}_1-(M_{3,1}+\overline{\kappa}_1M_2-\overline{\kappa}_2T)\ \overline{e}_2+(M_{2,1}-\overline{\kappa}_1M_3+\overline{\kappa}_3T)\ \overline{e}_3\\&+\{T_\eta^*+g_1(M_\eta^*+T^*+T_\xi^*)\}\ (e_1-u^1\|_1\overline{e}_1)\ \lambda^2/4\\&-\{M_\psi^*-g_2(M_\eta^*+T^*+T_\xi^*)\ \lambda/2\}\ (e_2-u^2\|_1\overline{e}_1)\\&+\{M_\varphi^*+g_3(M_\eta^*+T^*-T_\xi^*)\ \lambda/2\}\ (e_3-u^3\|_1\overline{e}_1)\}_{,1}+Q^*=0\end{aligned} \quad \cdots\cdots (48.a)$$

$$T_{,1}+\overline{\kappa}_2M_3-\overline{\kappa}_3M_2+M_\eta^*+T^*+T_\xi^*=0 \quad \cdots\cdots (48.b)$$

となり，ここに断面力等については

$$N=\int\widehat{\sigma}^{11}dA,\ M_2=\int\widehat{\sigma}^{11}\xi^3dA,\ M_3=-\int\widehat{\sigma}^{11}\xi^2dA,\ M_t=\int(-\widehat{\sigma}^{12}\xi^3+\widehat{\sigma}^{13}\xi^2)\ dA,$$

$$M_\rho=\int\widehat{\sigma}^{11}\rho^2\ dA,\ T=M_t+M_\rho\ \kappa_1^*\ ,$$

$$g_1=u^1\|_1(u^2\|_1\cos\vartheta+u^3\|_1\sin\vartheta)\ (u^3\|_1\cos\vartheta-u^2\|_1\sin\vartheta)\ ,$$

$$g_2=u^3\|_1+\lambda/2\ (u^2\|_1)^2u^3\|_1\cos2\vartheta-\lambda/4\ u^2\|_1\{(u^2\|_1)^2-(u^3\|_1)^2\}\sin2\vartheta\ ,$$

$$g_3=-u^2\|_1+\lambda/2\ (u^3\|_1)^2u^2\|_1\cos2\vartheta+\lambda/4\ u^3\|_1\{(u^3\|_1)^2-(u^2\|_1)^2\}\sin2\vartheta \quad \cdots (49.a\text{-}i)$$

であり，外力項については

$$N^*=\int p_1\sqrt{g}\ dA,\ M_2^*=\int p_1\xi^3\sqrt{g}\ dA,\ M_3^*=-\int p_1\xi^2\sqrt{g}\ dA,\ Q_2^*=\int p_2\sqrt{g}\ dA,$$

$Q_3^* = \int p_3 \sqrt{g}\, dA,\ T_{22}^* = -\int p_2 \xi^2 \sqrt{g}\, dA,\ T_{23}^* = -\int p_2 \xi^3 \sqrt{g}\, dA,\ T_{32}^* = \int p_3 \xi^2 \sqrt{g}\, dA,$
$T_{33}^* = -\int p_3 \xi^3 \sqrt{g}\, dA,\ T_{xx}^* = T_{22}^* \sin\vartheta + T_{23}^* \cos\vartheta,\ T_{xy}^* = T_{22}^* \cos\vartheta - T_{23}^* \sin\vartheta,$
$T_{yx}^* = T_{33}^* \cos\vartheta - T_{32}^* \sin\vartheta,\ T_{yy}^* = T_{32}^* \cos\vartheta + T_{33}^* \sin\vartheta,\ Q^* = N^* e_1 + Q_2^* e_2 + Q_3^* e_3,$
$T^* = T_{xx}^* \{1 - (u^2\|_1)^2 \lambda/2\} + T_{yy}^* \{1 - (u^3\|_1)^2 \lambda/2\},\ M_x^* = M_2^* \cos\vartheta - M_3^* \sin\vartheta,$
$M_y^* = M_2^* \sin\vartheta + M_3^* \cos\vartheta,\ M_\eta^* = M_x^* u^2\|_1 + M_y^* u^3\|_1,\ M_\varphi^* = M_x^* - T_{xx}^* u^2\|_1 \lambda/2$
$- \lambda (u^3\|_1 T_{yx}^* - u^2\|_1 T_{yy}^*/2),\ M_\psi^* = M_y^* - T_{yy}^* u^3\|_1 \lambda/2 + \lambda (u^2\|_1 T_{xy}^* + u^3\|_1 T_{xx}^*/2),$
$T_\xi^* = u^2\|_1 u^3\|_1 (T_{xy}^* - T_{yx}^*) \lambda/2,\ T_\eta^* = (u^2\|_1)^2 T_{xy}^* + (u^3\|_1)^2 T_{yx}^* + u^2\|_1 u^3\|_1 (T_{xx}^* - T_{yy}^*)$

