

平面棒材の有限変位問題における楕円積分解

ELLIPTIC INTEGRAL SOLUTIONS FOR FINITE DISPLACEMENT PLANE BEAM THEORY

後藤芳顯* 山下時治** 松浦聖***

By Yoshiaki GOTO, Tokiharu YAMASHITA and Sei MATSUURA

It is well known that closed form solutions for elastica problems can be expressed by elliptic integrals. However, the problems solved so far are mostly restricted to those of cantilevers in which the member axes are assumed inextensional.

In this paper, general solutions are expressed by three normal forms of elliptic integrals, not only for the inextensional beam theory, but also for the extensional ones, such as finite displacements with finite strains and those with small strains.

1. まえがき

変位の大きさに制限を付けない平面棒材の有限変位理論の支配方程式は、高次非線形の微分方程式となるが、このような高次非線形の微分方程式を直接何らかの方法で解くと、解析過程が複雑で、しかも汎用性をもった解を得ることができない。したがって、実用上は、物理的な考察をもとに、微分方程式を簡略化した、剛体変位除去の手法等により近似的に解かれる場合が多い。しかし、高次非線形の微分方程式の解を得ることは厳密解という意味の他に、上記の実用的な近似解法の精度や妥当性を検証するという実際面でも重要である。

平面棒材に関する高次非線形の微分方程式を直接解いたものとしては、楕円積分、数値積分、テーラー展開、摂動法などによるものが報告されている。数値積分、テーラー展開、摂動法による場合は、軸線の伸長変形を考慮した比較的精度の高い支配方程式をもとに、ある程度一般性をもった解析が行われている。しかし、これらの手法では、いわゆる閉じた解が得られず、座屈点等の特異点近傍で、収束解を得るのはかなり困難な問題となる。楕円積分による方法については、軸方向力のみを受ける柱の変形形状、いわゆるエラスティカの解析に古くから用いられ、閉じた形の解が得られることが知られている。このため、楕円積分による解は、棒に関する高次非線形微分方程式の、最も精度のよい解として、各種近似手法の妥当性の検証に多

* 工博 名古屋工業大学助教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 名古屋工業大学大学院修士課程 土木工学専攻 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

*** 工博 名古屋工業大学教授 工学部社会開発工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

数用いられている。しかしながら、従来の楕円積分による方法では、解析過程が複雑であるためか、最も簡単な軸線の不伸長変形を仮定した棒を解析対象としており、しかも文献5)を除き、多くは特定の荷重条件、支持条件についてしか解の表現が得られていない。すなわち、著者の知る限りでは、軸線の伸長変形を考慮した一般性のある解の表現は全く提出されていない。著者らは、平面棒材に関して、すでに、一般性がある軸線の伸長変形を考慮した支配方程式を導き、これらの一般解も積分で表現されることを一部示している。しかし、これらは、積分で表現されているものの、いわゆる楕円積分の標準形の表示までには至っていないので、計算は通常の数値積分によらねばならず、収束解を得るには膨大な計算量を必要とするという問題を有している。

このような観点から、本報告では、軸線の伸長変形を考慮した精度の良い解を効率的に得ることと、より一般性を持った解表現を得ることを目的として著者らが提示した変位の大きさに制限のない各種支配微分方程式をもとにした一般解を楕円積分の標準形に変換する方法について検討を行った。さらに、この結果をもとに各理論間の標準形による表現の差を考察するとともに、数値計算を実施し、各理論による解の差ならびに通常の数値積分との計算効率、精度の差についても若干調べた。

2. 支配方程式と解の積分表現

対象とする直接Lagrange表現の支配方程式はFig. 1の物理成分をもとにTable 1²⁾のように定式化された、a) ひずみに制限をつけない有限変位の式、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式を扱う。ここで、分布荷重については、これを考慮すると解の積分による表現が得られないので、無視している。

文献1)による一般解の積分表現を無次元化表示すると、Table 2のようになる。Table 2からわかるように、このような無次元化を行うと、c) 軸線不伸長の有限変位の式では、構造パラメーターが全く関与せず、他の場合も細長比 λ だけとなる。なお、b) 微小ひずみ・有限変位の式の場合、y方向変位 v_0 の積分表現が文献1)と異なっているが Table 2の方が正しい。

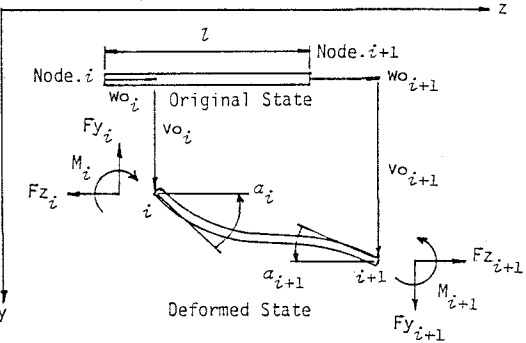


Fig.1 Physical Quantities

Table 1 Direct Lagrangian Expressions.²⁾

Theories	Equilibrium Equations	Boundary Conditions		Stress Resultants vs. Displacements
		Mechanical	Geometrical	
a) Finite Displacements with Finite Strains	$(N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
b) Finite Displacements with Small Strains	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$N = EA(\sqrt{g_0} - 1)$ $M = -EI\alpha'$
c) Inextensional Finite Displacements (Elastica)	$(N \sin \alpha + M' \cos \alpha)' = 0$ $(N \cos \alpha - M' \sin \alpha)' = 0$	$N \sin \alpha + M' \cos \alpha = \bar{F}_y$ $N \cos \alpha - M' \sin \alpha = \bar{F}_z$ $M = \bar{M}$	$v_0 = \bar{v}_0$ $w_0 = \bar{w}_0$ $\alpha = \bar{\alpha}$	$\sqrt{g_0} = 1$ $M = -EI\alpha'$

Remarks; The following notations are used throughout Tables presented as E = Young's Modulus, A = Cross Sectional Area, I = Moment of Inertia, N = Axial Stress Resultant, and $(F_y, \bar{F}_z, \bar{M})$ and $(\bar{v}_0, \bar{w}_0, \bar{\alpha})$ = Prescribed Boundary Values, $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$

Table 2 Integral Expressions for the Solutions of the Governing Equations in Table 1

