

減衰振動系の応答解析方法の比較

AN INVESTIGATION FOR RESPONSE ANALYSIS OF STRUCTURES WITH
NON-PROPORTIONAL DAMPING

水田洋司* 平井一男**

By Yoji Mizuta and Itio Hirai

The classical normal mode method is an efficient procedure for finding the dynamic responses of multi-degrees freedom systems. This method, however, cannot be applied to non-proportional damped structures. Damped structures can be exactly analyzed by using the direct step-by-step integration method or complex modal method. But, they are not available for large multi-degrees freedom systems. For such systems, several approximate methods are developed. This paper investigates the accuracy of these approximate methods by calculating the dynamic responses of several damped structures.

1. まえがき

構造物を離散化手法で解く場合、減衰マトリックスの取扱いは、動的応答解析上、重要な問題の一つである。減衰が速度に比例する粘性減衰で表わされる場合には、既存の方法で運動方程式を解析することができるが、それらの方法も減衰マトリックスの特性により計算精度・計算時間が異なるようである。

多自由度系の構造物の動的応答を求める方法の一つにモード解析法があるが、この方法は、非減衰系の固有値解析で得られる固有振動数・固有モードを用いて系の動的応答を求める方法である。減衰がRayleigh減衰、Caughey減衰¹⁾で表わされる比例減衰の系あるいは非比例性が弱く減衰の小さな系では、前述のモード解析法を用いて減衰系の応答を算定することができる。しかし、吸振器をもつ構造物あるいは地盤-基礎-構造物系のように構成部分ごとに減衰の大きさが異なる場合には、前述のモード解析法は適用できず、非比例減衰系としての取り扱いが必要であろう。非比例減衰系を解く方法としては、(1) 減衰マトリックスの対角化法²⁾³⁾、(2) 付加外力法⁴⁾、(3) 複素モード解析法⁵⁾、(4) 直接積分法⁶⁾⁷⁾⁸⁾等がある。

本論文では、非比例減衰をもつ系の減衰振動方程式中の減衰項処理に関する上記の4方法の概説とその使用法、精度について述べ、数値計算でそれらの方法の特性を明らかにしている。(1)の方法では減衰項の近似と計算誤差が、(2)・(3)・(4)の方法では計算誤差が、それぞれの方法の精度に影響すると考えられる。また、非比例減衰系と比例減衰系の判別法として提案されているG. B. Warburtonの方法²⁾の成立具合についても調べている。

* 工博 八代工業高等専門学校助教授 土木建築工学科 (〒866 八代市平山新町2627番地)

** 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科 (〒860 熊本市黒髪 2丁目39番 1号)

2. 非減衰系の固有振動数・固有モードを用いる方法

粘性減衰を有する多自由度系の運動方程式は、

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + KW = P(t) \quad (1)$$

と表わせる。ここに、 M 、 C 、 K は、それぞれ質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックス、 $\ddot{W}$ 、 $\dot{W}$ 、 W 、 $P(t)$ は、それぞれ加速度ベクトル、速度ベクトル、変位ベクトル、外力ベクトルである。いま、非減衰系の固有値解析で得られた固有モードを Φ_i 、一般化座標を $q_i(t)$ とすると、変位ベクトルは

$$W = \sum_i \Phi_i q_i(t) = \Phi q \quad (2)$$

で求められる。このとき固有円振動数マトリックス ω 、モーダルマトリックス Φ は、次の条件を満足する。

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (3)$$

$$\Phi^T K \Phi = \omega^2 = \text{diag} [\omega_i^2] \quad (4)$$

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n] \quad (5)$$

$$q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)] \quad (6)$$

ここに、 n は自由度数

式(1)に式(2)を代入し、両辺に前から Φ の転置マトリックス Φ^T を掛け、式(3)・(4)の特性を用いて整理すると、

$$\ddot{q} + \Phi^T C \Phi \dot{q} + \omega^2 q = F(t) \quad (7)$$

となる。ここに、

$$F(t) = \Phi^T P(t) \quad (8)$$

である。最終的に、減衰振動方程式は式(7)のように表わされ、これを解いて動的応答を求めることができる。ここで問題となるのは $\Phi^T C \Phi$ の取り扱いである。いま、 $\Phi^T C \Phi$ の対角要素からなる対角マトリックスを $2\zeta\omega$ で表わすと、 ζ も対角マトリックスとなり、その (i, i) 要素 ζ_i は i 次モードの減衰定数である。

$$\Phi^T C \Phi = 2\zeta\omega \quad (9)$$

のように表わせる場合、減衰マトリックス C は比例減衰マトリックスと呼ばれる。つまり、減衰がRayleigh減衰、Caughey減衰あるいはそれらの和と積で表わせる場合に、 C は比例減衰マトリックスとなる。また、

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (10)$$

のように、 $\Phi^T C \Phi$ の非対角要素の一部あるいは全部に零でない要素が含まれる場合、 C は非比例減衰マトリックスと呼ばれている。このマトリックスを含む非比例減衰振動方程式を解く方法として、減衰マトリックスの対角化法、付加外力法がある。これらの方法は非減衰系の固有振動数、固有モードを用いて解く方法である。

