

充実曲線材の有限変位理論

FINITE DISPLACEMENT THEORY OF SOLID CURVED BEAMS

前 田 幸 雄^{*}・林 正^{**}
By Yukio MAEDA and Masa HAYASHI

In the three-dimensional analysis of beams, the both rotations due to bending and torsional deformations are coupled, and that finite rotations do not satisfy a commutative law. Therefore, it is considerably difficult to formulate the finite displacement field of space beams without any restriction on the magnitude of rotations. In this paper, a formulation of an exact finite displacement field of solid curved beams is developed by the use of a rotation matrix. At the first step of this study, a torsion and curvatures of curved thin rods after deformation are easily derived in the simple and explicit forms with the aid of the rotation matrix. At the second step, the displacement functions and Green's strain tensors of solid curved beams are obtained in closed forms, and they are expanded in series with respect to such four independent parameters as three translational components and a torsional angle of the beam axis.

1. 緒 言

棒材の有限変位理論を仮想仕事の原理を用いて定式化する場合には、変位と幾何学的変形量の関係を表わす変位場が解析の基礎となる最も重要なものである。このために、有限変位場に関する研究は数多く行われており^{1)~6)}、高精度の解が得られている。後藤・松浦・長谷川¹⁾は充実直線材を、倉方・西野²⁾、井浦・平嶋³⁾は充実曲線材を扱っており、平嶋・井浦・依田⁴⁾、阿井・西野⁵⁾、薄木・稼農⁶⁾は薄肉曲線材の有限変位場を求めている。

定式化の方法は各研究者によって異なるが、解析を進める上で大きな問題となるのは有限回転の扱い方であり、回転の大きさに制限のない有限変位場を求めることはかなり困難なことである。有限回転の扱い方には回転ベクトルを用いる方法³⁾、オイラー角を用いる方法⁷⁾、回転行列を用いる方法⁸⁾、その他幾何学的考察を用いた方法がある。棒材の解析では、通常、独立な変分量として並進変位の3成分と断面の回転を表わす回転成分を用いることが多いが、有限回転の扱い方の違いによって回転成分の定義は研究者によって異なっている。一部材の有限変位場の定式化にはどのような独立成分を用いても理論展開が容易であれば本質的な問題は起きないが、この有限変位を用いて骨組構造物の立体解析を行う際には力学的に明確な成分でないと隣接部材との適合条件を完全に満足させることが困難になる。

また、立体解析では断面の主軸回りの回転角が必要であり、これらの角は前述の4つの独立変分量によって表わされなければならない。しかし、有限回転場では主軸回りの回転角を求めることは意外に難しく、こ

* 工博 近畿大学教授 理工学部土木工学科 (〒577 東大阪市小若江3-4-1)

** 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系 (〒949-54 長岡市上富岡町1603-1)

の回転角について議論した論文も少なくて厳密な式は見受けられない。井浦ら³⁾は簡潔な式で表わされた厳密な有限変位場を求めているが、座標軸回りの回転角を求めるときには微小回転の手法を用いている。すなわち、解析の基礎式として用いた基底ベクトルは基底行列と等価な式であるが、回転ベクトルの成分を各座標軸回りの回転角としたことは微小回転として扱ったことになり、この結果、部材軸回りのねじれ角と断面の回転に関する独立変分量との関係が正確に評価されていない。周知のように、有限回転を通常のベクトルと同じ手法で取り扱うことができないためである。

本報告では、先に発表した回転行列⁸⁾を用いて、初期曲率と初期ねじれ率のある充実曲線材の厳密な有限変位場を求める。回転行列を用いた手法では積分演算を必要としないので、従来から用いられている非線形の微分方程式を解く方法に比べて定式化が容易であり、力学的意味が明確で理解し易い長所がある。しかし、有限回転は可換ではないので、回転を合成する際には合成順序を考慮して定式化を行わなければならない。また、先に述べたように、座標軸などに関する成分を求めるためにはベクトル演算による加法や分解を用いることができない。

そこで、回転の成分や回転行列の積に関する一般的な式を導き、これを用いて部材の有限回転による性状を調べる。まず、部材は曲げとねじりによって回転するが、これらの2つの回転の順序を変えても回転に関する独立変分量を変形前の部材軸回りの回転角（ねじれ角）に選べば同じ結果が得られることを示す。また、2つの回転の中心点は、それぞれ断面内の任意の点に選ぶことができる。曲げとねじりによる回転を合成して有限変位場を求める方法は文献4)でも用いられているが、回転順序と2回目の回転を行うときの独立変分量についての考察はなく、また合成された回転行列は本文で求めた回転行列の転置行列になっていることから、力学的意味が不明である。次に、座標軸回りの回転角は位置ベクトルの回転から求め、独立変分量との厳密な関係式を導く。

有限変位場の定式化では、並進変位と上述のねじれ角の4成分を独立変分量として空間曲線材の曲率、ねじれ率などの変形量を求め、この曲線材を部材軸として断面の広がり性を考慮した充実曲線材の変位とひずみを求める。断面内の変位は、断面剛の仮定によって、回転行列と位置ベクトルの単純な積で簡単に求めることができる。

本報告では、線形代数と剛体力学の定理を用いて回転の大きさに制限のない有限変位場を求めるものである。

2. 有限回転の性質

有限変位場の定式化において現われる回転行列について一般的な関係式を導く。

(1) 回転行列と記号

回転の中心軸を単位ベクトル $\boldsymbol{\varphi}$ で表わし、回転角を α とする。 α の符号は右ねじの法則に従う。1つの回転 $\mathbf{R}$ は $\boldsymbol{\varphi}$ と α によって表わされるので、これを $\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}, \alpha)$ と書くことにする。文献8)の式を再記すれば、

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}, \alpha) = \mathbf{E} \cos \alpha + \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} (1 - \cos \alpha) + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} \sin \alpha \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \phi_i \mathbf{i} + \phi_j \mathbf{j} + \phi_k \mathbf{k} \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{E}$ は3次の単位行列、 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ は右手直交単位系である。本文では、2つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ はスカラー、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトル、 $\mathbf{a} \mathbf{b}$ はディヤード (dyad) を表わすものとする。

行列 $\mathbf{R}$ の要素 r_{ij} は、クロネッカーの δ とエディントンの ϵ を用いて次のように書くことができる⁸⁾。

$$r_{ij} = \delta_{ij} \cos \alpha + \phi_i \phi_j (1 - \cos \alpha) - \epsilon_{ijk} \phi_k \sin \alpha \quad (3)$$

r_{ij} の値が既知のときには、 α と ϕ_i は次式から求められる。

$$i r_{ii} (\mathbf{R}) = r_{ii} + r_{jj} + r_{kk} = 1 + 2 \cos \alpha, \quad r_{kj} - r_{jk} = 2 \phi_i \sin \alpha \quad (4.a, b)$$

i, j, k についての第2式の2乗和から $\sin \alpha$ が求められる。特に、 $\alpha = \pi$ の場合には $r_{ii} \equiv -1$ の対角要

素を用いて

$$\phi_i = \sqrt{(1 + r_{ii})/2}, \quad \phi_j = r_{ij}/2\phi_i, \quad \phi_k = r_{ik}/2\phi_i \quad (5)$$

α と φ の符号について次式が成り立ち、これらは逆回転を表わして R の転置 R^T に等しい。

$$R(-\varphi, \alpha) = R(\varphi, -\alpha) = [R(\varphi, \alpha)]^{-1} = [R(\varphi, \alpha)]^T \quad (6)$$