Integral Expressions			
$I = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{1}{f} d\alpha \quad \frac{w_{i+1}}{l} = \frac{w_i}{l} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Kw \cdot c - 1}{f} d\alpha \quad \frac{v_{i+1}}{l} = \frac{v_i}{l} + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Kv \cdot s}{f} d\alpha$ $A_{i+1} = A_i + \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{Km}{f} (B_i \cdot s - C_i \cdot c) d\alpha \quad B_{i+1} = B_i \quad C_{i+1} = C_i$			
Theories	a) Finite Displacements with Finite Strains	b) Finite Displacements with Small Strains	c) Inextensional Finite Displacements
f	$-\text{sign}(M) \{ A_i^2 - 2B_i(c - c_i) - 2C_i(s - s_i) - \frac{B_i C_i}{\lambda^2} (s^2 - s_i^2) - \frac{B_i^2 - C_i^2}{2\lambda^2} (c^2 - c_i^2) \}^{1/2}$	$-\text{sign}(M) \{ A_i^2 - 2B_i(c - c_i) - 2C_i(s - s_i) \}^{1/2}$	$-\text{sign}(M) \{ A_i^2 - 2B_i(c - c_i) - 2C_i(s - s_i) \}^{1/2}$
Kw Kv Km	$Kw = Kv = Km = \sqrt{g_0}$	$Kw = Kv = \sqrt{g_0} \quad Km = 1.0$	$Kw = Kv = Km = 1.0$

Remarks; $A_i = \frac{M_i l}{EI}$, $B_i = \frac{Fz_i l^2}{EI}$, $C_i = \frac{Fy_i l^2}{EI}$, λ = Slenderness Ratio, $c = \cos \alpha$, $c_i = \cos \alpha_i$, $s = \sin \alpha$, $s_i = \sin \alpha_i$, $c^2 = \cos^2 \alpha$, $c_i^2 = \cos^2 \alpha_i$, $s^2 = \sin^2 \alpha$, $s_i^2 = \sin^2 \alpha_i$, l = Length of Beam Element $i, i+1$ before Deformation, $\sqrt{g_0} = 1 + (B_i c + C_i s) / \lambda^2$, $\text{sign}(\cdot) = \pm 1$ according to the $\pm$ of $(\cdot)$

3. 楕円積分の標準形による解の表現

Table 2 から明らかなように、各理論の積分表現された解は、いずれも次に示す積分の成分から構成されている。

$$I_1 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-\text{sign}(M)}{f_1} d\alpha, \quad I_2 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-\text{sign}(M) \cdot \sin \alpha}{f_1} d\alpha$$

$$I_3 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-\text{sign}(M) \cdot \cos \alpha}{f_1} d\alpha, \quad I_4 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-\text{sign}(M) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{f_1} d\alpha$$

$$I_5 = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{-\text{sign}(M) \cdot \sin^2 \alpha}{f_1} d\alpha \quad (1 \cdot a \sim e)$$

ここに、

$$f_1 = |f| = (a_0 + a_1 \cos \alpha + a_2 \sin \alpha + a_3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + a_4 \cos^2 \alpha + a_5 \sin^2 \alpha)^{1/2} \quad (2)$$

ただし、c) 軸線不伸長の有限変位の式では、 I_4, I_5 が現れず、また、式(2)の係数 $a_0, a_3 \sim a_5$ は、a) ひずみに制限をつけない有限変位の式、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式とでは、それぞれ異なった値をとる。

以上から、Table 3 に示す楕円積分の標準形による解の表現は、式(1・a～e)の積分について検討すればよいことになる。楕円積分の標準形への一般的な変換は、かなり複雑なものであるが、関数 f_1 の形によっては、比較的簡単な変換が可能となる。したがって、ここではa) ひずみに制限をつけない有限変位の式とb), c) とを分けて、標準形への変換方法を示すことにする。なお、式(1・a～e)では、一般性を保持するため、 $-\text{sign}(M)$ を積分内に含めた形で示しているが、実際の積分では、曲げモーメント M の符号により α の領域を分割するので、 $-\text{sign}(M)$ は積分記号の外に出ることになる。したがって、 $-\text{sign}(M) = 1$ と考えても、変換に関する一般性は失われないので、以下簡単のため $-\text{sign}(M) = 1$ として扱う。

Table 3 Three Normal Forms of Elliptic Integrals

The Normal Elliptic Integral of the First Kind
$F = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$
The Normal Elliptic Integral of the Second Kind
$E = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{1-k^2 z^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} dz$
The Normal Elliptic Integral of the Third Kind
$\Pi = \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{dz}{(1-\alpha z^2) \sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}}$

(a) ひずみに制限をつけない有限変位の式

この場合、簡単な変換方法が見い出せなかったため、文献15)に示す一般的な方法を適用する。

まず、

$$x = \tan \alpha / 2 \quad (3)$$

なる変換を行うと、式(1)は次のように表される。

$$I_1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{2}{f_2} dx, \quad I_j = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{R_{j-1}}{f_2} dx \quad (j = 2 \sim 5) \quad (4 \cdot a, b)$$

ここに、

$$R_1 = 4x / (1 + x^2), \quad R_2 = 2(1 - x^2) / (1 + x^2), \quad R_3 = 4x(1 - x^2) / (1 + x^2)^2 \\ R_4 = 8x^2 / (1 + x^2)^2, \quad f_2 = (b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4)^{1/2} \quad (5 \cdot a \sim e)$$

$b_0 \sim b_4$ については、付録(A)に示す。

脚注1)

次に、 f_2 の根号内を零とする x の4つの根 $\alpha_i (i = 1 \sim 4)$ を用いて以下のように、 x を y に変換する。

I) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$ の場合

$$x - m = y \quad (6 \cdot a)$$

II) $\alpha_1 + \alpha_2 \neq \alpha_3 + \alpha_4$ の場合

$$x = \frac{m + ny}{1 + y} \quad (6 \cdot b)$$

ここに、 m, n は付録(B)に示すように、 $\alpha_i (i = 1 \sim 4)$ で定められる定数である。なお、本ケース式(6・b)では、付録(C)より $mn = -1$ となることがわかる。以下の変換では、式(6・a)、(6・b)と同様な変換が可能となるから一般的に表現する。

式(6)の変換を、式(4)にほどこし、 $R_1 \sim R_4$ を y^2 の有理関数で表すと、

$$I_1 = e_1 \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{f_3} dy, \quad I_j = e_j \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_{2j+1}}{f_3} dy + e_j \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_{2(j+1)}}{f_3} y dy \quad (j = 2 \sim 5) \\ f_3 = \{(c_1 + c_2 y^2)(c_3 + c_4 y^2)\}^{1/2} \quad (7 \cdot a, b) \quad (8)$$

ここに、 $R_5 \sim R_{12}$ は付録(D)に示す y^2 の有理関数、 $e_1 \sim e_5, c_1 \sim c_4$ は定数で付録(E)に示しておりである。

式(7・b)の第2項は、変数変換 $y^2 = z$ により初等関数の積分になることが容易にわかるので、式(7・a)ならびに、式(7・b)の第1項についてのみ楕円積分の標準形への変換を進める。式(7・b)の右辺第1項の有理関数 $R_j (j = 5, 7, 9, 11)$ を部分分数に分解すると、第1項の積分は次の形になる。