2. 1 比例減衰系と非比例減衰系の区別

G. B. Warburton は、非比例減衰系の共振点の応答振幅と減衰を比例減衰系と見做した時の共振点の応答振幅が等しいという条件を用いて、比例減衰と非比例減衰を区別する式を導入している²⁾。その結果のみを記せば次のようである。

$$\zeta_r < \varepsilon \mid b_{rr} (\omega_s^2 / \omega_r^2 - 1) / 2b_{rs} \mid_{\min s} \quad (11)$$

ここに、

$$\Phi^T C \Phi = [b_{rs}]$$

b_{rr} : $\Phi^T C \Phi$ の (r, r) 要素、 b_{rs} : $\Phi^T C \Phi$ の (r, s) 要素、 ζ_r : r 次の減衰定数

ω_r : r 次の固有円振動数、 $\varepsilon = 0.05$ 、 ω_s : s 次の固有円振動数

Warburton は式(11)の成立する範囲では、非比例減衰を比例減衰として解いても誤差は小さいとしている。式(11)は減衰マトリックスの対角化に伴う応答の近似度に関する簡単な評価を与えるが、構造物の固有振動数が近接する場合に、共振振動数の近傍で応答に誤差³⁾が生じ、比例減衰と非比例減衰の判定が難しくなることが推察される。また、 ε の取り方にも問題があると考えられる。

2. 2 減衰マトリックスの対角化法

減衰マトリックスの対角化とは、減衰マトリックス $\mathbf{C}$ の前後にモードマトリックス Φ を乗じて得られる量 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ のマトリックスになんらかの操作を加えて、 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ を対角化する方法である。対角化の方法として次の二つが考えられる。ここでは、対角化された新しい要素を b_{rr}^* で表す。

(I) $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ の対角要素を用いて、減衰定数を定め応答を算定する。

この方法は、 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ の非対角要素を無視して解く方法であり、通常モード解析法である。

Warburton によれば、式(11)が成立する範囲では十分な精度で計算できるとされている。

$$b_{rr}^* = b_{rr} \quad (12)$$

(II) 非比例減衰の共振点での振幅と比例減衰の共振点での振幅が等しくなるように比例減衰定数を定める。この方法は、 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ の非対角要素の影響を対角要素に組み入れる方法である。筆者らは山田の式³⁾とは異なる次式を導入した(付録参照)。

$$b_{rr}^* = b_{rr} + \sum_s b_{rs} f_s \omega_r b_{rr} / (f_r \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_r^2 b_{ss}^2}) \quad (13)$$

[ただし、 $s \neq r$]

近接した固有振動数を持つ系では、上式の対角化がうまく行われなことが懸念される。

後述の数値計算では、(I)の方法をモード解析法、(II)の方法を対角化法として表わしている。

2. 3 付加外力法⁴⁾

この方法は、 $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$ の非対角要素からなるマトリックス $\Delta \mathbf{C}$ を、付加外力 $\Delta \mathbf{F}$ に置換して解析する方法である。いま、式(7)を逐次に解くことを考える。任意時間 i における式(7)の運動方程式は、

$$\ddot{\mathbf{q}}_i + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{q}}_i + \omega^2 \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i \quad (14)$$

と表わされる。付加外力 $\Delta \mathbf{F}$ を用いて表わすと上式は、

$$\ddot{\mathbf{q}}_i + 2\zeta\omega\dot{\mathbf{q}}_i + \omega^2 \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i \quad (15)$$

ここに、

$$\Delta \mathbf{F}_i = -\Delta \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_i \quad (16)$$

$$\Delta \mathbf{C} = \Phi^T \mathbf{C} \Phi - 2\zeta\omega \quad (17)$$

である。この式をNewmark の β 法で解くときの付加外力、応答は次式のようになる。

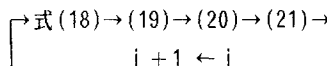
$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F}_i = & -\{ \mathbf{I} + (h/2) \Delta \mathbf{C} (\mathbf{I} + h\zeta\omega + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \}^{-1} \Delta \mathbf{C} \\ & [\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (h/2) \ddot{\mathbf{q}}_{i-1} + (h/2) (\mathbf{I} + h\zeta\omega + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \\ & \{ \mathbf{F}_i - 2\zeta\omega (\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (h/2) \ddot{\mathbf{q}}_{i-1}) \\ & - \omega^2 (\mathbf{q}_{i-1} + h\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (1/2-\beta)h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{i-1}) \}] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_i = & (\mathbf{I} + h\zeta\omega + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \{ \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i - 2\zeta\omega (\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (h/2) \ddot{\mathbf{q}}_{i-1}) \\ & - \omega^2 (\mathbf{q}_{i-1} + h\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (1/2-\beta)h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{i-1}) \} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (h/2) (\ddot{\mathbf{q}}_{i-1} + \ddot{\mathbf{q}}_i) \quad (20)$$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1} + h\dot{\mathbf{q}}_{i-1} + (1/2-\beta)h^2 \ddot{\mathbf{q}}_{i-1} + \beta h^2 \ddot{\mathbf{q}}_i \quad (21)$$