(2) i 軸回りの回転角

回転 R による i 軸回りの回転角 θ_i を求める。このために i に直交する単位の位置ベクトル a を考える。 a が φ 軸回りに $\alpha/2$ だけ回転したときのベクトル $\hat{a}$ が φ と i で定められる平面内にあるように a を定めれば、全回転 α によるベクトル a^* は $\varphi - i$ 平面に関して a と対称な位置にくることから、 a^* は i と直交する (図-1 参照)。これから次の式が得られる。

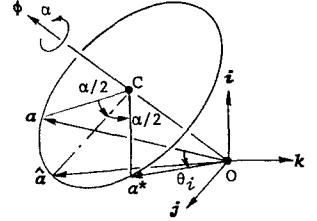


図-1 位置ベクトルの回転

$$a \cdot i = 0, \quad a^* \cdot i = 0 \quad (7.a, b)$$

$$a = 0 \cdot i + a_j j + a_k k, \quad a_j^2 + a_k^2 = 1 \quad (8.a, b)$$

回転前後の2つのベクトルを用いると、角 θ_i は次式から求められる。

$$a \times a^* = i \sin \theta_i \quad (9)$$

式(1), (2), (7), (8)を用いると次式が得られる。

$$a^* = R a = a \cos \alpha + \varphi (\varphi \cdot a) (1 - \cos \alpha) + \varphi \times a \sin \alpha \quad (10)$$

$$a^* \cdot i = \phi_i (\phi_j a_j + \phi_k a_k) (1 - \cos \alpha) + (\phi_j a_k - \phi_k a_j) \sin \alpha = 0 \quad (11)$$

$$a \times a^* = a \times \varphi (\varphi \cdot a) (1 - \cos \alpha) + \{ (a \cdot a) \varphi - (a \cdot \varphi) a \} \sin \alpha \\ = \{ (\phi_k a_j - \phi_j a_k) (\phi_j a_j + \phi_k a_k) (1 - \cos \alpha) + \phi_i \sin \alpha \} i \quad (12)$$

式(12)の i の成分に式(11)を用いると、式(9)より次式が求められる。

$$\phi_i \sin \theta_i = \{ (\phi_k a_j - \phi_j a_k)^2 + \phi_i^2 \} \sin \alpha \quad (13)$$

ϕ_j と ϕ_k は式(8.b)と式(11)の連立解として求められるから、これを式(13)に代入すると*)

$$\sin \theta_i = \frac{2 \phi_i \tan (\alpha/2)}{1 + \phi_i^2 \tan^2 (\alpha/2)} \quad \therefore \tan \frac{\theta_i}{2} = \phi_i \tan \frac{\alpha}{2} \quad (14)$$

式(14)より、各軸回りの回転角と α の間にはベクトルの合成則が成立せず、次式の関係が得られる。

$$\sum_{i=1}^3 \tan^2 (\theta_i/2) = \tan^2 (\alpha/2) \quad (15)$$

(3) 回転の合成

回転軸が互いに直交する2つの回転を合成した回転について調べてみる。ここでは一方の回転の軸を i とし、他方の回転軸を i と直交する適当な単位ベクトル ψ に選ぶ。これらの回転を R_β , R_γ で表わし、その回転角を β , γ とする。また、回転順序を考慮して次の2つの合成回転 R_α , $\hat{R}_\alpha$ を考える。

$$R_\alpha = R_\beta R_\gamma, \quad \hat{R}_\alpha = R_\gamma R_\beta \quad (16.a, b)$$

ここに、

$$R_\alpha = R(\varphi, \alpha), \quad \hat{R}_\alpha = R(\hat{\varphi}, \hat{\alpha}), \quad R_\beta = (\psi, \beta), \quad R_\gamma = (i, \gamma) \quad (17.a \sim d)$$

ψ が i に直交することから

$$\psi \cdot i = 0, \quad \psi = 0 \cdot i + \psi_j j + \psi_k k, \quad \psi_j^2 + \psi_k^2 = 1 \quad (18.a \sim c)$$

これを式(3)に用いると、 R_β の要素 p_{ij} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{ii} &= \cos \beta, \quad p_{jj} + p_{kk} = 1 + \cos \beta, \quad -p_{ij} = p_{ji} = \psi_k \sin \beta, \\ p_{jk} &= p_{kj} = \psi_j \psi_k (1 - \cos \beta), \quad -p_{ki} = p_{ik} = \psi_j \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (19.a \sim e)$$

まず、 R_α を求める。 R_β をディヤードを用いて展開し、次のベクトル a , b , c , d とディヤードとの公式

$$a \times E = E \times a, \quad (a b)(c d) = (b \cdot c) a d, \quad a b (E \times c) = a b \times c \quad (20.a \sim c)$$

*) 図-1において点Cを点Oに一致させ、 a を動径にとると、式(14)は $\alpha = \pi$ の場合でも成り立つ。

を用いると、 $\mathbf{n}$ を基底ベクトルとして次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha &= \left[\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_{ij} \mathbf{i} \mathbf{j} \right] \left[\mathbf{E} \cos \gamma + \mathbf{i} \mathbf{i} (1 - \cos \gamma) + \mathbf{i} \times \mathbf{E} \sin \gamma \right] \\ &= \cos \gamma \sum_i \sum_j p_{ij} \mathbf{i} \mathbf{j} + (1 - \cos \gamma) \sum_n p_{ni} \mathbf{n} \mathbf{i} + \sin \gamma \sum_n (p_{nk} \mathbf{n} \mathbf{j} - p_{nj} \mathbf{n} \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

式(1.9)，(2.1)を用いると、

$$\left. \begin{aligned} tr[\mathbf{R}_\alpha] &= p_{ii} + (p_{jj} + p_{kk}) \cos \gamma + (p_{jk} - p_{kj}) \sin \gamma = \cos \beta + (1 + \cos \beta) \cos \gamma \\ r_{kj} - r_{jk} &= (p_{kj} - p_{jk}) \cos \gamma + (p_{kk} + p_{jj}) \sin \gamma = (1 + \cos \beta) \sin \gamma \end{aligned} \right\}$$

これを式(4)に代入して変形し、さらに得られた ϕ_i を式(1.4)に代入すると次式が求められる。

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \phi_i = \frac{\tan(\gamma/2)}{\tan(\alpha/2)}, \quad \theta_i = \gamma \quad (2.2.a \sim c)$$

この結果から、合成された回転 $\mathbf{R}_\alpha$ の $\mathbf{i}$ 軸回りの回転角 θ_i は合成前の $\mathbf{R}_\gamma$ の回転角に等しいことがわかる。また、 $\psi_i = 0$ であることから、 $\mathbf{R}_\beta$ の $\mathbf{i}$ 軸回りの回転角は零である。

同様にして ϕ_j と ϕ_k を求めると、次のようになる。

$$\phi_j = \frac{\tan(\beta/2)}{\tan(\alpha/2)} (\psi_j + \psi_k \tan \frac{\gamma}{2}), \quad \phi_k = \frac{\tan(\beta/2)}{\tan(\alpha/2)} (\psi_k - \psi_j \tan \frac{\gamma}{2}) \quad (2.3.a, b)$$

次に、式(1.6.b)の $\hat{\mathbf{R}}_\alpha$ について計算すると式(2.2)と同じ結果が得られる。したがって、

$$\alpha = \hat{\alpha}, \quad \phi_i = \hat{\phi}_i, \quad \theta_i = \hat{\theta}_i = \gamma \quad (2.4.a \sim c)$$