式(6・a)の変換では、

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_5}{f_3} dy &\rightarrow \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_1}{f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_2}{(y^2 - \beta_1) f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_3}{(y^2 - \beta_2) f_3} dy \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_7}{f_3} dy & \end{aligned} \right\} \quad (9 \cdot a)$$

脚注1) 虚根をもつときは、一組の共役虚根を α_1, α_2 、他の2根を α_3, α_4 とし、4実根をもつ場合には、大きさの順に並べた隣り合う2根を α_1, α_2 とする。また、重根をもつ場合は、初等関数の積分になることが容易にわかるので除く。

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_9}{f_3} dy &\rightarrow \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_1}{f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_2}{(y^2 - \beta_1) f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_3}{(y^2 - \beta_2) f_3} dy \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_{11}}{f_3} dy &\quad + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_4}{(y^2 - \beta_1)^2 f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_5}{(y^2 - \beta_2)^2 f_3} dy \end{aligned} \right\} \quad (9 \cdot b)$$

ただし、 $\beta_1, \beta_2, \gamma_1 \sim \gamma_5$ は、有理関数 $R_j (j = 5, 7, 9, 11)$ によって、それぞれ異なった定数となる。
また、 β_1, β_2 は共役な複素数となるが、このような定数が共役な複素数どうしの積分和は実数となる。⁽¹⁶⁾

式(6・b)の変換では、先に述べたように $mn = -1$ であるため、かなり簡素化され、

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_5}{f_3} dy &\rightarrow \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_1}{f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_2}{(y^2 - \beta_1) f_3} dy \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_7}{f_3} dy &\end{aligned} \right\} \quad (10 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_9}{f_3} dy &\rightarrow \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_1}{f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_2}{(y^2 - \beta_1) f_3} dy + \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\gamma_3}{(y^2 - \beta_1)^2 f_3} dy \\ \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{R_{11}}{f_3} dy &\end{aligned} \right\} \quad (10 \cdot b)$$

となり、 $\beta_1, \gamma_1 \sim \gamma_3$ はすべて実数となる。

式(9)、(10)より、 $I_1 \sim I_5$ の各積分は、次に示す3つの積分と、初等関数の積分 G によって表せることがわかる。

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{f_3} dy, \quad \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{(y^2 - \beta_1) f_3} dy, \quad \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{1}{(y^2 - \beta_1)^2 f_3} dy \quad (11 \cdot a \sim c)$$

これら3つの積分を最終的に標準形へ変換することになるが、積分範囲、式(8)での $c_1 \sim c_4$ の値により、付録(F)に示す種々の方法によらねばならない。

以上の結果から、 $I_1 \sim I_5$ の積分は、式(6)の場合わけのほかに、式(11)以降の変換の差により、積分範囲、母数 k の値は異なるものの、いずれもシンボリックな表現で示すと、次のようなTable 3に示す楕円積分の標準形と初等関数の積分 G の和によって表される。

$$I_1 \rightarrow F, \quad I_2 \rightarrow F + \Pi + G, \quad I_3 \rightarrow F + \Pi + G, \quad I_4 \rightarrow F + E + \Pi + G, \quad I_5 \rightarrow F + E + \Pi + G \quad (12 \cdot a \sim e)$$

以上、一般的な境界条件のもとで変換を示したが、境界条件の特別なときには、式(1)、(2)の被積分数が簡単になることによって、その表現もより簡素になる場合があるので以下にこれを示す。

I) $B_i = 0$ の場合

式(5)で、 $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3 \cdot \alpha_4 = 1$ となり、式(6・a)のとき、式(1)はいずれも初等関数の積分となる。
また、式(6・b)のとき、 $m = \pm 1, n = \mp 1$ (複合同順) となり、式(7)以後、同様な変換を行うと、

$$I_1 \rightarrow F, \quad I_2 \rightarrow F + \Pi, \quad I_3 \rightarrow G, \quad I_4 \rightarrow G, \quad I_5 \rightarrow F + E + \Pi + G \quad (13 \cdot a \sim e)$$

II) $C_i = 0$ の場合

式(5)で、 $b_1 = b_3 = 0$ となり、式(6)の変換を用いることなく直接式(7)の形になる。以下、同様な方法で変換を行うと、

$$I_1 \rightarrow F, \quad I_2 \rightarrow G, \quad I_3 \rightarrow F + \Pi, \quad I_4 \rightarrow G, \quad I_5 \rightarrow F + E + \Pi + G \quad (14 \cdot a \sim e)$$

III) $B_i = C_i = 0$ の場合

式(1)はいずれも初等関数の積分となることは容易にわかる。

(b) 微小ひずみ・有限変位の式、軸線不伸長の有限変位の式

前項に述べた精田積分の標準形への変換方法は、一般性をもったものであり、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式の場合にも適用することができる。しかしながら、この方法によると変換の回数が多く、また、係数の範囲ごとに異なった多くの変換をもちいるので、変換過程が非常に複雑である。これは上記の変換では、式(5・e)に示すような根号内の4次式が零となる解を利用するため、節点における物理量と式(6)以降の各式の係数との対応が複雑になり、係数のとりうる範囲を規定することが難しく、すべての場合について、一応検討する必要があるためである。a) ひずみに制限をつけない有限変位の式の場合、現状では、前節で示した方法しか適用できなかったが、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式の場合には、a) の場合に比べてTable 2 の関数 f が簡素化されるため、式(3)、式(6)の変換を用いずとも、より簡単な方法で変換が可能となる。ここではこのような変換方法について述べる。

Table 2 から明らかなように、関数 f の根号内は三角関数の合成を行うことができ、±の符号内の関数を f_4 とすれば次のようになる。

$$f_4 = |f| = (P_i + Q_i \cos \varphi)^{1/2} \quad (15)$$

ここに、

$$\varphi = \alpha - \beta_i, \quad P_i = A_i^2 - Q_i \cos \varphi_i, \quad Q_i = 2(B_i^2 + C_i^2)^{1/2}$$

$$\cos \beta_i = -2B_i/Q_i, \quad \sin \beta_i = -2C_i/Q_i \quad (16 \cdot a \sim e)$$

したがって、式(1・a～e)について、式(16・a)の変換を行うと次式が得られる。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{f_4} d\varphi, \quad I_2 = \cos \beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi}{f_4} d\varphi + \sin \beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\cos \varphi}{f_4} d\varphi \\ I_3 &= \cos \beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\cos \varphi}{f_4} d\varphi - \sin \beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi}{f_4} d\varphi \\ I_4 &= \cos 2\beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{f_4} d\varphi - \sin 2\beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin^2 \varphi}{f_4} d\varphi + \frac{\sin 2\beta_i}{2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{f_4} d\varphi \\ I_5 &= \cos 2\beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin^2 \varphi}{f_4} d\varphi + \sin 2\beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{f_4} d\varphi + \sin^2 \beta_i \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{f_4} d\varphi \end{aligned} \quad (17 \cdot a \sim e)$$