. . . . (5 0 .a-v)

である。次に，部材端における境界条件式は

$N\bar{e}_1 - (M_{3,1} + \bar{\kappa}_1 M_2 - \bar{\kappa}_2 T)\bar{e}_2 + (M_{2,1} - \bar{\kappa}_1 M_3 + \bar{\kappa}_3 T)\bar{e}_3$
$= \bar{Q}^* - \{T_\eta^* + g_1 (M_\eta^* + T^* + T_\xi^*)\}(e_1 - u^1\|_1 \bar{e}_1)\lambda/4$
$+ \{M_\psi^* - g_2 (M_\eta^* + T^* + T_\xi^*)\lambda/2\}(e_2 - u^2\|_1 \bar{e}_1)$
$- \{M_\varphi^* + g_3 (M_\eta^* + T^* + T_\xi^*)\lambda/2\}(e_3 - u^3\|_1 \bar{e}_1)$ or $u = \bar{u}$ ......(51.a)

$c_1 M_3 - c_2 M_2 + c_3 T = \bar{M}_\psi^* + \lambda^2 \bar{T}_\eta^* u^2\|_1 / (4 u^1\|_1)$ or $u^2\|_1 = \bar{u}^2\|_1$ ......(51.b)

$d_2 M_2 - d_1 M_3 - d_3 T = \bar{M}_\varphi^* - \lambda^2 \bar{T}_\eta^* u^3\|_1 / (4 u^1\|_1)$ or $u^3\|_1 = \bar{u}^3\|_1$ ......(51.c)

$T = \bar{T}^* + \bar{T}_\xi^* + \bar{M}_\eta^*$ or $\vartheta = \bar{\vartheta}$ ......(51.d)