計算手順



$\ddot{\mathbf{q}}_i$, $\dot{\mathbf{q}}_i$, $\mathbf{q}_i$ は用いるモードの個数に等しいベクトルである。低次のモードを用いた場合でも応答が精

度良く求まる理論的根拠は、非減衰系におけるモード解析の場合と同様である。一つの問題点は、 $\Phi^T C \Phi$ の値が、全モードを用いた場合と低次のモードだけを用いた場合とで、どれくらいの差があり、それが応答に及ぼす影響がどの程度かということである。

3. 複素モード解析法

式(1)の2階 n 元連立微分方程式と恒等式

$$-K\dot{W} + K\dot{W} = 0 \quad (22)$$

の関係から、式(1)・(22)と等価な1階の連立微分方程式を作る。この方程式は、

$$B\dot{X} + AX = Q \quad (23)$$

ここに、

$$B = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$A = \begin{bmatrix} C & K \\ K & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$X = \begin{bmatrix} \dot{W} \\ W \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$Q = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

固有振動数・固有モードは、式(23)で $Q=0$ とおいた非対称実マトリックスの固有値問題より算定することができるが、これは $2n$ 次元の固有値問題であり、求められた固有振動数・固有モードは複素数である。ここで算定された i 次の複素固有振動数・複素固有モードを、それぞれ λ_i 、 v_i 、一般化座標を $q_i(t)$ とすると、

$$X = \sum_i v_i q_i(t) = Vq \quad (28)$$

ここに、

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_{2n}] \quad (30)$$

$$q = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dots, q_{2n}(t)] \quad (31)$$

また、複素固有振動数、複素固有モードは、次の条件を満足する。

$$\bar{\mathbf{V}}\mathbf{B}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mu_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \text{Trace } \mu_i \quad (32)$$

$$\bar{\mathbf{V}}^T\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \kappa_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \text{Trace } \kappa_i \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mu_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \kappa_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = -\Lambda \quad (34)$$

式(28)・(32)・(33)・(34)を式(23)に代入して整理すると、

$$\dot{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (35)$$

ここに、

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mu_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix}^{-1} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{Q} \quad (36)$$

式(35)より i 次モードの運動方程式は、

$$\dot{q}_i(t) - \lambda_i q_i(t) = f_i(t) \quad (37)$$

となる。初期条件 $q_i(0)$ に対する式(34)の解¹⁰⁾は、

$$q_i(t) = e^{\lambda_i t} \left\{ \int_0^t f_i(\tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau + q_i(0) \right\} \quad (38)$$

である。複素固有振動数、複素固有モードには共役複素数が含まれるため、式(38)の i の個数は n である。

式(38)を任意荷重 $f_i(t)$ について解く場合、 $f_i(t)$ を時間間隔 h の間で一定とし $q_i(t)$ を逐次求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} q_i(t+h) &= e^{\lambda_i h} \left\{ \int_0^h f_i(t+\tau) e^{-\lambda_i \tau} d\tau + q_i(t) \right\} \\ &= e^{\lambda_i h} q_i(t) + f_i(t+h) (e^{\lambda_i h} - 1) / \lambda_i \end{aligned} \quad (39)$$

また、調和関数荷重、 $f_i(t) = p_i \sin \omega_i t$ が作用する場合には、

$$\begin{aligned} q_i(t) &= e^{\lambda_i t} q_i(0) \\ &\quad + p_i (\omega_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i \sin \omega_i t - \omega_i \sin \omega_i t) / (\lambda_i^2 + \omega_i^2) \end{aligned} \quad (40)$$

式(39)・(40)でわかるように、複素固有振動数 λ_i が分母にあるため、高次の複素固有モードが応答に及ぼす影響は、非減衰系の場合のモード解析と同様に小さいことが理解できる。従って、低次の固有モードを用いて十分な精度で計算可能と考えられる。

4. 直接積分法を用いる方法

直接積分法を用いる方法とは、運動方程式式(1)を線形加速度法、Wilsonの θ 法、Newmark の β 法のような逐次積分法を用いて解く方法である。この場合、どの逐次積分法を用いて解くかは、時間間隔の大きさと要求される計算精度との関係で定まる。この方法は、減衰が比例減衰あるいは非比例減衰であるかに無関係に使用することが可能である。

5. 数値計算

減衰系においてWarburton の判別式から、減衰を比例減衰と見なせる3質点の弦と、非比例減衰と考えるべき7質点の弦、6質点の塔-基礎を計算例に選び、それらの動的応答を計算して、各解析法の妥当性・精度、Warburton の判別式の成立具合、使用するモードの個数と計算精度を確かめ、各解析法の計算時間の比較を行なった。ここで、モード解析法は非減衰振動の固有振動数・固有モードを利用する方法であり、減衰がある場合には減衰を比例減衰と見なし、モード間の連成を無視して応答を求める方法である。また、Newmarkの β 法は $\beta=1/4$ とし、各解析法の1ステップの時間間隔 h は0.02秒としている。数値計算には八代高専のFACOM230-28を用いた。