なお、c) 軸線不伸長の有限変位の式の場合、Table 2 よりわかるように、 I_4, I_5 は現れない。ところで、式(17・a～e)の独立な積分成分は、

$$\begin{aligned} I_1' &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{1}{f_4} d\varphi, \quad I_2' = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi}{f_4} d\varphi, \quad I_3' = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\cos \varphi}{f_4} d\varphi \\ I_4' &= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi}{f_4} d\varphi, \quad I_5' = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{\sin^2 \varphi}{f_4} d\varphi \end{aligned} \quad (18 \cdot a \sim e)$$

であるから、以後、これらについて標準形へ変換することになる。

次に、式(15)の根号内が常に正になるように棒材が変形することを考慮して、

$$y^2 = P_i + Q_i \cos \varphi \quad (19)$$

なる変換を行うと、式(18)は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1' &= -2 \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\text{sign}(\sin \varphi)}{f_s} dy, & I_2' &= -\frac{2}{Q_i} (y_{i+1} - y_i) \\ I_3' &= -\frac{2}{Q_i} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{\text{sign}(\sin \varphi) \cdot (y^2 - P_i)}{f_s} dy \\ I_4' &= -\frac{2}{Q_i^2} \left\{ \frac{(y_{i+1}^3 - y_i^3)}{3} - P_i (y_{i+1} - y_i) \right\}, & I_5' &= -\frac{2}{Q_i^2} \int_{y_i}^{y_{i+1}} \text{sign}(\sin \varphi) \cdot f_s dy \end{aligned} \quad (20 \cdot a \sim e)$$

ここに、

$$f_s = \left[\{y^2 - (P_i - Q_i)\} \{(P_i + Q_i) - y^2\} \right]^{1/2} \quad (21)$$

式(20・b, d)より、 I_2' , I_4' は初等関数であるから、残りの積分についてさらに標準形への変換を行う。このとき、 $\text{sign}(\sin \varphi)$ については、 $-\text{sign}(M)$ について3節に述べた理由から、簡単のため+1として扱う。

式(20)、(21)は、すでに前項に示した式(7)、(8)のレベルまで変換を進めたものになっている。このとき前項の場合と異なり、式(21)へ至る変換が単純で、式(16)から、

$$P_i + Q_i > P_i - Q_i, \quad P_i + Q_i > 0 \quad (22 \cdot a, b)$$

が明らかである。したがって式(22)を考慮すると、付録(F)の r, s, y の範囲が限定でき付録(F)の変換は次の2種類のみの場合わけとなる。

I) $P_i > Q_i$ の場合

$$r = (P_i + Q_i)^{1/2}, \quad s = (P_i - Q_i)^{1/2}, \quad t = 1, \quad s \leq y \leq r \quad (23 \cdot a \sim d)$$

II) $P_i < Q_i$ の場合

$$r = (Q_i - P_i)^{1/2}, \quad s = (P_i + Q_i)^{1/2}, \quad t = 1, \quad 0 \leq y \leq s \quad (24 \cdot a \sim d)$$

なお、 $P_i = Q_i$ のときは、初等関数の積分になるので除外する。

付録(F)の変換を行うと、変換の差により、母数、積分範囲は異なるが、 I_j' ($j = 1 \sim 5$) はいずれも、第3種楕円積分を含まない次の形で表される。

$$I_1' \rightarrow F, \quad I_2' \rightarrow G, \quad I_3' \rightarrow F + E, \quad I_4' \rightarrow G, \quad I_5' \rightarrow F + E + G \quad (25 \cdot a \sim e)$$

式(25)も式(12)同様、シンボリックな表現であり、その具体的な表現は、付録(G)に示す。式(25)を式(17)に代入することで最終的な I_j ($j = 1 \sim 5$) に関するシンボリックな表現が次のように得られる。

$$I_1 \rightarrow F, \quad I_2 \rightarrow F + E + G, \quad I_3 \rightarrow F + E + G, \quad I_4 \rightarrow F + E + G, \quad I_5 \rightarrow F + E + G \quad (26 \cdot a \sim e)$$

このような変換を用いて軸線不伸長の棒材を扱った例として、一般的なものに文献5)があり、モーメントと斜め単一荷重が片持はりの自由端に作用した特別な場合を解析したものに文献7)がある。

i 節点でのモーメント M_i が零となる場合には、さらに変換が簡単になる。すなわち、式(16)で $A_i = 0$ とすると、

$$f_4 = |f| = \{Q_i (\cos \varphi - \cos \varphi_i)\}^{1/2} \quad (27)$$

となり、式(18)の積分範囲を $(0, \varphi_i)$, $(0, \varphi_{i+1})$ と分け、式(19)の変換の代わりに、各積分領域において、

$$\sin \varphi / 2 = \sin \varphi_i / 2 \cdot \sin \psi, \quad \sin \varphi / 2 = \sin \varphi_{i+1} / 2 \cdot \sin \psi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi / 2 \quad (28 \cdot a \sim c)$$

なる変換を用いれば、式(18)は、付録(F)に示す変換なしに、三角関数で表した標準形が付録(H)に示すように直接求る。楕円積分を用いた従来の研究のほとんどは、軸線不伸長を仮定した棒材の一端の曲げモーメント M_i が零となるような場合を扱っており、いずれも式(28)の変換によっている。

文献6)では、軸線不伸長の棒材に関する一般の場合も、曲げモーメントが零となる位置(部材内にないときは、部材外に設定)を積分の始点に選ぶことにより、式(28)により、標準形に変換している。しかしながら、実際の解析では、このような点を求めるのは簡単でなく、解析過程はかえって複雑になると考えられる。

4. 数値計算

楕円積分と通常の数値積分との計算効率、精度の差ならびに、支配方程式の違いによる解の差を比較するために、ここでは、最も積分の簡単な、片持はりの端部に集中荷重が作用する場合について計算を行った。

この構造の境界条件は、

$$v_{o,i+1} = 0, \quad w_{o,i+1} = 0, \quad \alpha_{i+1} = 0 \quad (29 \cdot a \sim c)$$

$$M_i = \bar{M}, \quad Fy_i = \bar{Fy}, \quad Fz_i = \bar{Fz} \quad (30 \cdot a \sim c)$$