となる。ここに，$\bar{u}$，ϑ，$\bar{u}^2\|_1$，$\bar{u}^3\|_1$ は部材端において規定される量であり，外力項は，

$\bar{N}^* = \int \bar{p}_1\, dA,\ \bar{M}_2^* = \int \bar{p}_1 \xi^3 dA,\ \bar{M}_3^* = -\int \bar{p}_1 \xi^2\, dA,\ \bar{Q}_2^* = \int \bar{p}_2\, dA,\ \bar{Q}_3^* = \int \bar{p}_3\, dA,$
$\bar{T}_{22}^* = -\int \bar{p}_2 \xi^2\, dA,\ \bar{T}_{23}^* = -\int \bar{p}_2 \xi^3\, dA,\ \bar{T}_{32}^* = \int \bar{p}_3 \xi^2\, dA,\ \bar{T}_{33}^* = -\int \bar{p}_3 \xi^3\, dA,$
$\bar{T}_{xx}^* = \bar{T}_{22}^* \sin\vartheta + \bar{T}_{23}^* \cos\vartheta,\ \bar{T}_{xy}^* = \bar{T}_{22}^* \cos\vartheta - \bar{T}_{23}^* \sin\vartheta,\ \bar{T}_{yx}^* = \bar{T}_{33}^* \cos\vartheta - \bar{T}_{32}^* \sin\vartheta,$
$\bar{T}_{yy}^* = \bar{T}_{32}^* \cos\vartheta + \bar{T}_{33}^* \sin\vartheta,\ \bar{Q}^* = \bar{N}^* e_1 + \bar{Q}_2^* e_2 + \bar{Q}_3^* e_3,$
$\bar{T}^* = \bar{T}_{xx}^* \{1 - (u^2\|_1)^2 \lambda/2\} + \bar{T}_{yy}^* \{1 - (u^3\|_1)^2 \lambda/2\},\ \bar{M}_x^* = \bar{M}_2^* \cos\vartheta - \bar{M}_3^* \sin\vartheta,$
$\bar{M}_y^* = \bar{M}_2^* \sin\vartheta + \bar{M}_3^* \cos\vartheta,\ \bar{M}_\eta^* = \bar{M}_x^* u^2\|_1 + \bar{M}_y^* u^3\|_1,\ \bar{M}_\varphi^* = \bar{M}_x^* - \bar{T}_{xx}^* u^2\|_1 \lambda/2$
$- \lambda (u^3\|_1 \bar{T}_{yx}^* - u^2\|_1 \bar{T}_{yy}^*/2),\ \bar{M}_\psi^* = \bar{M}_y^* - \bar{T}_{yy}^* u^3\|_1 \lambda/2 + \lambda (u^2\|_1 \bar{T}_{xy}^* + u^3\|_1 \bar{T}_{xx}^*/2),$
$\bar{T}_\xi^* = u^2\|_1 u^3\|_1 (\bar{T}_{xy}^* - \bar{T}_{yx}^*) \lambda/2,\ \bar{T}_\eta^* = (u^2\|_1)^2 \bar{T}_{xy}^* + (u^3\|_1)^2 \bar{T}_{yx}^* + u^2\|_1 u^3\|_1 (\bar{T}_{xx}^* - \bar{T}_{yy}^*)$

. . . . (5 2 .a-v)

と表わされる。さらに，

$c_1 = \{1 - (u^2\|_1)^2 \lambda/2\} \cos\vartheta - \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \sin\vartheta + (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, u^2\|_1 / u^1\|_1$

$c_2 = \{-1 + (u^2\|_1)^2 \lambda/2\} \sin\vartheta - \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \cos\vartheta - (u^2\|_1 \sin\vartheta - u^3\|_1 \cos\vartheta)\, u^2\|_1 / u^1\|_1$

$c_3 = -\cos\vartheta\, (u^2\|_1 \sin\vartheta - u^3\|_1 \cos\vartheta) - [\lambda (u^2\|_1 \cos\vartheta + 1/2\, u^3\|_1 \sin\vartheta)$
$+ 1/4\, \lambda^2 (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, (u^2\|_1)^2 / u^1\|_1] \times [\{-1 + \lambda (u^2\|_1)^2/2\} \sin\vartheta$
$- \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \cos\vartheta] - [\lambda/2\, u^3\|_1 \cos\vartheta + \lambda^2/4\, (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, u^2\|_1 u^3\|_1 / u^1\|_1$
$\times [\{1 - \lambda/2\, (u^3\|_1)^2\} \cos\vartheta + \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \sin\vartheta]$,

$d_1 = \{1 - (u^3\|_1)^2 \lambda/2\} \sin\vartheta - \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \cos\vartheta + (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, u^3\|_1 / u^1\|_1$

$d_2 = \{1 - (u^3\|_1)^2 \lambda/2\} \cos\vartheta + \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \sin\vartheta - (u^2\|_1 \sin\vartheta - u^3\|_1 \cos\vartheta)\, u^3\|_1 / u^1\|_1$

$d_3 = -\sin\vartheta\, (u^2\|_1 \sin\vartheta - u^3\|_1 \cos\vartheta) - [\lambda (u^3\|_1 \sin\vartheta + 1/2\, u^2\|_1 \cos\vartheta)$
$+ 1/4\, \lambda^2 (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, (u^3\|_1)^2 / u^1\|_1] \times [\{1 - \lambda (u^3\|_1)^2/2\} \cos\vartheta$
$+ \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \sin\vartheta] - [\lambda/2\, u^2\|_1 \sin\vartheta + \lambda^2/4\, (u^2\|_1 \cos\vartheta + u^3\|_1 \sin\vartheta)\, u^2\|_1 u^3\|_1 / u^1\|_1$
$\times [\{-1 + \lambda/2\, (u^2\|_1)^2\} \sin\vartheta - \lambda/2\, u^2\|_1 u^3\|_1 \cos\vartheta]$ . . . . (5 3 .a-f)