5.1 3質点系の弦の振動

図-1では長さ4Lの弦が初期張力Tで引張られ、両端で固定してある。弦は3個の等しい質量を等間隔に支えており質点1にダッシュポットが取付けてある。正弦波外力が質点1に作用している。表-1に非減衰系の固有振動数、表-2に減衰を比例減衰と考えたときの各モードの減衰定数とダッシュポットの減衰係数を表記している。表-3には、1次モードの減衰定数に対するWarburton の判別式の成立状態を記している。また、表-4には減衰を比例減衰と考えたときの減衰定数(ζ)に対応する複素固有振動数とその減衰定数(ζ_c)を1次モードに対して記している。図-2には、各手法で算定した質点1の変位応答を図示している。

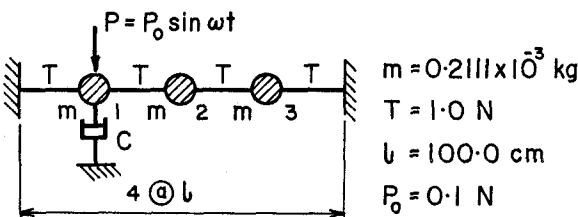


図-1 3質点系のモデル

表-1 非減衰系の固有振動数

次数	固有振動数(Hz)
1	0.8384
2	1.5491
3	2.0241

表-2 減衰定数と減衰係数

ζ_1	ζ_2	ζ_3	C(kg/s)
0.05	0.027	0.021	0.44480×10^{-3}

表-3 Warburton の判定式(式(11))

左辺	右辺	右辺-左辺
0.05	0.121	0.071
0.10	0.121	0.021
0.30	0.121	-0.179

表-4 複素固有振動数(1次)

ζ_1	ζ_{c1}	固有振動数(Hz)
0.05	0.0499	0.8428

5.2 7質点系の弦の振動

図-3のモデルは図-1と同様に弦の振動モデルであり、長さ8Lの7質点系である。表-5には非減衰系の固有振動数、表-6には比例減衰と考えたときの1次モードの減衰定数に対応する減衰係数、表-7にはWarburton の判別式の成立状態、表-8には比例減衰と考えたときの減衰定数に対する複素固有振動数とその減衰定数を記している。図-4には各手法で算定した質点2の変位応答を図示している。

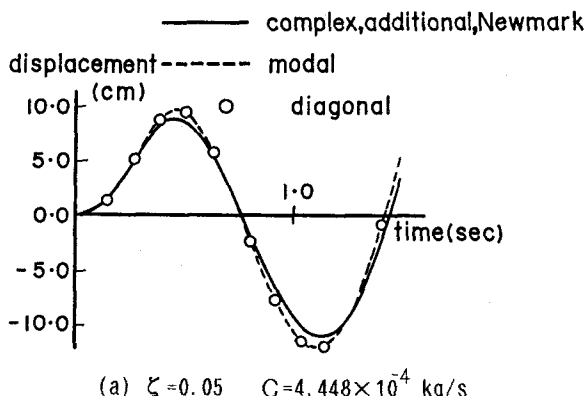
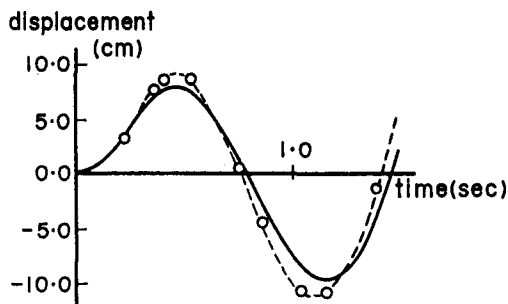
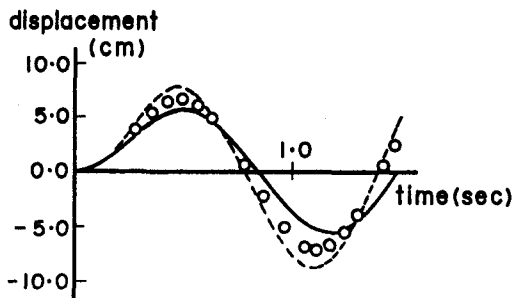


図-2 質点1の変位応答 ($\omega=2\pi \times 0.8384 \sqrt{1-\zeta^2}$)



(b) $\zeta_1 = 0.10$ $C = 8.8962 \times 10^{-4}$ kg/s



(c) $\zeta_1 = 0.30$ $C = 2.66885 \times 10^{-3}$ kg/s

図-2 質点1の変位応答 ($\omega = 2\pi \times 0.8384 \sqrt{1-\zeta_1^2}$)

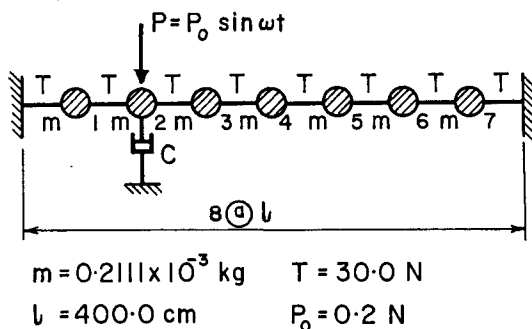


図-3 7質点系のモデル

表-7 Warburton の判定式 (式(11))