以上より、式(1.6)のような回転の合成において式(1.8.a)が成立する場合には、回転の順序を変えても $\mathbf{i}$ 軸回りの回転角は合成前の値に等しいことがわかる。なお、 $\hat{\phi}_j$ と $\hat{\phi}_k$ は式(2.3)の $\tan(\gamma/2)$ の項の符号を変えた式で与えられるので $\mathbf{R}_\alpha \neq \hat{\mathbf{R}}_\alpha$ であり、合成は可換ではない。

(4) 回転行列の変換

回転軸 $\boldsymbol{\varphi}$ が他の回転 $\mathbf{R}_\beta$ によって $\boldsymbol{\varphi}^*$ になったときの次の回転 $\mathbf{R}_\alpha^*$ を考える。

$$\mathbf{R}_\alpha^* = \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}^*, \alpha), \quad \boldsymbol{\varphi}^* = \mathbf{R}_\beta \boldsymbol{\varphi} \quad (2.5.a, b)$$

$\mathbf{R}_\beta$ による回転後の直交単位系 $(\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*)$ を用いると以下の式が導かれる。

$$\boldsymbol{\varphi}^* = \phi_i \mathbf{i}^* + \phi_j \mathbf{j}^* + \phi_k \mathbf{k}^*, \quad \mathbf{E} = \mathbf{i}^* \mathbf{i}^* + \mathbf{j}^* \mathbf{j}^* + \mathbf{k}^* \mathbf{k}^*, \quad \mathbf{i}^* = \mathbf{R}_\beta \mathbf{i}, \text{ etc. } (2.6.a \sim c)$$

$$\boldsymbol{\varphi}^* \times \mathbf{E} = \phi_i (\mathbf{k}^* \mathbf{j}^* - \mathbf{j}^* \mathbf{k}^*) + \phi_j (\mathbf{i}^* \mathbf{k}^* - \mathbf{k}^* \mathbf{i}^*) + \phi_k (\mathbf{j}^* \mathbf{i}^* - \mathbf{i}^* \mathbf{j}^*)$$

ここで式(2.6.c)を用いると上式の第1項は

$$\phi_i (\mathbf{k}^* \mathbf{j}^* - \mathbf{j}^* \mathbf{k}^*) = \phi_i (\mathbf{R}_\beta \mathbf{k} \mathbf{j} \mathbf{R}_\beta^T - \mathbf{R}_\beta \mathbf{j} \mathbf{k} \mathbf{R}_\beta^T) = \mathbf{R}_\beta [\phi_i (\mathbf{k} \mathbf{j} - \mathbf{j} \mathbf{k})] \mathbf{R}_\beta^T$$

となるから

$$\boldsymbol{\varphi}^* \times \mathbf{E} = \mathbf{R}_\beta [\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}] \mathbf{R}_\beta^T \quad (2.7)$$

式(2.6)，(2.7)を式(2.5)に用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\alpha^* &= \mathbf{E} \cos \alpha + \boldsymbol{\varphi}^* \boldsymbol{\varphi}^* (1 - \cos \alpha) + \boldsymbol{\varphi}^* \times \mathbf{E} \sin \alpha = \mathbf{R}_\beta [\mathbf{E} \cos \alpha + \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi} (1 - \cos \alpha) + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E} \sin \alpha] \mathbf{R}_\beta^T \\ \therefore \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}^*, \alpha) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}, \beta) \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}, \alpha) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\psi}, \beta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

上式は $\mathbf{R}_\beta$ の $\boldsymbol{\psi}$ と β の値の如何に係らず成り立つ。これは構造解析で用いる直交変換と同じ式である。また、特別の場合として $\phi_i = 0$ のときには、平面の回転行列を用いて表わすことができる。

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}, \alpha) = \mathbf{R}(\mathbf{i}, \beta) \mathbf{R}(\mathbf{j}, \alpha) \mathbf{R}^T(\mathbf{i}, \beta) \quad (2.9)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{R}(\mathbf{i}, \beta) \mathbf{j}, \quad \phi_i = 0, \quad \phi_j = \cos \beta, \quad \phi_k = \sin \beta \quad (3.0)$$

式の誘導は長くなるので省略するが、証明は簡単で右辺を展開すれば式(3)で $\phi_i = 0$ とした式が得られる。

次に、2つの回転を合成するときに、最初の回転によって次の回転が影響される場合の合成結果を調べる。

$$\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\gamma^* \mathbf{R}_\beta; \quad \mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}(\boldsymbol{\varphi}, \alpha), \quad \mathbf{R}_\beta = \mathbf{R}(\boldsymbol{\psi}, \beta), \quad \mathbf{R}_\gamma^* = \mathbf{R}(\mathbf{i}^*, \gamma^*) \quad (3.1.a \sim d)$$

ここで、もとの行列 R_r について次の関係がある場合を考える。

$$R_r = (i, r); \quad i^* = R_\beta i, \quad \psi \cdot i = 0 \quad (3.2.a \sim c)$$

さて、 i は ψ 軸回りに回転するから、式 (3.2.c) によって i^* も ψ と直交する。したがって、式 (2.4.c) により $r^* = r$ となる。そこで、式 (2.8) により R^* を変換したものを式 (3.1.a) に代入すると、

$$R^* = R(i^*, r) = R_\beta R_r R_\beta^T, \quad \therefore R_\alpha = R_\beta R_r \quad (3.3.a, b)$$

これより、式 (3.1.a) の R_α は式 (1.6.a) の R_α に等しいことが分る。

3. 棒材の解析仮定と座標系

断面の広がり方を考慮しない空間曲線材の解析においては、何らの仮定も用いずに厳密なねじれ率と曲率を求めることができる。充実曲線材の解析では、変形後も断面形状は不変とする「断面剛の仮定」のみを用いる。この仮定は断面を剛体と仮定するものであって、有限回転場では必然的に断面のそり変形を許容しない。また、平面保持の仮定を自動的に包含するものである。

解析では、右手系直交座標 (x, y, z) を基準座標に用い、空間曲線材では x 軸を曲線材に一致させる。充実曲線材では、図心軸に平行で任意に定めた断面内の点 O を通る曲線を部材軸に選んでこれを解析上の基準軸とする。そして部材軸を x 軸とし、 y, z 軸は断面主軸に平行に選んで法平面上にあるように定める。

線材または棒材の変形を規定する独立な変位成分には、 x, y, z 軸方向の並進変位 u, v, w と x 軸まわりの回転角 ϕ を用いる。そして、 x 軸上の点 $O(x, 0, 0)$ の変位には下添字 0 を付け、断面内の任意の点 $P(x, y, z)$ には添字 p を付けて表わす。なお、回転角 ϕ は断面内で一定であるので添字を付けない。また、有限変位の記述にはラグランジュ表示を用い、変形後の値には右肩に $*$ を付けて示す。

4. 空間曲線材

(1) 初期曲率・ねじれ率

空間曲線の接線・主法線・陪法線の単位ベクトルを t, n, b とする。曲線上の点 O における x 軸の接線を t とするとき、図-2 のように法線 n と y 軸のなす角を ψ とする。

曲線の曲率とねじれ率を κ_0, τ_0 とすれば、フルネ・セレの公式は次式で与えられる。

$$t' = \kappa_0 n, \quad n' = -\kappa_0 t + \tau_0 b, \quad b' = -\tau_0 n \quad (3.4)$$