である。

本章では，微小ひずみの仮定を用いていることから，構成方程式については通常の棒理論で用いられているHooke の法則を適用するものとすれば，応力とひずみの関係は

$\hat{\sigma}^{11} = E\,\hat{\varepsilon}_{11}$　,　$\hat{\sigma}^{12} = 2G\,\hat{\varepsilon}_{12}$　,　$\hat{\sigma}^{13} = 2G\,\hat{\varepsilon}_{13}$ . . . . (54.a-c)

と表わされる。ここに，E はヤング係数，G はせん断弾性係数，$\hat{\varepsilon}_{ij}$ はひずみの物理成分を示す。式(38),(49),(54) より，断面力と変位の関係は

$$N = E\{F_1\varepsilon_0 - F_2\kappa_3^* + F_3\kappa_2^* + F_\rho(\kappa_1^*)^2/2\} \quad (55.a)$$

$$M_2 = E\{F_3\varepsilon_0 - I_{23}\kappa_3^* + I_{33}\kappa_2^* + F_{\rho 3}(\kappa_1^*)^2/2\} \quad (55.b)$$

$$M_3 = E\{-F_2\varepsilon_0 + I_{22}\kappa_3^* - I_{23}\kappa_2^* + F_{\rho 2}(\kappa_1^*)^2/2\} \quad (55.C)$$

$$M_\rho = E\{F_\rho\varepsilon_0 - F_{\rho 2}\kappa_3^* + F_{\rho 3}\kappa_2^* + F_{\rho\rho}(\kappa_1^*)^2/2\} \quad (55.d)$$

$$M_t = GJ\kappa_1^* \quad (55.e)$$

と求まり，ここに断面定数は以下のように表わされる。

$$F_1 = \int 1/\sqrt{g}\,dA,\quad F_2 = \int \xi^2/\sqrt{g}\,dA,\quad F_3 = \int \xi^3/\sqrt{g}\,dA,\quad F_\rho = \int \rho^2/g\,dA,$$
$$F_{\rho 2} = \int \rho^2\,\xi^2/g\,dA,\quad F_{\rho 3} = \int \rho^2\,\xi^3/g\,dA,\quad F_{\rho\rho} = \int \rho^4/(g\sqrt{g})\,dA,$$
$$I_{22} = \int (\xi^2)^2/\sqrt{g}\,dA,\quad I_{23} = \int \xi^2\,\xi^3/\sqrt{g}\,dA,\quad I_{33} = \int (\xi^3)^2/\sqrt{g}\,dA,$$
$$J = \int \rho^2/\sqrt{g}\,dA \quad (56.a\text{-}k)$$

7．考察

本報告により得られた結果の妥当性を検討するために，ここでは物体力が存在しない場合について，つり合い法により断面力表示の平衡方程式を導き，微小ひずみの範囲内で両者の結果が一致することを確かめる。部材軸に作用する断面力を

$$\mathbb{N} = N\,\bar{e}_1 + q_2\bar{e}_2 + q_3\bar{e}_3,\qquad \mathbb{M} = T\,\bar{e}_1 + M_2\bar{e}_2 + M_3\bar{e}_3 \quad (57.a,b)$$

とおく。微小要素のつり合いより，力およびモーメントに関する平衡方程式が以下のように求まる。

$$\frac{d\mathbb{N}}{d\xi^1} = \mathbb{0},\qquad \frac{d\mathbb{M}}{d\xi^1} + \bar{\mathbf{e}}_1\times\mathbb{N} = \mathbb{0} \quad (58.a,b)$$