左辺	右辺	右辺-左辺
0.05	0.05	0.0
0.10	0.05	-0.05
0.30	0.05	-0.25

5.3 6質点系の弦の振動

図-5は塔と基礎をモデル化したもので、 C_b は基礎の減衰を表わしている。塔の減衰は、基礎の減衰に比べて小さいから零としている。表-9には減衰を無視したときの系の固有振動数、表-10には減衰を比例減衰と考えたときの1次の減衰定数と減衰係数、表-11にはWarburtonの判別式の成立状態、表-12には比例減衰と考えたときの減衰定数とそれに対応する複素固有振動数とその減衰定数を記している。質点1に正弦波外力を作用させたときの質点1の変位応答を図-6に図示している。

表-5 非減衰系の固有振動数

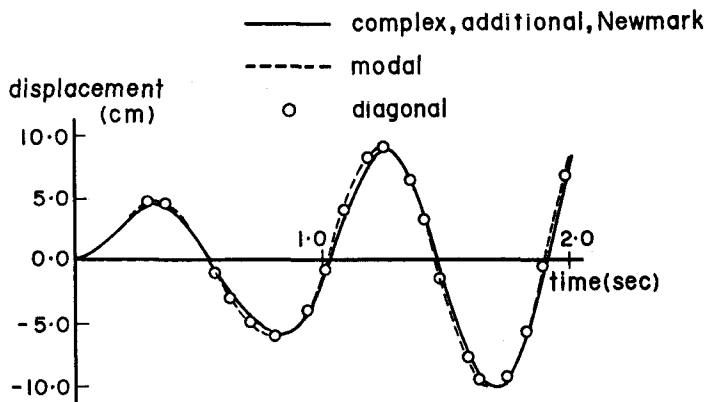
次数	固有振動数 (Hz)
1	1.170
2	2.296
3	3.333
4	4.424
5	4.988
6	5.543
7	5.884

表-6 減衰定数と減衰係数

ζ_1	C (kg/s)
0.05	1.242×10^{-3}

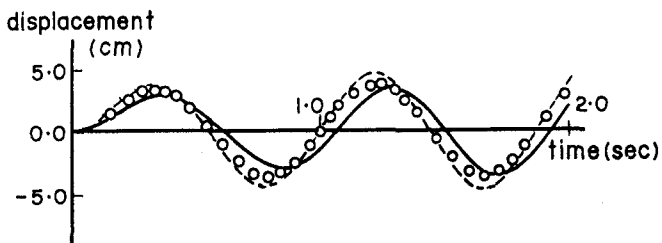
表-8 複素固有振動数 (1次)

ζ_1	ζ_{c1}	固有振動数 (Hz)
0.10	0.0987	1.196



(a) $\zeta_1 = 0.05$ $C = 1.24204 \times 10^{-3}$ kg/s

図-4 質点2の変位応答 ($\omega = 2\pi \times 1.170 \sqrt{1-\zeta_1^2}$)



(b) $\zeta_1 = 0.05$ $C = 7.45224 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$

図-4 質点2の変位応答 ($\omega = 2\pi \times 1.170\sqrt{1-\zeta_1^2}$)

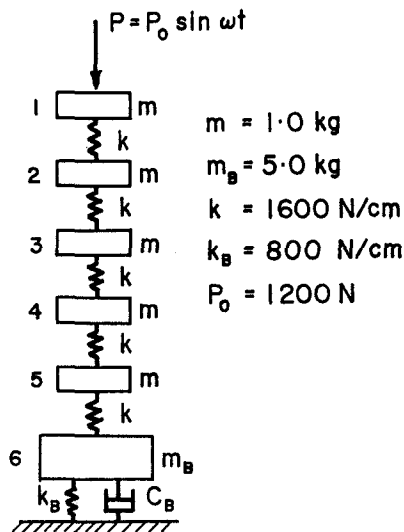


図-5 塔-基礎の振動モデル

表-9 非減衰系の固有振動数

次数	固有振動数 (Hz)
1	1.107
2	2.582
3	5.072
4	8.025
5	10.522
6	12.162

表-10 減衰定数とダンパー

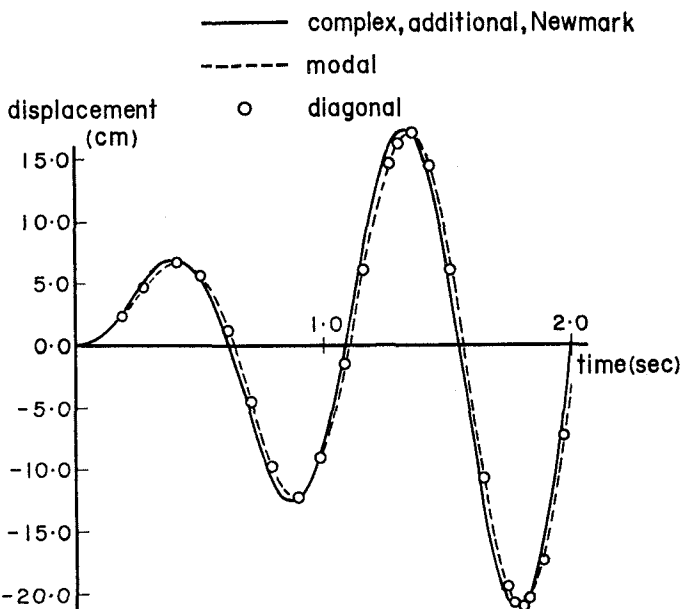
ζ_1	C_B (Kg/s)
0.05	19.362

表-11 Warburton の判別式 (式(11))