式(29)、(30)をTable 2の積分表示された解に代入することによって数値解を得る。ただし、Table 2に示すように、 α_i を求める式が陽な形で得られないので、Table 2の積分表現の第一式を満足する α_i を2分法を用いて収束計算により求め、残りの物理量については、この α_i を用いて計算を行う。

まず、楕円積分と通常の数値積分としてシンプソンの1/3公式を用いたときの精度ならびに効率の比較をFig. 2に示す。この例では、図に示すように微小な曲げモーメントの他に、数値計算の精度が一般に低下する座屈荷重近傍の軸圧縮力を与えている。Fig. 2から、シンプソンの数値積分法では、その積分領域の分割数を増加させると、楕円積分の解に収束していくが、収束解を得るには、膨大な分割数とより多くの計算時間を必要とし、楕円積分の精度、効率が非常に良いことが確認される。なお、この場合の楕円積分の計算方法は、次に述べるFig. 3の場合と同様である。

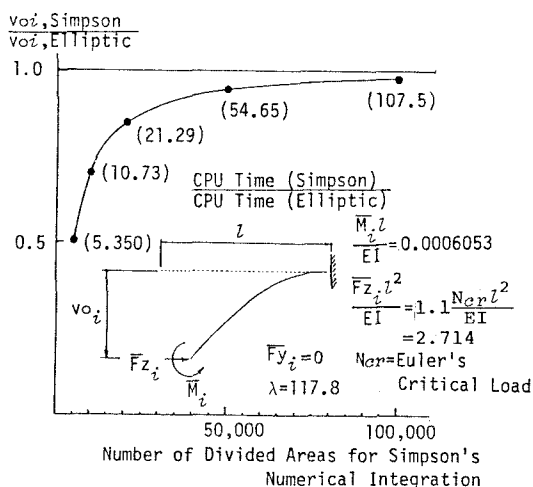


Fig.2 Accuracy of Numerical Integration for Finite Displacements with Finite Strains

次に各理論による楕円積分の差をFig. 3, 4に示す。Fig. 3では、微小な曲げモーメントが自由端に作用した構造に、Fig. 4では、微小な曲げモーメントならびに鉛直方向力が自由端に作用した構造に、それぞれ、さらに水平力を載荷していった場合の水平方向力と変位の関係を示している。構造パラメーターとしては、実際的な細長比 $\lambda = 100$ の場合と、実際的ではないが、軸線の伸長を考慮した場合と無視した場合の片持はりの座屈荷重に明確な差が現れる $\lambda = 4$ の場合について計算している。

Fig. 3における楕円積分の計算は細長比 $\lambda = 4, 100$ ともにa) ひずみに制限をつけない有限変位の式の場合は、付録(F)の表中の4)の変換により導かれた式(14)を用い、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式の場合は式(24)、すなわち、付録(F)の4)の変換によって導かれた式(26)を用いた。ただし、 $\bar{Fz}l^2/EI = 0$ の点は初等関数の積分となる。一方、Fig. 4では、 $\lambda = 4, 100$ ともにa)の場合、式(6・b)と付録(F)の4)または5)の変換により得られた式(12)を用いb)、c)の場合は、Fig. 3と同様、式(24)によって導かれた式(26)を用いた。ただし、a)の場合の

$\overline{F_z} l^2 / EI = 0$ の点では、付録 (F) の 5) の変換で得られた式 (13) によった。

図から、この例に関しては、 $\lambda = 100$ の場合、いずれも各理論間に差はなく、いずれも一本の曲線で表され、さらに軸線不伸長の場合の $\lambda = 4$ の曲線とも一致している。一方 $\lambda = 4$ の場合は Fig. 3 の荷重条件では、差が現れ、特に、座屈直後の変位に関して、b) 微小ひずみ・有限変位の式、c) 軸線不伸長の有限変位の式では変位を過大に評価する傾向にある。しかしながら、鉛直力 $\overline{F_y} l^2 / EI = 1.0$ を作用させた場合には、各理論による差は小さくなっている。なお、2 節で述べたように、c) 軸線不伸長の有限変位の式の場合、図のような物理量の無次元表示を行うと、構造パラメーターが関与しないため λ の値にかかわらず荷重変位曲線は厳密な意味で一本の曲線で表される。

5. まとめ

変位の大きさに制限を付けない平面棒材の各種有限変位理論の高次非線形支配方程式の厳密解を得ることを目的として、楕円積分の標準形により、一般的に解を表現することについて検討した。その結果、a) ひずみに制限をつけない有限変位の式では、解が第一種～第三種楕円積分の標準形で表され、b) 微小ひずみの有限変位の式、ならびに、c) 軸線不伸長の有限変位の式では、第一種、第二種楕円積分の標準形で表されることが判明した。さらに、数値計算からこのような楕円積分の標準形を用いると、通常の数値積分に比べ、精度ならびに計算効率が大幅に向上されることも明らかとなった。なお、第一種、第二種楕円積分の数値計算は、名工大計算機センター、MELCOM, NSP サブルーチンライブラリーを利用した。

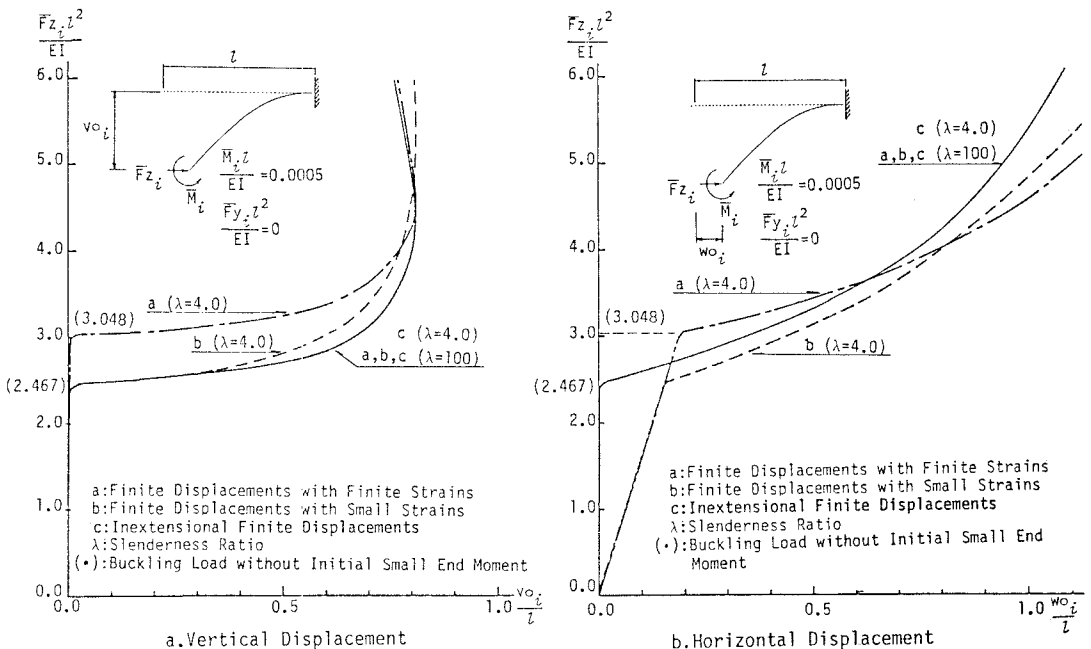


Fig.3 Cantilever with Initial Small End Moment under Increasing End Horizontal Force