式(58.b)より，ベクトル $\bar{e}_i$ が一次独立であることから以下の式を得る。

$$T_{,1} + \bar{\kappa}_2 M_3 - \bar{\kappa}_3 M_2 = 0 \quad (59.a)$$

$$M_{3,1} - \bar{\kappa}_2 T + \bar{\kappa}_1 M_2 + q_2 = 0 \quad (59.b)$$

$$M_{2,1} + \bar{\kappa}_3 T - \bar{\kappa}_1 M_3 - q_3 = 0 \quad (59.c)$$

ここに，式(59)はそれぞれ $\bar{e}_i$ 軸回りのつり合いを示している。式(58.a),(59.b,c) より，力のつり合い方程式として

$$N\,\bar{e}_1 - (M_{3,1} + \bar{\kappa}_1 M_2 - \bar{\kappa}_2 T)\,\bar{\mathbf{e}}_2 + (M_{2,1} - \bar{\kappa}_1 M_3 + \bar{\kappa}_3 T)\,\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbb{0} \quad (60)$$

が得られる。式 (48) において外力項を零とおくと，これらの平衡方程式は式 (59.a)，(60) の平衡方程式と一致する。このことは仮想仕事の原理より得られる平衡方程式と，つり合い法により得られる平衡方程式が，微小ひずみの仮定の下で一致することを示している。

次に，有限回転ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を用いて変位関数を導き，これが文献（5）において用いられている回転行列による結果と一致することを示す。式（7）より $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{\theta}$ との関係が

$$\boldsymbol{\omega}/\omega = (1+\cos\omega)\,\boldsymbol{\theta}/(2\sin\omega) \quad (61)$$

と求まる。ここで，文献（5）と同様に $\boldsymbol{\omega}$ を次のように成分表示する。

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^i\,\mathbf{e}_i \quad (62)$$

式（10），(61) より，θ と ω との間には

$$\theta^i = 2\,\omega^i\sin\omega/\{\omega(1+\cos\omega)\} \quad (63)$$

が成り立つ。式 (63) を式 (15) に代入し，式 (12) の関係式を用いると，ω^i で表わされた変位関数 U^i を以下のように得る。

$$U^1 = u^1 + \xi^2 \{\omega^1\omega^2(1-\cos\omega)/(\omega)^2 - \omega^3/\omega \sin\omega\}$$
$$+ \xi^3 \{\omega^1\omega^3(1-\cos\omega)/(\omega)^2 + \omega^2/\omega \sin\omega\}$$
$$U^2 = u^2 + \xi^2 (1-\cos\omega)\{(\omega^2)^2/(\omega)^2 - 1\} + \xi^3\{\omega^3\omega^2(1-\cos\omega)/(\omega)^2 - \omega^1/\omega \sin\omega\}$$
$$U^3 = u^3 + \xi^2 \{\omega^2\omega^3(1-\cos\omega)/(\omega)^2 + \omega^1/\omega \sin\omega\} + \xi^3(1-\cos\omega)\{(\omega^3)^2/(\omega)^2 - 1\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (64.a\text{-}c)$$

式 (64) は文献 (5) の変位関数と一致する。

文献(10),(11) では$\boldsymbol{\omega}$ベクトルを用い，一方，文献(18)においては回転行列を用いて有限回転を評価しているが，いづれの研究においても棒部材の回転を，部材軸回りの回転と，主軸回りの回転とに分け，それぞれを重ね合わせることにより変位関数を誘導している。しかしながら，本研究ではそのような重ね合わせをすることなく，新しい手法により棒部材の変位関数を求めている点に特徴がある。

8．おわりに

本報告では，有限回転ベクトルを用いることにより，従来あまり厳密に扱われていなかった棒部材の回転成分の連成に注目して，有限変位理論を展開した。これまでも棒部材の変位パラメーターのとり方については議論されているが，本報告では従来の棒理論に近い形で議論を進めてきた。すなわち，部材軸の変位成分の他に，横断面の回転に相当する回転成分を４番目のパラメーターにとり，有限変位問題を扱った。以後，Bernoulli-Euler の仮定それ自体を検討する必要があると思われるが，ここでは先の仮定のみを用いて，厳密な変位関数および変位後のねじれ率と曲率を計算している。このこと自体は工学的にそれ程重要な意味を持たないかもしれないが，ここで用いられた有限回転ベクトル$\boldsymbol{\theta}$および新たに導入された回転パラメーターの有効性が認められるものと思われる。

謝辞：本研究は文部省科学研究費の補助を受けて行なわれた。ここに記して感謝する。

参 考 文 献

1) 西野文雄・深沢泰晴：ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化，土木学会論文報告集， No. 247 ，pp.9-19 ，1973.3

2) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225 ，pp.1-15 ，1974.5.