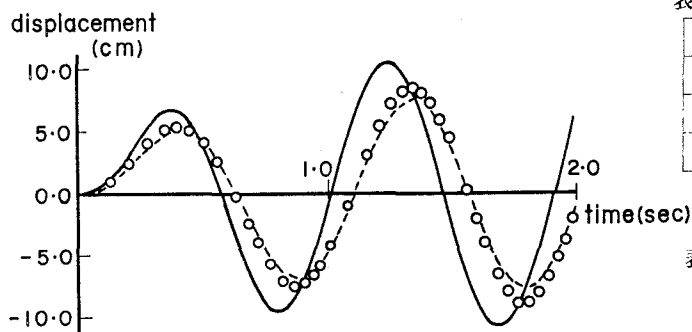
左辺	右辺	右辺-左辺
0.05	0.059	0.009
0.10	0.059	-0.041
0.30	0.059	-0.241

表-12 複素固有振動数 (1次)

ζ_1	ζ_{B1}	固有振動数 (Hz)
0.10	0.0995	1.1261



(a) $\zeta_1 = 0.05$ $C_B = 19.362 \text{ kg/s}$



(b) $\zeta_1 = 0.30$ $C_B = 116.172 \text{ kg/s}$

図-6 質点1の変位応答 ($\omega = 2\pi \times 1.107\sqrt{1-\zeta_1^2}$)

6. 比例減衰と非比例減衰の判定について

式(11)から推察されるように、Warburton の判別式は近接固有振動数が存在する構造物への適用に問題があるが、判別式が有効に使用できるためには、一般的な場合に式(11)が成立する必要がある。表-3、表-7、表-11で式(11)が成立する減衰の場合は比例減衰として扱えるはずであるが、図-2(a)(b)、図-4(a)、図-6(a)では比例減衰と非比例減衰との応答に差異が生じており、Warburton の判別式が適切でないことを示している。もっともこれらのモデルにおいては、 $\varepsilon=0.05$ と固定した値を用いているが、 ε の値をもっと小さな値に取れば、結果的には応答から読み取られる比例あるいは非比例の判別とWarburton の式から得られる判別を一致させることは可能である。Warburton は ε の規定として任意の小さな値としているが、この値を定めるのが難しいようである。Warburton は彼の論文の数値計算において、 $\varepsilon=0.05$ とし計算し、その成立度合から提案式の妥当性を検討しているが、 ε を0.05とする根拠を明らかにしていない。彼の提案している判別式を有効に使用するには、 ε の取り方について、もっと考慮する必要がある。

7. 各解析法の精度

図-1、図-3、図-5のモデルについて、各手法で求められた応答を図-2、図-4、図-6に示している。減衰係数が小さい場合の応答は記していないが、比例減衰と考えた時の減衰定数が $\zeta_1=0.01$ 前後の減衰では、非比例減衰を比例減衰として解いても、応答差は生じないようである。しかし、 $\zeta_1=0.05$ 前後では、非比例減衰を比例減衰と見做して解いた応答に差異が生じている。式(13)のように減衰定数を補正する対角化法は、 ζ_1 が小さい範囲では、 $\Phi^T C \Phi$ の対角要素のみを考慮するモード解析法で求められた応答を補正するような性状を示すが、 $\zeta_1=0.05$ 前後でその補正が適切に行なわれなくなり、応答に誤差を生じている。それに対して、付加外力法、複素モード解析法、直接積分法で求めた応答は減衰の大きさに無関係に一致している。複素固有値解析にはQR法を用いており、複素モード解析法によって得られる応答は正解と考えることができる。

以上のように、対角化法で求められた応答はモード解析で求められた応答を有効に補正するまでには至っていない。それに対して、付加外力法は減衰係数が大きくなっても複素モード解析と一致し、非減衰の固有振動数・固有モードを用いて非比例減衰系の応答を求める解析法としては非常に有効である。非比例減衰系の応答を求める解析法の精度は、本研究で用いたモデルに関する限り、①複素モード解析法、付加外力法、直接積分法、②対角化法、③モード解析法の順と言える。

8. 使用モードの個数とその精度

モード解析法、対角化法、付加外力法、複素モード解析法の各手法で低次のモードを用いて求められる応答の精度を、図-3の7質点の弦モデルについて比較検討している。図-7には、減衰定数 $\zeta_1=0.05$ の場合に各手法で求められた応答を図示している。図中の7、3、1は計算に用いた低次モードの個数を記している。 $\zeta_1=0.10$ の場合も $\zeta_1=0.05$ の場合と同様の傾向を示し、図は省略した。付加外力法の場合、低次のモードを用いて系の応答を精度良く求めることは図から判断する限り可能である。用いるモードの個数と精度の関係は付加外力の算定式、図-7(a)・(b)の比較からモード解析法と同様に考えてさしつかえないであろう。また、複素モードの場合、低次モードを用いて求めた応答の、全モードを用いて求めた応答への収束度合は、図-7(a)と図-7(c)の比較からモード解析法の場合と同程度であることがわかる。これらのことより、非減衰系におけるモード解析法の持つ有効性は、減衰系の付加外力法、複素モード解析法でも成立することが式・数値計算から類推される。