ここに、プライムは x に関する微分を表わす。

正規直交系 (e_1, e_2, e_3) を考えて、曲線の接線方向の基底ベクトルを e_1 、 y, z 軸方向の基底ベクトルを e_2, e_3 とすると、これらの単位系には次式の関係がある。

$$t = e_1, \quad n = e_2 \cos \psi - e_3 \sin \psi, \quad b = e_2 \sin \psi + e_3 \cos \psi \quad (3.5)$$

式 (3.5) を式 (3.4) に代入し、ベクトル積を用いて整理すると次式が得られる。

$$e_i = \kappa \times e_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

ここに、 κ は曲率ベクトル

$$\kappa = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \kappa_3 e_3 \quad (3.7)$$

であって、 κ_1 は x 軸まわりの曲線の初期ねじれ率、 κ_2, κ_3 はそれぞれ $z-x$ 平面と $x-y$ 平面内の初期曲率である。

$$\kappa_1 = \tau_0 + \psi', \quad \kappa_2 = \kappa_0 \sin \psi, \quad \kappa_3 = \kappa_0 \cos \psi \quad (3.8)$$

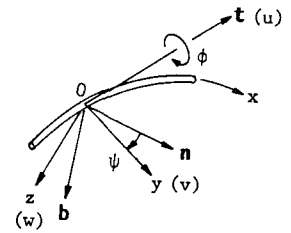


図-2 空間曲線材

(2) 変形後の基底ベクトル

曲線上の点Oは変位 u_0 によって O^* に移動したものとす。また、Oに固定された単位系 e_1, e_2, e_3 は変位後、右手直交単位系 e_1^*, e_2^*, e_3^* になったものとする。

点Oの位置ベクトルを r_0 とすると、 O^* の位置ベクトル r_0^* は図-3より次のようになる。

$$r_0^* = r_0 + u_0 \quad (3.9)$$

ここに、

$$u_0 = u_0 e_1 + v_0 e_2 + w_0 e_3 \quad (4.0)$$

変位後の単位接線ベクトル e_1^* は、式(3.9)に式(4.0)を用いて式(3.6)を考慮すると、

$$e_1^* = t^* / \|t^*\| = l^* e_1 + m^* e_2 + n^* e_3 \quad (4.1)$$

ここに、 $\| \cdot \|$ はユークリッド・ノルムを表わし、 e_1^* の方向余弦 l^*, m^*, n^* は次式で与えられる。

$$l^* = (1 + t_1^*) / \sqrt{g_0^*}, \quad m^* = t_2^* / \sqrt{g_0^*}, \quad n^* = t_3^* / \sqrt{g_0^*} \quad (4.2)$$

$$g_0^* = (1 + t_1^*)^2 + (t_2^*)^2 + (t_3^*)^2 \quad (4.3)$$

$$t_1^* = u_0 - \kappa_3 v_0 + \kappa_2 w_0, \quad t_2^* = v_0 - \kappa_1 w_0 + \kappa_3 u_0, \quad t_3^* = w_0 - \kappa_2 u_0 + \kappa_1 v_0 \quad (4.4)$$

e_2^* と e_3^* は、曲線のねじれ角 ϕ と e_1^* を用いて求められる。まず、図-3において点 O^* が点Oに重なるように変位後の曲線を平行移動すると、変位前後の単位系は図-4に示すように一つの単位球面上に乗る。このときの e_1 と e_1^* のなす角を β とする。

次に、 e_1 と e_1^* に直交する軸を回転軸として、直交単位系 (e_1^*, e_2^*, e_3^*) を左ねじの向きに回転させて e_1^* を e_1 に一致させる。この回転を R_β^1 で表わすことにする。回転後、 e_2^*, e_3^* はそれぞれ $\hat{e}_2, \hat{e}_3$ になったものとすれば、これらのベクトルは変形前の法平面上にある。このとき、 e_i と $\hat{e}_i$ ($i = 2, 3$) のなす角は ϕ になるので、 e_1 を回転軸として $\hat{e}_i$ を左ねじの方向に ϕ だけ回転すると変形前の e_i に一致する。この回転を R_ϕ^1 で表わす。

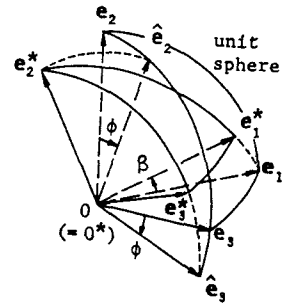


図-4 座標系の回転

これらの2つの回転の順序を変えて、かつ、右ねじの方向に逆回転すると次式が得られる。

$$e_i^* = R_\beta R_\phi e_i \equiv R_0 e_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad R_0 = R_\beta R_\phi \quad (4.5.a, b)$$

ここに、 R_β, R_ϕ は R_β^1, R_ϕ^1 を逆回転したものであり、 R_0 は2つの回転を合成した回転である*)。

回転行列 R_β は、文献8)で示した式から次式のようになる。

$$R_\beta = (e_1 \cdot e_1^*) E + \frac{(e_1 \times e_1^*)(e_1 \times e_1^*)}{1 + (e_1 \cdot e_1^*)} + (e_1 \times e_1^*) \times E \quad (4.6)$$

したがって、

$$R_\beta = \begin{bmatrix} l^* & -m^* & -n^* \\ m^* & 1 - (m^*)^2 / (1 + l^*) & -m^* n^* / (1 + l^*) \\ n^* & -m^* n^* / (1 + l^*) & 1 - (n^*)^2 / (1 + l^*) \end{bmatrix}, \quad R_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi - \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.7.a, b)$$

式(4.7.a, b)を合成した回転行列 R_0 の要素 r_{ij} は、式(4.2)の方向余弦を用いて次のようになる。

*) 回転の順序を変えて曲げによる回転 R_β を先に行う場合には、ねじりによる回転 R_ϕ は式(4.7.b)と異なるので、後で示すように合成された回転 R_0 は同じになる。

$$R_0 = [r_{ij}] = \begin{Bmatrix} l^* & -(m^* \cos \phi + n^* \sin \phi) & m^* \sin \phi - n^* \cos \phi \\ m^* \cos \phi - \frac{m^*}{1+l^*} (m^* \cos \phi + n^* \sin \phi) - \sin \phi + \frac{m^*}{1+l^*} (m^* \sin \phi - n^* \cos \phi) & \\ n^* \sin \phi - \frac{n^*}{1+l^*} (m^* \cos \phi + n^* \sin \phi) & \cos \phi + \frac{n^*}{1+l^*} (m^* \sin \phi - n^* \cos \phi) \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

(3) 変形後の伸び率・ねじれ率・曲率

曲線の伸び率 ε_0 は次式で与えられる。

$$\varepsilon_0 = \| (r_0^*)' \| - \| r_0' \| = \sqrt{g_0^*} - 1 \quad (4.9)$$

変形後のねじれ率と曲率を求めるために、式 (4.5.a) を次式のように書き換える。

$$e_i^* = r_{1i} e_1 + r_{2i} e_2 + r_{3i} e_3, \quad e_i = r_{i1} e_1^* + r_{i2} e_2^* + r_{i3} e_3^* \quad (5.0.a, b)$$

また、 R_0 の各列をベクトル r_i で表わして次のように置く。

$$R_0 = [r_1, r_2, r_3] \quad (5.1)$$

式 (5.0.a) の両辺を x で微分し、これに式 (3.6), (5.0.b) を代入し、

$$e_i^* = e_j^* \times e_k^*, \quad r_i' \cdot r_i = 0, \quad r_i' \cdot r_j = -r_i \cdot r_j' \quad (5.2)$$