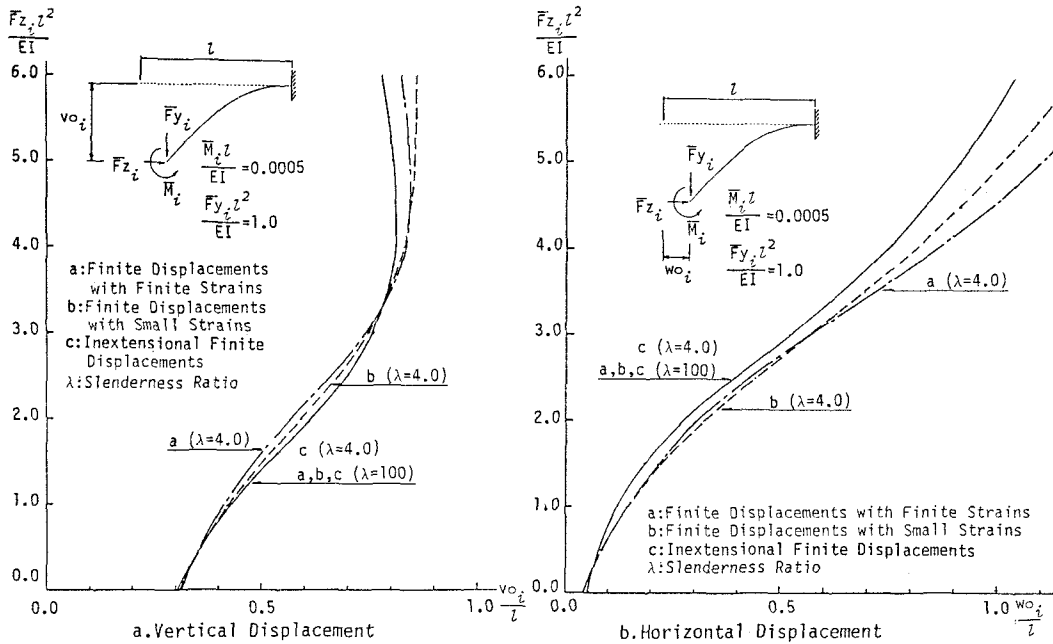


Fig.4 Cantilever with Initial Vertical End Force and Small End Moment under Increasing End Horizontal Force

【付録】

(A)

$$b_0 = a_0 - a_1 + a_4, \quad b_1 = 2(a_2 - a_3), \quad b_2 = 2(a_0 - a_4 + 2a_5), \quad b_3 = 2(a_2 + a_3) \\ b_4 = a_0 + a_1 + a_4 \quad (A1 \cdot a \sim e)$$

ここに、

$$a_0 = A_1^2 + 2B_1 \cos \alpha_1 + 2C_1 \sin \alpha_1 + B_1 \cdot C_1 \sin 2\alpha_1 / \lambda^2 + (B_1^2 - C_1^2) \cos 2\alpha_1 / 2\lambda^2 \\ a_1 = -2B_1, \quad a_2 = -2C_1, \quad a_3 = -2B_1 \cdot C_1 / \lambda^2, \quad a_4 = -(B_1^2 - C_1^2) / 2\lambda^2 \\ a_5 = (B_1^2 - C_1^2) / 2\lambda^2 \quad (A2 \cdot a \sim f)$$

(B)

I) 式(6・a)の場合

$$m = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2 \quad (B1)$$

II) 式(6・b)の場合

$$m \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}} \right\} = \frac{-(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 \alpha_4) \pm \{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_4)\}^{1/2}}{-\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} \quad (B2)$$

(C)

式(5)から、

$$f_2^2 = b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = b_0 (x^2 + b_1' x + b_2') (x^2 + b_3' x + b_4') \quad (C1)$$

のように、 f_2^2 を分解した場合の係数 $b_1' \sim b_4'$ を用いると、 mn は次のように表される。

$$mn = (b_2' b_3' - b_1' b_4') / (b_1' - b_3') \quad (C2)$$

さらに、 b_i と b_i' との間には、次の関係が成立する。

$$b_1' + b_3' = b_1 / b_0, \quad b_2' + b_4' + b_1' b_3' = b_2 / b_0, \quad b_1' b_4' + b_2' b_3' = b_3 / b_0.$$

$$b_2' b_4' = b_4 / b_0. \quad (C3 \cdot a \sim d)$$

$mn = -1$ の証明は、式(C3)と付録(A)の関係を用い、式(C2)の右辺を i 節点の物理量で表せばよいが、この方法では、かなり繁雑になるので、ここでは別の証明法による。すなわち、 $mn = -1$ であれば、式(C2)と式(C3・a, c, d)を用いると、式(C3・b)が恒等的に成立することを示す。

$mn = -1$ とすると、式(C2)より、

$$(b_2' - 1) / b_1' = (b_4' - 1) / b_3' = k \quad (C4)$$

が成立し、上式のようにこの式の値を k とおく。さらに、この関係を式(C3・a, c, d)に用いると、次式が成立する。

$$b_1' b_3' = (b_3 - b_1) / (2k b_0), \quad b_2' + b_4' = k b_1 / b_0 + 2 \quad (C5 \cdot a, b)$$

$$k = 2(b_4 - b_0) / (b_1 + b_3) = a_1 / a_2 \quad (C6)$$

式(C3・b)が恒等的に成立することは、この式(C3・b)の右辺と左辺との差 Δ が恒等的に零になることによって示される。まず、 Δ を式(C5)を用いて、 $b_0 \sim b_3$ と k によって表すと、

$$\Delta = \{2b_1 k^2 + (4b_0 - 2b_2)k - b_1 + b_3\} / (2k b_0) \quad (C7)$$

次に、付録(A)の関係によって、式(C7)の分子を $a_0 \sim a_5$ で表すと式(C7)は、

$$\Delta = 2 \{(a_2^2 - a_1^2) a_3 + 2(a_4 - a_5) a_1 a_2\} / (k b_0 a_2^2) \quad (C8)$$