9. 計算時間の比較

モード解析法, 対角化法, 複素モード解析法, 付加外力法に要する計算時間を表-13に記している. 計算時間は, 1ステップの時間間隔を0.02秒とし, 250ステップに要する時間である. また, 非減衰系の固有値解析にはJacobi法を, 減衰系の固有値解析にはQR法を用いた. 表中の15自由度モデルはトラス橋であり, 図示していないが計算時間の比較のためにみに用いている. この例題では, 計算時間はモード解析法, 対角化法, 付加外力法, 複素モード解析法の順に長くなっている.

10. 結論

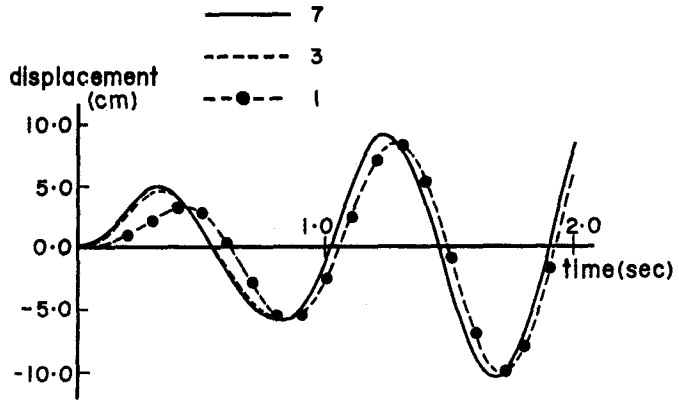
本論文では, 非比例減衰振動系の応答解析法について概説し, 数値計算でそれらの方法の特性を調べた. 以下に, 各方法の特性を列記する.

2, 3提案されている非比例減衰マトリックスの対角化法では, 非比例減衰を正しく評価できない恐れが多分にあり, 使用に疑問を感じる. また, Warburtonの提案式を比例減衰, 非比例減衰の適切な判別法として用いる場合には, ε の値の取り方を考慮する必要がある.

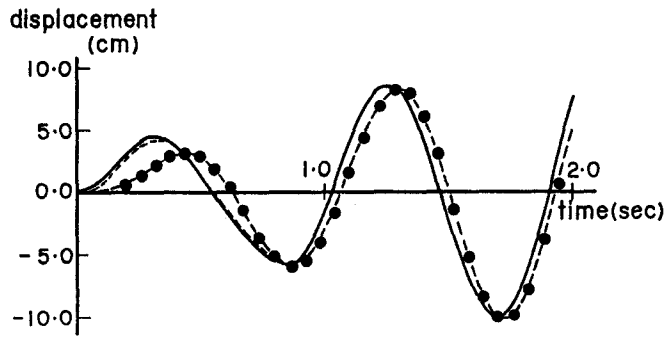
付加外力法は非減衰系の固有値解を使用するため, 固有値解析・応答算定に要する時間は, 複素モード解

表-13 計算時間の比較 (sec)

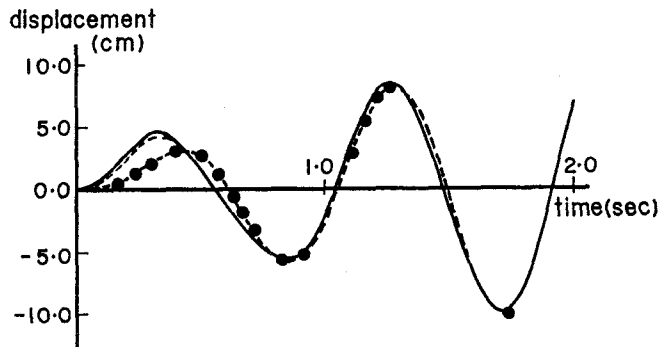
モデル	固有値 解析	複素固有値 解析	モード 解析法	対角化法	複素モード 解析法	付加外力法	Newmark のβ法
3質点	31	45	67	68	86	80	62
6質点	40	56	73	74	105	92	81
7質点	41	57	75	76	114	99	90
15自由度	77	108	109	111	247	158	189



(a) モード解析法



(b) 付加外力法



(c) 複素モード解析法

図-7 低次モード使用時の精度比較

(7質点モデル, $\zeta_1 = 0.05$ $P = 0.2$ N)

析法に比べて少なくすむ。また、非減衰系のモード解析と同様に低次モードを用いる場合でも非比例減衰性を正當に評価できる。このように、付加外力法は応答を時間領域で求める場合には非常に有効な方法であるが、応答を振動数領域で求める場合には一考を要する。

減衰系の固有値解析から得られる複素固有値解を利用する複素モード解析法は、減衰系の応答を正當に評価できるが、固有値解析に要する時間、必要な記憶容量の面で問題がある。しかし、低次の複素モードを用いても正解への収束は十分であり、その程度は非減衰系の固有振動数・固有モードを用いるモード解析法で低次の固有モードを用いて解析した場合の収束程度と同じであった。従って、反復法等により、低次の複素モードを短時間に求めることができれば、複素モード解析法の有用性は高まるであろう。