の関係式とベクトル三重積の公式を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} (e_i^*)' &= \sum_{n=1}^3 (r_{ni} e_n' + r_{n'i} e_n) = K \times e_i^* + \sum_{n=1}^3 (r_i' \cdot r_n) e_n^* \\ &= (K \cdot e_i^*) e_j^* - (K \cdot e_j^*) e_k^* + (r_i' \cdot r_j) e_j^* - (r_i \cdot r_k') e_k^* \\ &= (K \cdot e_k^* + r_i' \cdot r_j) e_j^* - (K \cdot e_j^* + r_k' \cdot r_i) e_k^* \quad (i=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここに、添字 i, j, k はこの順序に 1, 2, 3 を循環してとるものとする。

ここで、ベクトル K^*

$$K^* = \kappa_1^* e_1^* + \kappa_2^* e_2^* + \kappa_3^* e_3^*, \quad \kappa_i^* = K \cdot e_i^* + r_j' \cdot r_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.4.a, b)$$

を用いると、式 (5.3) を次式のように変形前の式 (3.6) と同じ形の式に書き換えることができる。

$$(e_i^*)' = K^* \times e_i^* \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.5)$$

式 (5.4.b) の κ_i^* は、式 (5.5) を用いると

$$\kappa_i^* = (e_j^*)' \cdot e_k^* \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.6)$$

で表わされることから、変形後の曲線のねじれ率 κ_1^* と曲率 κ_2^* , κ_3^* であることがわかる。 κ_i^* は初期曲率とねじれ率 κ_i , e_i^* の方向余弦 l^*, m^*, n^* とねじれ角 ϕ を用いて次式のような簡潔な形で求められる。

$$\kappa_1^* = \phi' + \hat{\kappa}_1 + \beta_3^* (m^*)' - \beta_2^* (n^*)', \quad \kappa_2^* = \hat{\kappa}_2 \cos \phi + \hat{\kappa}_3 \sin \phi, \quad \kappa_3^* = -\hat{\kappa}_2 \sin \phi + \hat{\kappa}_3 \cos \phi \quad (5.7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\kappa}_1 &= \kappa_1 l^* + \kappa_2 m^* + \kappa_3 n^*, \quad \beta_2^* = m^* / (1+l^*), \quad \beta_3^* = n^* / (1+l^*) \\ \hat{\kappa}_2 &= \kappa_2 - \beta_2^* (\kappa_1 + \hat{\kappa}_1) - (n^*)' + \beta_3^* (l^*)', \quad \hat{\kappa}_3 = \kappa_3 - \beta_3^* (\kappa_1 + \hat{\kappa}_1) + (m^*)' - \beta_2^* (l^*)' \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

(4) e_i 軸回りの回転角

式 (4.8) の R_0 による e_i 軸回りの回転角 θ_i を求める。まず、式 (4) を用いると、次式の φ 軸回りの回転角 α と φ の方向余弦 ϕ_i が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+l^*}{2}} \cos \frac{\phi}{2}, \quad \phi_1 = \frac{\tan(\phi/2)}{\tan(\alpha/2)}, \quad \phi_2 = \frac{1}{\lambda} (-n^* + m^* \tan \frac{\phi}{2}) \\ \phi_3 &= \frac{1}{\lambda} (m^* + n^* \tan \frac{\phi}{2}), \quad \lambda = (1+l^*) \tan \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5.9.a \sim e)$$

ϕ_i を式 (1.4) に代入すると θ_i が求められる。

$$\theta_1 = \phi, \quad \tan \frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{1+l^*} (-n^* + m^* \tan \frac{\phi}{2}), \quad \tan \frac{\theta_3}{2} = \frac{1}{1+l^*} (m^* + n^* \tan \frac{\phi}{2})$$

(6 0. a ~ c)

後程説明するように、式(47)の R_β と R_φ の回転軸は式(18.a)の直交条件を満たすので、式(22.c)より式(60.a)は直に得られる。

5. 充実曲線材

(1) 位置ベクトル

部材軸 x 上の任意の位置において法平面を考え、これを部材の横断面とする。横断面と x 軸との交点を O とし、同一断面上の任意の点を P として、空間固定点 $\bar{O}$ からの位置ベクトルをそれぞれ r_o 、 r_p とする。

O に対する P の位置ベクトルを $\bar{r}_p$ とすれば、図-5を参照して次式が得られる。

$$r_p = r_o + \bar{r}_p, \quad \bar{r}_p = y e_2 + z e_3 \quad (61.a, b)$$

ここに、単位系 e_1, e_2, e_3 は前節と同じように定義する。

変位後の点 P^* の位置ベクトル r_p^* は、式(39)の r_o^* を用いて次式で与えられる。

$$r_p^* = r_o^* + \bar{r}_p^* \quad (62)$$

ここに、 $\bar{r}_p^*$ は断面不変の仮定により次のようになる。

$$\bar{r}_p^* = y e_2^* + z e_3^* \quad (63)$$

(2) 断面内の変位

断面形状不変の仮定により、部材の横断面は剛体運動する。剛体力学の定理によれば、剛体の運動は剛体上の任意の点の並進運動とその点まわりの回転運動の和で表わされるが、棒材の横断面の運動は並進運動 u_o と、一般的には曲げ変形による図心点まわりの回転 R_β とせん断中心点まわりの回転 R_φ による運動を合成したものである。したがって、剛体力学の定理をそのまま適用することができない。

そこで、並進運動と回転中心の異なる2つの回転によって運動する剛体上の任意の点の変位を求める。一般に、空間ベクトル r が回転 R によって回転した後のベクトル r^* は、 $r^* = R r$ で与えられる⁸⁾。いま、2点 O, P を考えて、 r を点 O に対する点 P の位置ベクトルとすれば、点 O を回転中心とした回転 R による点 P の変位 u_p は、 $r^* = r + u_p$ より次のようになる。

$$u_p = (R - E) r \quad (64)$$

さて、図-6に示すように、剛体内に3点 A, B, P をとり、2点 A, B をそれぞれ回転中心とする回転 R_A と R_B が与えられたときの剛体の変位を求める。まず、回転 R_A によって点 B, P は B', P' に移動し、続いて点 B' まわりの回転 R_B によって点 A, P' は A^*, P^* に移動したものとする。

回転前の点 A と B に対する点 P の位置ベクトルを r_A, r_B とすると、2つの回転による点 A と B の変位 u_A, u_B は式(64)を用いて次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \vec{AA}^* = (R_B - E) B^* A = (R_B - E) R_A (r_B - r_A) \\ u_B &= \vec{BB}^* = (R_A - E) (r_A - r_B) \end{aligned} \right\} \quad (65.a, b)$$

また、点 P の変位 u_p は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} u_p &= \vec{PP'} + \vec{P'P^*} = (R_A - E) r_A + (R_B - E) \overrightarrow{B^*P'} \\ &= (R_A - E) r_A + (R_B - E) R_A r_B \end{aligned} \quad (66)$$

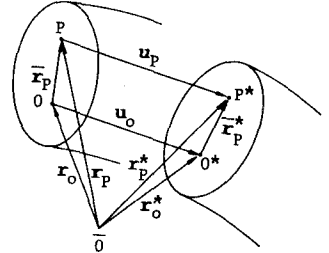


図-5 位置ベクトル

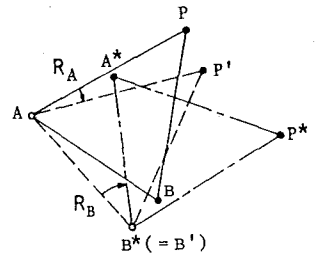


図-6 剛体回転

式(6.6)に式(6.5.a)または(6.5.b)を代入して次の2式が得られる。

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_A + (\mathbf{R}^* - \mathbf{E}) \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{u}_p = \mathbf{u}_B + (\mathbf{R}^* - \mathbf{E}) \mathbf{r}_B \quad (6.7.a, b)$$