最後に、付録(A)の関係により、式(C8)の分子を i 節点の物理量で表わすと、 $\Delta = 0$ が成立することが容易にわかる。

(D)

I) 式(6・a)の場合

$$R_5 = \{-m y^2 + m(1 + m^2)\} / g, \quad R_6 = \{y^2 + (1 - m^2)\} / g, \quad R_7 = \{-y^4 + 2m^2 y^2 + 1 - m^4\} / g, \\ R_8 = -4m / g, \quad R_9 = \{m y^6 + m(5 - 3m^2) y^4 - m(5 - 6m^2 - 3m^4) y^2 + m(1 + m^2)^2(1 - m^2)\} / g^2, \\ R_{10} = \{-y^6 - (1 - 3m^2) y^4 + (1 + 6m^2 - 3m^4) y^2 + (1 + m^2)(1 - 6m^2 + m^4)\} / g^2, \\ R_{11} = \{y^6 + (2 - m^2) y^4 + (1 - 4m^2 - m^4) y^2 + m^2(1 + m^2)^2\} / g^2, \\ R_{12} = \{-2m y^4 + 4m^3 y^2 + 2m(1 - m^2)(1 + m^2)\} / g^2 \quad (D1 \cdot a \sim h)$$

ここに、

$$g = y^4 + 2(1 - m^2) y^2 + (1 + m^2)^2 \quad (D2)$$

II) 式(6・b)の場合

$$R_5 = (n y^2 + m) / g, \quad R_6 = (m + n) / g, \quad R_7 = \{(1 - n^2) y^2 + 1 - m^2\} / g, \quad R_8 = 4 / g, \\ R_9 = \{n(1 - n^2) y^4 + 6(m + n) y^2 + m(1 - m^2)\} / g^2, \quad R_{10} = \{(m - n^3 + 6n) y^2 + 6m + n - m^3\} / g^2, \\ R_{11} = \{n^2 y^4 + (m^2 + n^2 - 4) y^2 + m^2\} / g^2, \quad R_{12} = \{2(n^2 - 1) y^2 + 2(m^2 - 1)\} / g^2 \quad (D3 \cdot a \sim h)$$

ここに、

$$g = (1 + n^2) y^2 + 1 + m^2 \quad (D4)$$

(E)

I) 式(6・a)の場合

$$e_1 = 2, \quad e_2 = 4, \quad e_3 = 2, \quad e_4 = 4, \quad e_5 = 8 \quad (E1 \cdot a \sim e)$$

$$c_1 = b_0(\alpha_1 \alpha_2 - m^2), \quad c_2 = b_0, \quad c_3 = \alpha_3 \alpha_4 - m^2, \quad c_4 = 1 \quad (E2 \cdot a \sim d)$$

II) 式(6・b)の場合

$$e_1 = 2(n-m), \quad e_2 = 4(n-m), \quad e_3 = 2(n-m), \quad e_4 = 4(n-m), \quad e_5 = 8(n-m) \quad (E3 \cdot a \sim e)$$

$$c_1 = b_0 \cdot \{m^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)m + \alpha_1 \alpha_2\}, \quad c_2 = b_0 \cdot \{n^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)n + \alpha_1 \alpha_2\}$$

$$c_3 = m^2 - (\alpha_3 + \alpha_4)m + \alpha_3 \alpha_4, \quad c_4 = n^2 - (\alpha_3 + \alpha_4)n + \alpha_3 \alpha_4 \quad (E4 \cdot a \sim d)$$

(F)

式(8)について、

$$r = (|c_1/c_2|)^{1/2}, \quad s = (|c_3/c_4|)^{1/2}, \quad t = (|c_2 \cdot c_4|)^{1/2} \quad (F1 \cdot a \sim c)$$

と置くと、式(11)の積分は、次に示す表のいずれかの場合にあてはまる。

Table F

f_3	$ y $ Transformation	Eq. (11)	Expression with Normal Forms	k	α
1) $\{(r^2-y^2)(s^2-y^2)\}^{1/2}$	$0 \leq y \leq s < r$ $y=sz$	a	$F/(rt)$	$\frac{s}{r}$	$\frac{s^2}{\beta}$
		b	$-\Pi/(rt\beta)$		
		c	$\Pi'/(rt\beta^2)$		
2) $\{(y^2-r^2)(y^2-s^2)\}^{1/2}$	$s < r \leq y $ $y=r/z$	a	$-F/(rt)$	$\frac{s}{r}$	$\frac{\beta}{r^2}$
		b	$(F-\Pi)/(rt\beta)$		
		c	$(-F+2\Pi-\Pi')/(rt\beta^2)$		
3) $\{(r^2-y^2)(y^2-s^2)\}^{1/2}$	$s \leq y \leq r$ $y^2=r^2-(r^2-s^2)z^2$	a	$-F/(rt)$	$\frac{(r^2-s^2)^{1/2}}{r}$	$\frac{r^2-s^2}{r^2-\beta}$
		b	$-\Pi/\{rt(r^2-\beta)\}$		
		c	$-\Pi'/\{rt(r^2-\beta)^2\}$		
4) $\{(r^2+y^2)(s^2-y^2)\}^{1/2}$	$0 \leq y \leq s$ $y^2=s^2(1-z^2)$	a	$-F/\{(r^2+s^2)^{1/2}t\}$	$\frac{s}{(r^2+s^2)^{1/2}}$	$\frac{s}{s^2-\beta}$
		b	$-\Pi/\{(r^2+s^2)^{1/2}t(s^2-\beta)\}$		
		c	$-\Pi'/\{(r^2+s^2)^{1/2}t(s^2-\beta)^2\}$		
5) $\{(r^2+y^2)(y^2-s^2)\}^{1/2}$	$s \leq y $ $y^2=s^2/(1-z^2)$	a	$F/\{(r^2+s^2)^{1/2}t\}$	$\frac{r}{(r^2+s^2)^{1/2}}$	$\frac{\beta}{\beta-s^2}$
		b	$\{-F+s^2\Pi/(s^2-\beta)\}/\{(r^2+s^2)^{1/2}t\beta\}$		
		c	$\{F-2s^2\Pi/(s^2-\beta)+s^4\Pi'/(s^2-\beta)^2\}/\{(r^2+s^2)^{1/2}t\beta^2\}$		
6) $\{(y^2+r^2)(y^2+s^2)\}^{1/2}$	$s < r$ $y^2=s^2z^2/(1-z^2)$	a	$F/(rt)$	$\frac{(r^2-s^2)^{1/2}}{r}$	$\frac{s^2+\beta}{\beta}$
		b	$(-F-s^2\Pi/\beta)/\{rt(s^2+\beta)\}$		
		c	$(F+2s^2\Pi/\beta+s^4\Pi'/\beta^2)/\{rt(s^2+\beta)^2\}$		