直接積分法は減衰、非減衰の区別なく応答を算定できるが、自由度が大きくなれば計算時間の面で付加外力法に劣るようである。

以上のことより、非比例減衰系の応答解析において、時間領域の応答を考える場合には付加外力法、振動数領域で応答を考える場合には、複素固有値解析に一考を要するが、複素モード法が適当であろう。本研究で取上げた例のように一見して非比例減衰と判別できる構造モデルの場合には、上式の方法で精度良く解析できるが、現状では減衰のモデル化、減衰の比例・非比例性の的確な判定等が難しく、その方面の研究が必要と考えられる。

謝辞：本論文の作成にあたり、熊本大学宮崎靖男技官には図面の作成、八代高専光永清司技官にはワープロ原稿の作成に協力して戴いた。記して謝意を表する。

(付録)

式(7)で振動数 ω の余弦波外力が作用するときの r 次振動成分に関する式は、次式で表わせる。

$$\ddot{q}_r + \sum_s b_{rs} \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = f_r \cos \omega t \quad (A-1)$$

$$\ddot{q}_r + (b_{rr} + \sum_s b_{rs} \dot{q}_s / \dot{q}_r) \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = f_r \cos \omega t \quad (A-2)$$

一方、対角化された系の r 次の式は、

$$\ddot{q}_r + b_{rr}^* \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = f_r \cos \omega t \quad (A-3)$$

式(A-3)の応答が連成系である式(A-2)の応答と一致するためには、

$$b_{rr}^* = b_{rr} + \sum_s b_{rs} \dot{q}_s / \dot{q}_r \quad (A-4)$$

ここで、 $\dot{q}_s / \dot{q}_r$ の近似が必要となる。

式(A-3)の応答は、

$$q_r = f_r \cos(\omega t - \alpha_r) / \sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (b_{rr}^* \omega)^2} \quad (A-5)$$

$$\dot{q}_r = -f_r \omega \sin(\omega t - \alpha_r) / \sqrt{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (b_{rr}^* \omega)^2} \quad (A-6)$$

ここに、 α_r は位相遅れである。

上式において、共振時($\omega = \omega_r$)の速度応答は、

$$\dot{q}_r = -f_r \omega_r \sin(\omega_r t - \alpha_r) / b_{rr}^* \omega_r = -f_r \sin(\omega_r t - \alpha_r) / b_{rr}^* \quad (A-7)$$

s 次の速度応答は、

$$\dot{q}_s = -f_s \omega_r \sin(\omega_r t - \alpha_s) / \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_r^2)^2 + (b_{ss}^* \omega_r)^2} \quad (A-8)$$

となる。式(A-7)-(A-8)の関係を用いると、式(A-4)は次式で表わせる。

$$b_{rr}^* = b_{rr} + \sum_s [b_{rs} b_{rr}^* f_s \omega_r \sin(\omega_r t - \alpha_s) / \{f_r \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_r^2)^2 + (b_{ss}^* \omega_r)^2} \sin(\omega_r t - \alpha_r)\}] \quad (A-9)$$

いま、上式において、 $\sin(\omega_r t - \alpha_s) = \sin(\omega_r t - \alpha_r)$ 、 $b_{rr}^* = b_{rr}$ 、 $b_{ss}^* = b_{ss}$ とおくと、

$$b_{rr}^* = b_{rr} + \sum_s [b_{rs} f_s \omega_r b_{rr} / \{f_r \sqrt{(\omega_s^2 - \omega_r^2)^2 + \omega_r^2 b_{ss}^2}\}] \quad (A-10)$$

参考文献

- 1) Caughey, T.K.: Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, pp.269~271, June 1960.
- 2) Warburton, G.B. and S.R. Soni: Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.5, pp.365~376, 1977.
- 3) 山田善一, 河野健二: 動的応答解析に及ぼす減衰マトリックスの影響に関する研究, 土木学会論文報告集 第334号, 1983年4月.
- 4) 水田洋司, 平井一男: 付加外力を用いて効率化した一非線形応答解析法, 土木学会論文報告集 第287号, pp.1~9, 1979年7月.
- 5) Foss K.A.: Co-ordinate which Uncouple the Equation of Motion of Damped Linear Dynamic Systems, Journal of Applied Mechanics, pp.361~364, September, 1958.
- 6) Clough R.W.: Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response Jap.-U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969.
- 7) Newmark N.M.: A Method of Computation for Structural Dynamics, Pro. of ASCE, Vol. EM3, pp. 67 ~ 74, 1959.
- 8) Wilson E.L., I. Farhmand and K.J. Bathe: Non-linear Dynamic of Complex Structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.1, pp.241~252, 1973.
- 9) Clough R.W. and S. Mojtahedi: Earthquake Response Analysis Considering Non-proportional Damping, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.4, pp.489~496, 1976.
- 10) 戸川隼人: 有限要素法による振動解析, サイエンス社, pp.98 ~ 102, 172~180, 1976年7月.
- 11) 大崎順彦: 振動理論, 建築構造力学体系24, 彰国社, pp.238~247, 1980年5月.