ここに、 $\mathbf{R}^*$ は回転 $\mathbf{R}_A$ と $\mathbf{R}_B$ を合成した回転($\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_B \mathbf{R}_A$)である。

式(6.7.a)は、点AがA*まで $\mathbf{u}_A$ だけ並進運動した後にA*を回転中心として $\mathbf{R}^*$ だけ回転した場合の点Pの変位を表わしており、同様に、式(6.7.b)は点Bに着目した場合の点Pの変位を表わす。したがって、回転中心の異なる2つの回転による剛体の運動は回転中心をどの点に選んでもよく、また、合成された回転 $\mathbf{R}^*$ は同じになるが、回転順序を勝手に変えることはできない(7.(1)参照)。

以上の結果から、横断面上の任意の点Pの変位 $\mathbf{u}_p$ は、曲げとねじれが連成する場合でも断面内に任意に定めた点Oの式(4.5.b)の回転行列 $\mathbf{R}_0$ を用いて次式で求めてよいことがわかる。

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{R}_0 - \mathbf{E}) \bar{\mathbf{r}}_p \quad (6.8)$$

$\mathbf{u}_p$ の成分は、式(6.1.b)と式(4.8)の要素 r_{ij} を用いて次式で与えられる。

$$u_p = u_0 + r_{12}y + r_{13}z, \quad v_p = v_0 + (r_{22} - 1)y + r_{23}z, \quad w_p = w_0 + r_{32}y + (r_{33} - 1)z \quad (6.9)$$

(3) ひずみ

ひずみ-変位関係式を求める。点Pのグリーンのひずみテンソルの成分 e_{ij} は次式で定義される⁹⁾。

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_{p,i}^* \cdot \mathbf{r}_{p,j}^* - \mathbf{r}_{p,i} \cdot \mathbf{r}_{p,j}) \quad (7.0)$$

ここに、 i, j は座標 x, y, z を表わし、 $(\quad)_{,i}$ は座標 i による微分である。

式(3.6), (4.9), (5.5)を用いて式(6.1.a), (6.2)の位置ベクトルの微分を行うと

$$\mathbf{r}_{p,x} = (1 - \kappa_3 y + \kappa_2 z) \mathbf{e}_1 - \kappa_1 z \mathbf{e}_2 + \kappa_1 y \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_{p,y} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r}_{p,z} = \mathbf{e}_3 \quad (7.1)$$

$$\mathbf{r}_{p,x}^* = (1 + \varepsilon_0 - \kappa_3^* y + \kappa_2^* z) \mathbf{e}_1^* - \kappa_1^* z \mathbf{e}_2^* + \kappa_1^* y \mathbf{e}_3^*, \quad \mathbf{r}_{p,y}^* = \mathbf{e}_2^*, \quad \mathbf{r}_{p,z}^* = \mathbf{e}_3^* \quad (7.2)$$

これらを式(7.0)に代入すると、ひずみテンソルの各成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \hat{\varepsilon}_0(t_0 + \frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_0) + \bar{\kappa}_1(\kappa_1 + \frac{1}{2} \bar{\kappa}_1)(y^2 + z^2), & 2e_{xy} &= -\bar{\kappa}_1 z \\ 2e_{zx} &= \bar{\kappa}_1 y, & e_{yy} &= e_{zz} = e_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.3.a \sim d)$$

ここに、

$$\hat{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 - \bar{\kappa}_3 y + \bar{\kappa}_2 z, \quad t_0 = 1 - \kappa_3 y + \kappa_2 z, \quad \bar{\kappa}_i = \kappa_i^* - \kappa_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.4)$$

式(7.3.d)は断面形状不変の仮定と数学的に等価な式であり、本研究では剛体力学の定理に回転行列を用いた解析法により式(7.3.d)が自動的に導き出されている。

6. 2次の有限変位場

式(6.9)の変位と式(7.3)のひずみには解析仮定以外には何らの近似を行っておらず、初期曲率・初期ねじれ率のある充実曲線材に対する一般的な式である。しかし、回転量の大きさに制限を設けずに導いた式であるので、これらの式を独立な変分量 u_0, v_0, w_0, ϕ で表わすと極めて複雑な式になり、また、実用的な意味も少ない。そこで、微小ひずみ有限変位理論の観点から、変位とひずみを級数展開して3次以上の非線形項を省略した式を求める。なお、式の表示を簡潔にするために独立変分量と同じ次数の式(4.4)の t_i^* で級数展開する。

(1) 回転行列と曲率・ねじれ率

式(4.8)の $\mathbf{R}_0$ の各要素を以下のように展開することができる。

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= 1 - \frac{1}{2}(t_2^*)^2 - \frac{1}{2}(t_3^*)^2, & r_{12} &= -(1 - t_1^*)t_2^* - \phi t_3^*, & r_{13} &= -(1 - t_1^*)t_3^* + \phi t_2^* \\ r_{21} &= (1 - t_1^*)t_2^*, & r_{22} &= 1 - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}(t_2^*)^2, & r_{23} &= -\phi - \frac{1}{2}t_2^*t_3^* \\ r_{31} &= (1 - t_1^*)t_3^*, & r_{32} &= \phi - \frac{1}{2}t_2^*t_3^*, & r_{33} &= 1 - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}(t_3^*)^2 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

式 (5.7) の κ_i^* は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1^* &= \kappa_1 + \phi' + (1-t_1^*) (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*) - \frac{1}{2} \kappa_1 \{ (t_2^*)^2 + (t_3^*)^2 \} + \frac{1}{2} (t_2^*)' t_3^* - \frac{1}{2} t_2^* (t_3^*)' \\ \kappa_2^* &= \kappa_2 + \phi \{ \kappa_3 - \kappa_1 t_3^* + (t_2^*)' \} - \frac{1}{2} \kappa_2 \phi^2 - t_2^* \{ \kappa_1 (1-t_1^*) + \frac{1}{2} (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*) \} - \{ t_3^* (1-t_1^*) \}' \\ \kappa_3^* &= \kappa_3 - \phi \{ \kappa_2 - \kappa_1 t_2^* - (t_3^*)' \} - \frac{1}{2} \kappa_3 \phi^2 - t_3^* \{ \kappa_1 (1-t_1^*) + \frac{1}{2} (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*) \} + \{ t_2^* (1-t_1^*) \}' \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

(2) 変位とひずみ

式 (6.9) に式 (7.5) を代入して

$$\left. \begin{aligned} u_p &= u_0 - (1-t_1^*) (t_2^* y + t_3^* z) - \phi (t_3^* y - t_2^* z) \\ v_p &= v_0 - \phi z - \frac{1}{2} \phi^2 y - \frac{1}{2} t_2^* (t_2^* y + t_3^* z) \\ w_p &= w_0 + \phi y - \frac{1}{2} \phi^2 z - \frac{1}{2} t_3^* (t_2^* y + t_3^* z) \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