Remarks: F, E, Π are shown in Table 3,

$$\Pi' = \left[\frac{\alpha^2 z \{(1-z^2)(1-k^2 z^2)\}^{1/2}}{(1-\alpha z^2)} \right]_{z_i}^{z_i+1} + (\alpha-k^2)F - \alpha E + \{3k^2 - 2(1+k^2)\alpha + \alpha^2\}\Pi / \{2(\alpha-k^2)(\alpha-1)\}$$

(G)

I) $P_i > Q_i$ の場合、付録 (F) の表中の変換 3) より、

$$I_1' = \frac{2}{(P_i + Q_i)^{1/2}} \cdot F, \quad I_3' = \frac{2}{Q_i(P_i + Q_i)^{1/2}} \{(P_i + Q_i) \cdot E - P_i \cdot F\}$$

$$I_5' = \frac{4(P_i + Q_i)^{1/2}}{3Q_i^2} \{(Q_i - P_i) \cdot F + P_i \cdot E - Q_i [z f_5']_{z_i}^{z_i+1}\} \quad (G1 \cdot a \sim c)$$

ここに、

$$f_5' = \{(1-z^2)(1-k^2 z^2)\}^{1/2}, \quad k = \{2Q_i/(P_i + Q_i)\}^{1/2} \quad (G2 \cdot a, b)$$

II) $P_i < Q_i$ の場合、付録 (F) の表中の変換 4) より、

$$I_1' = \frac{2}{(2Q_i)^{1/2}} \cdot F, \quad I_3' = \frac{2}{(2Q_i)^{1/2}} (2E - F)$$

$$I_5' = \frac{4}{3Q_i(2Q_i)^{1/2}} \{ (Q_i - P_i) \cdot F + 2P_i \cdot E - (P_i + Q_i) [zf_{\xi'}]_{z_i}^{z_i+1} \} \quad (G3 \cdot a \sim c)$$

ここに、

$$f_{\xi'} = \{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)\}^{1/2}, \quad k = \{(P_i + Q_i)/2Q_i\}^{1/2} \quad (G4 \cdot a, b)$$

(H)

$(0, \varphi_i)$ 、 $(0, \varphi_{i+1})$ なる 2 つの積分領域があるが、いずれの変換結果も同様となるので、 $(0, \varphi_i)$ についてのみ変換結果を示す。

$$I_1' = \frac{2}{(2Q_i)^{1/2}} K', \quad I_2' = \frac{4k}{(2Q_i)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \text{sign}(\sin \frac{\varphi_i}{2}) \cdot \sin \psi \, d\psi \quad (\text{初等関数の積分})$$

$$I_3' = \frac{2}{(2Q_i)^{1/2}} (2E' - K'), \quad I_4' = \frac{4k}{(2Q_i)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \text{sign}(\sin \frac{\varphi_i}{2}) \cdot \sin \psi (1 - 2k^2 \sin^2 \psi) \, d\psi \quad (\text{初等関数の積分})$$

$$I_5' = \frac{8}{3(2Q_i)^{1/2}} \{ (1 - k^2) K' + (2k^2 - 1) E' - k^2 [\sin \psi \cdot f_{\xi'}]_0^{\pi/2} \} \quad (H1 \cdot a \sim e)$$

ここに、

$$K' = \int_0^{\pi/2} \text{sign}(\sin \frac{\varphi_i}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) / f_{\xi'} \, d\psi, \quad E' = \int_0^{\pi/2} \text{sign}(\sin \frac{\varphi_i}{2} \cos \frac{\varphi}{2}) \cdot f_{\xi'} \, d\psi$$

$$f_{\xi'} = (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2}, \quad k = \sin \varphi_i / 2 \quad (H2 \cdot a \sim d)$$

$\text{sign}(\sin \varphi_i / 2 \cdot \cos \varphi / 2)$ が一定のとき、 K' 、 E' はそれぞれ、第一種、第二種の完全楕円積分となる。 $\text{sign}(\sin \varphi_i / 2 \cdot \cos \varphi / 2)$ が変化する場合にも、すでに 3 節で述べたように、一定区間ごとに積分し、各区間ごとに、ここで説明した変換を用いれば、母数が異なるだけで同様の表現となる。

参考文献

- 1) 西野文雄, 倉方慶夫, 後藤芳顯: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論、土木学会論文報告集、No.237, pp.11-26, 1975-5.
- 2) 後藤芳顯, 長谷川彰夫, 西野文雄: 平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察、土木学会論文報告集、No.331, pp.33-43, 1983-3.
- 3) Timoshenko, S.P. and J.M.Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, pp.76-82, 1961.
- 4) Sliter, G.E. and A.P.Boresi: Elastica Supported at Midpoint by a Spring, ASCE, Vol.90, No.EM2, pp.1-15, April 1964.
- 5) Lee, S.L., F.S.Manuel and E.C.Rossow: Large Deflections and Stability of Elastic Frames, ASCE, Vol.94, No.EM2, pp.521-547, 1968
- 6) Britvec, S.J.: The Stability of Elastic Systems, Pergamon Press, pp.137-195, 1973.
- 7) Lau, J.H.: Large Deflections of Beams with Combined Loads, ASCE, Vol.108, No.EM1, pp.180-185, February 1982.

- 8) Seide, P.: Large Deflections of a Simply Supported Beam Subjected to Moment at One End, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.51, pp.519-525, September 1984.
- 9) Huddleston, J.V.: A Numerical Technique for Elastica Problems, ASCE, Vol.94, No.EM5, pp.1159-1165, October 1968.
- 10) Huddleston, J.V.: Effect of Axial Strain on Buckling and Postbuckling Behavior of Elastic Columns, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Pergamon Press, pp.263-273, 1970
- 11) Wolde-Tinsae, A.M. and M.C. Assaad: Nonlinear Stability of Prebuckled Tapered Arches, ASCE, Vol.110, No.EM1, pp.84-94, January 1984.
- 12) Lau, J.H.: Large Deflection of Cantilever Beam, ASCE, Vol.107, No.EM1, pp.259-264, February 1981
- 13) 阿井正博, 村上淳: 伝達関数法による面内曲げ有限変位問題の解析、土木学会論文報告集、No.341、pp.59-68, 1984-1.
- 14) Teixeira de Freitas, J.A. and D.L. Smith: Finite Element Elastic Beam-Column, ASCE, Vol.109, No.EM5, pp.1247-1269, October 1983.
- 15) 安藤四郎: 楕円積分・楕円関数入門、日新出版、1970.
- 16) Byrd, P.F. and M.D. Friedman: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer Verlag, pp.223-239, 1954.

(1985年10月18日受付)