3) 渡辺昇・稼農知徳・薄木征三：薄肉曲線桁の変位場に基づく有限ねじれ変形解析，土木学会論文報告集 No. 317 ，pp.31-45，1982.1

4) Usami,T. and S.Y.Koh : Large Displacement Theory of Thin-Walled Curved Members and its Application to Lateral-Torsional Buckling Analysis of Circular Arches, Int. J. Solids and Structures, Vol.16, pp.71-95, 1980.

5) 前田幸雄・林　正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No.253，pp.13-27，1976.9

6) 倉方慶夫・西野文雄：充実曲線棒材の有限変位場と応力場，土木学会論文報告集，No，317 ，pp.15-30，1982.1.

7) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No，237，pp.11-26，1975.5.

8) Besseling,J.F.: Non-Linear Theory for Elastic Beams and its Finite Element Representation , Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 31 (1982) 205-220.

9) Rosen,A.and P.Friedmann:The Nonlinear Behavior of Elastic Slender Straight Beams Undergoing Small Strains and Moderate Rotations, ASME J. of Appl. Mech., Vol.46, pp.161-168, 1979.3.

10) Schroeder,F.H.: Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Träger mit grossen Verformungen, Ingenieur-Archiv, 39. Band, S.87-103, 1970.

11) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 292，pp.13-27，1979. 12.

12) 事口寿男・久保元生・中井　博：薄肉曲線ばりの幾何学的非線形挙動と横倒れ座屈解析への応用，第２４回構造工学シンポジウム，構造の非線形問題，pp.69-76，1978.2.

13) 島田静雄：弾性針金の変形と応用，土木学会論文報告集，No. 72，別冊3-1，pp1-16，1961.7.

14) Panayotounakos,D.E.and P.S.Theocaris:Large Elastic Deformation in Thin Rods,Ingenieur-Archiv 51.Band, S.139-149, 1981.

15) 倉方慶夫：薄肉開断面をもつ曲線部材の有限変位理論，東京大学工学系研究科博士論文，1976.3.

16) 阿井正博・西野文雄：薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化，土木学会論文報告集 No. 318，pp.7-20，1982.2.

17) 後藤芳顕・松浦聖・長谷川彰夫：充実断面空間棒材の有限変位理論の一定式化，構造工学論文集，Vol. A，pp. 183-196，1985.3.

18) 林正・前田幸雄：薄肉断面部材の有限変位場，土木学会第40回年次学術講演会概要集，第１部，PP.113-114，1985.9.

19) Stein. E.: Incremental Methods in Finite Elastisity, especialy for rods. Proc. of the IUTAM Symp. on Finite Elastisicty, Bethlehem(USA) 1980, pp.379-400.

20) Simmonds,J.G.and D.A.Danielson:Nonlinear Shell Theory with Finite Rotation and Stress-Function Vectors, ASME J. of Appl. Mech., Vol.39, pp.1085-1090, 1972.12.

21) Pietraszkiewicz,W.:Finite Rotations and Lagrangian Description in the Non-linear Theory of Shells, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1979.

22) Iura,M. and M.Hirashima: Lagrangian Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells with Finite Rotations. Proc. of JSCE, No.344/I-1, Structural Eng./Earthquake Eng., pp.153-163, 1984.4.

23) Pietraszkiewicz,W.and J.Badur:Fiuite Rotations in the Description of Continuum Deformation, Int. J. Engng. Sci., Vol.21, No. 9, pp.1097-1115, 1983.

24) Washizu,K.:Variational Methods in Elasticity and Plasticity,Pergamon Press,3rd.edition,1982.

（1985年 10 月 18 日　受付）