式 (4.9) の伸び率を級数展開すると

$$\epsilon_0 = t_1^* + \frac{1}{2} \{ (t_2^*)^2 + (t_3^*)^2 \} \quad (7.8)$$

となるから、これと式 (7.6) を式 (7.4) に代入したものを式 (7.3) に用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} e_{xx} &= t_0 \left[t_1^* + \frac{1}{2} (t_2^*)^2 + \frac{1}{2} (t_3^*)^2 - \{ t_2^* (1-t_1^*) \}' y - \{ t_3^* (1-t_1^*) \}' z \right] \\ &\quad + t_0 \phi \left[\kappa_2 - \kappa_1 t_2^* - (t_3^*)' + \frac{1}{2} \kappa_3 \phi \right] y + t_0 \phi \left[\kappa_3 - \kappa_1 t_3^* + (t_2^*)' - \frac{1}{2} \kappa_2 \phi \right] z \\ &\quad + t_0 \left[\kappa_1 (1-t_1^*) + \frac{1}{2} (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*) \right] (t_3^* y - t_2^* z) + \kappa_1 [\phi' + (1-t_1^*) (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*)] (y^2 + z^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[t_1^* + \{ \kappa_2 \phi + \kappa_1 t_3^* - (t_2^*)' \} y + \{ \kappa_3 \phi - \kappa_1 t_2^* - (t_3^*)' \} z \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(\phi' + \kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*)^2 - (\kappa_1 t_2^*)^2 - (\kappa_1 t_3^*)^2 + \kappa_1 (t_2^*)' t_3^* - \kappa_1 t_2^* (t_3^*)' \right] (y^2 + z^2) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$2e_{xy} = -[\phi' + (1-t_1^*) (\kappa_2 t_2^* + \kappa_3 t_3^*) - \frac{1}{2} \{ \kappa_1 (t_2^*)^2 + \kappa_1 (t_3^*)^2 - (t_2^*)' t_3^* + t_2^* (t_3^*)' \}] z \quad (8.0)$$

7. 考 察

(1) 曲げとねじりによる回転の順序

式 (4.7.a) の $\mathbf{R}_\beta$ の回転軸 ψ の方向余弦 ψ_i と ψ 軸回りの回転角 β を求めると次のようになる。

$$\cos \beta = l^*, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{-n^*}{\sqrt{1-(l^*)^2}}, \quad \psi_3 = \frac{m^*}{\sqrt{1-(l^*)^2}} \quad (8.1)$$

$\psi_1 = 0$ より、 ψ は $\mathbf{R}_\varphi$ の回転軸 $\mathbf{e}_1$ と直交することがわかる。これらの値と $r = \phi$ を式 (2.2), (2.3) に代入すると式 (5.9) が得られる。

さて、式 (4.5.b) のように、ねじりによる回転 $\mathbf{R}_\varphi$ を先に行ったときには $\mathbf{e}_1$ 軸は移動しないので、変形前の x 軸上の点 O の変位 u_0, v_0, w_0 は変化しない。したがって、曲げによる回転 $\mathbf{R}_\beta$ は式 (4.7.a) となる。また、 $\mathbf{R}_\beta$ による $\mathbf{e}_1$ 軸回りの回転角は零であり、回転を合成した結果のねじれ角は最初のねじれ角に等しいことを式 (2.2.c) で示した。

次に、曲げによる回転を先に行ったときには $\mathbf{e}_1$ は移動して $\mathbf{e}_1^* (= \mathbf{R}_\beta \mathbf{e}_1)$ になるので、ねじりの回転軸は $\mathbf{e}_1^*$ である。ねじれ角 ϕ も一般的には曲げによる回転前の値と異なるが、 $\mathbf{e}_1^*$ が ψ と直交することにより変化しない。これより、曲げによる回転後、ねじりによる回転 $\mathbf{R}_\varphi^*$ を行ったときの合成回転 $\mathbf{R}_\theta^*$ は、式 (3.3)

により次のように式 (4 5. b) の R_0 に一致する。

$$R_0^* = R_\phi^* R_\beta = R(e_1^*, \phi) R(\psi, \beta) = R_\beta R_\phi = R_0 \quad (8 2)$$

R_ϕ^* を求めると、式 (4 1) の e_1^* と ϕ を式 (1) に用いて次式のようになる。

$$R_\phi^* = \begin{bmatrix} (l^*)^2 (1-C) + C & l^* m^* (1-C) - n^* S & l^* n^* (1-C) + m^* S \\ m^* l^* (1-C) + n^* S & (m^*)^2 (1-C) + C & m^* n^* (1-C) - l^* S \\ n^* l^* (1-C) - m^* S & n^* m^* (1-C) + l^* S & (n^*)^2 (1-C) + C \end{bmatrix} \quad (8 3)$$

ここに、 $C = \cos \phi$ 、 $S = \sin \phi$ とおいた。

式 (4 7. a) の R_β を式 (8 3) の右から掛けると式 (4 8) の R_0 が求められる。以上により、4. (2) で用いた手法の妥当性が確かめられた。

平嶋・井浦・依田の研究⁴⁾では式 (8 2) の手法が用いられているが、 R_ϕ^* には式 (8 3) ではなくて式 (4 7. b) の R_ϕ の転置行列が用いられている。 R_ϕ^* に用いたねじれ角は e_1^* 軸回りの角としているが、先述のように e_1 軸回りのねじれ角と同じ値である。また、 R_β は式 (3) の形で与えているが、やはり本文で求めた行列の転置になっている。しかし、断面内の変位の計算では、式 (5 0. a) の e_i^* で r_{ij} の添字を逆にした式を用いているので、得られた変位は本文の式と一致する。したがって、曲げによる回転を先に行ったと説明されているが、用いられた諸式を本文の式と比較すると、ねじりによる回転を先に行っているものと考えられる。

(2) 座標軸回りの回転角と回転ベクトル

式 (1 4) を級数展開して回転角の 3 乗以上の項を省略すると次の近似式が得られる。

$$\theta_i \doteq \alpha \phi_i \quad (8 4)$$

一方、微小回転の場合には単位ベクトル ϕ を用いて回転を次のベクトル $\Delta \phi$ で表わすことができる⁸⁾。

$$\Delta \phi = \alpha \phi, \quad \Delta \phi = \theta_i e_i + \theta_j e_j + \theta_k e_k \quad (8 5)$$

$\Delta \phi$ は通常のベクトルであるので、座標軸回りの回転角はその成分 θ_i で与えられて式 (8 4) に一致する。

式 (8 4) は回転成分に関して 2 次項まで正しい結果を与えるものと考えられる。そこで、式 (7 5) の r_{ij} を式 (4) に用いて α と ϕ_i の近似値を求め、これを式 (8 4) に代入すると次の近似値が得られる。

$$\theta_1 \doteq \phi, \quad \theta_2 \doteq -(1-t_1^*) t_3^* + \frac{1}{2} \phi t_2^*, \quad \theta_3 \doteq (1-t_1^*) t_2^* + \frac{1}{2} \phi t_3^* \quad (8 6)$$

上式より、2 次項までを採用した場合には θ_1 は厳密解に一致している。著者らが先に発表した論文⁹⁾において、変位を求めるときに θ_2 と θ_3 に線形値を用いたために 2 次項まで採用した変位 u の非線形項の係数が $1/2$ 異なる結果が得られた。この係数の違いを倉方・西野²⁾、薄木・穆農⁶⁾ が指適したが、2 次項まで採用した式 (8 6) の回転角を文献 8) の式 (6 4.1 ~ 3) に代入すると式 (7 7) に一致する変位が得られる。

井浦・平嶋³⁾ は回転ベクトルを用いて有限変位場の定式化を行っているが、座標軸回りの回転角を求めるときに微小回転の手法を用いていると思われる。すなわち、有限回転を通常のベクトルとして扱うことができないので、微小回転ベクトルのように回転ベクトルの成分は各座標軸回りの回転角を表わさない。

数式的表現方法が異っていても、数学的に厳密な式であれば有限回転を正しく評価することができるはずである。そこで、本文の式から回転ベクトルを求めてみる。文献 3) に示されているように、成分の選び方によって種々の表現式が考えられるが、ここでは文献 3) と同じく座標軸回りの回転角 θ_i を成分とすると、 θ_i は式 (14) の逆正接関数で与えられる。また、式 (1 4) の右辺を成分とすると、単位ベクトル ϕ を用いて回転ベクトル ϕ を次式のように表わすことができる。

$$\phi = \phi \tan(\alpha/2) = \phi_i e_i + \phi_j e_j + \phi_k e_k, \quad \phi_i = \phi_i \tan(\alpha/2) \quad (8 7. a, b)$$

この回転ベクトルでは、成分 ϕ_i と θ_i との関係は次式のようになる。

$$\phi_i = \tan(\theta_i/2) \quad (8 8)$$

ここで、式(15)と文献3)の式(12)の比較から $\tan(\theta_i/2)$ を $\theta_i/2$ に置き換えると、式(60)の θ_i は文献3)の式と同一の式になる。回転ベクトルは、その大きさが式(87.a)の2倍になっているが、 θ_i を成分とすると係数の2は相殺される。また、変形後の基底ベクトル $\mathbf{e}_i^*$ ($\mathbf{R}_0$ の各列)も完全に一致する。以上より、式(87)は一つの回転ベクトルを表すものと考えられる。

次に、文献3)で与えられた θ_i では、断面の回転に関する独立変分量 ϑ が半回転 π に近づくと θ_i は無限回転することになる。また、 θ_i は回転角であるので単位を有するが、 θ_i は三角関数で与えられているので単位を持たない。これらのことから、 $\theta_i/2$ は最初に述べた微小回転の扱いによって $\tan(\theta_i/2)$ が線形化されてしまったためと考えられる。

回転ベクトルの成分については以上のような疑問点があるが、井浦らは厳密な有限変位場を求めている。これは、解析での基礎式には回転ベクトルではなくて変形後の基底ベクトル $\mathbf{e}_i^*$ の式を用いていることによる。 $\mathbf{e}_i^*$ には θ_i が含まれているが、 θ_i は独立変分量によって消去されるために別な成分の回転ベクトルを用いても正しい結果が得られたと思われる。本文の手法では、変位関数の誘導には θ_i は現われていない。

文献3)では $\mathbf{e}_i^*$ の誘導は示されていないが、回転行列から $\mathbf{e}_i^*$ が導かれることを示す。式(1)より

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{R} \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cos \alpha + \boldsymbol{\varphi} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_i) (1 - \cos \alpha) + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_i \sin \alpha \quad (98)$$

右辺第2項にベクトル三重積の公式を用いると次式のように変形することができる。

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_i) (1 - \cos \alpha) + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_i \sin \alpha \quad (99)$$

これに回転ベクトル $\boldsymbol{\theta} = 2 \boldsymbol{\varphi} \tan(\alpha/2)$ を代入すると文献3)で示された次式が得られる。

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i + \frac{1}{4} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_i) (1 + \cos \alpha) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{e}_i (1 + \cos \alpha) \quad (100)$$

回転ベクトルとして式(87)を用いた場合には、分数の係数がなくなる。

(3) 独立変分量と有限変位場

有限変位場を規定する独立変分量は、多くの研究では並進変位の3成分と断面の回転に関する量が用いられている。しかし、有限回転場では座標軸回りの3つの回転成分が連成して部材が複雑な回転運動を示すために、断面の回転量はそれぞれの研究で工夫された独立量が用いられている。

平嶋・井浦・依田⁴⁾の研究で用いられた回転量は、(1)で説明したように、結果的には本文で用いた断面のねじれ角 ϕ に等しい。また、井浦・平嶋³⁾の研究では、 θ_1 に代る新しい独立変分量 ϑ が採用されている。 θ_1 と ϑ の関係性は与えられているものの、その力学的意味は不明である。しかし、先の考察から $\theta_1/2$ を $\tan(\theta_1/2)$ に置き換えると $\vartheta = \theta_1$ となり、この変分量はねじれ角 ϕ に等しくなる。 θ_1 が消去された変位関数に $\vartheta = \phi$ を代入すると本文の式と完全に一致する。

本文で得られた変位関数を文献4)の式と比較すると、断面のそり変位の項を除けば一致する。ねじれ率と曲率も示された式を変形し、物理成分で与えられていることを考慮すると完全に一致する(文献4)の式(65)の添字にミスがあるが)。なお、本文に示した式は、簡潔に陽な形で与えられていることに注意されたい。文献3)の式では、式(28.a)の右辺第1項の ϑ' の係数が1になることに注意すると、ねじれ率、曲率とも $\vartheta = \phi$ と置けば一致する。

以上より、定式化の手法は異なるが、文献3)、4)で与えられた独立変分量や変位関数などは本文で得られた結果と完全に同一のものであると考えられる。

8. 結 論

本研究で得られた結果について以下のことがいえる。

- (1) 回転行列を用いた線形代数の手法によって、初期曲率・初期ねじれ率のある充実曲線材の完全な有限変位場を陽な形の式で求めることができた。

- (2) 回転行列に関する一般的な式を求め、これを用いて有限回転による連成作用を明らかにした。
- (3) 座標軸回りの回転角と独立変分量との厳密な関係式を初めて示すことができた。
- (4) 有限回転を表わす回転ベクトルの陽な表示式を求めた。

本文では3次元空間における線形代数を使用したので、式の展開が容易で明快である。回転行列には種々の表現式を用いたが、ディヤード演算を用いれば式の計算を簡潔に行うことができる。

応力場については触れなかったが、仮想仕事の原理に変位場を用いれば数学的演算のみで力のつり合い式と力学的境界条件式が得られるものの、解析的に閉じた厳密解を求めることは困難である。本文の式をマトリックス構造解析に応用する場合には2次の有限変位場が有用であり、適当な形状関数を用いて応力場を求めることができる。また、立体解析での座標変換や増分計算における回転増分量の合成には回転行列が必要であり、有限変位解析において有効な手段であることがわかる。

参 考 文 献

- 1) 後藤芳顕・松浦 聖・長谷川彰夫：充実断面空間棒材の有限変位理論の一定式化，構造工学論文集，Vol. 31A，1985.
- 2) 倉方慶夫・西野文雄：充実曲線棒材の有限変位場と応力場，土木学会論文報告集，No 317，1982.
- 3) Iura, M. and M. Hirashima : Geometrically Nonlinear Theory of Naturally Curved and Twisted Rods with Finite Rotations, Proc. of JSCE, Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No. 2, 1985.
- 4) 平嶋政治・井浦雅司・依田照彦：初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論，土木学会論文報告集，No 292，1979.
- 5) 阿井正博・西野文雄：薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化，土木学会論文報告集，No 318，1982.
- 6) 薄木征三・稼農和徳：曲線薄肉ばりの有限変位問題における非線形偏微分方程式の解法，第25回構造工学シンポジウム，1979.
- 7) Bathe, K. J. and S. Bolourchi : Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures, Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., Vol.14, 1979.
- 8) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，No 253，1976.
- 9) Washizu, k. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, 1980.