

変形法による吊橋の影響線手法の適用に関する研究

APPLICATION OF THE INFLUENCE LINE CONCEPT
TO THE DISPLACEMENT METHOD OF SUSPENSION BRIDGES

大 月 哲* 東 原 紘 道**

By Satoshi Ohtsuki and Hiromichi Higashihara

The influence line method is introduced so as to apply the displacement method to the design practice of suspension bridges. The broad applicability of the displacement method enables the designers to try freely various devices and is suggesting that the computation programs for suspension bridges should be based upon this method.

If the influence line method is defined appropriately, the displacement method can be far more efficient in the design process. The influence line method based upon the theorem of Muller-Breslau is confined, however, to a few elementary quantities and is not sufficient for the design purpose. Its modified form which is presented herein can bring any necessary quantities. In order to examine the performance, the newly developed program is applied to the analysis of the secondary stress of the stiffening truss. It is demonstrated that an appropriately linearized displacement method has sufficient precision for complete bridges and the influence line method introduced above succeeds in providing promptly the full informations required for design.

1. はじめに

本研究は、吊橋への変形法の応用という古典的な問題を、設計実務の観点から見直して、効率的な解析手法を提示することを目的とする。

吊橋の歴史は長いが、現在の我が国における研究課題のうちで重要なものは、新たな構造コンセプトの創出であると考えられる。さらに電子計算機の能力の向上をふまえて、設計手続をシステム化することも求められている。後者の直接の効果は主に省力化に認められる。しかしそれは同時に、技術者を機械的な計算の反復から解放してより創造的な作業に精力を注ぐことを可能にするものであり、このことを通じて第一の課題にも効果をもつものである。このようなシステムの中核を成すものは、言うまでもなく、比較的広い適用範囲を有してしかも簡易迅速に結果をもたらす解析プログラムである。そこで、以下では、このプログラムが具備すべき性質すなわち機能要求を定め、それを満足するアルゴリズムを作成する。

吊橋は吊構造という多様な構造グループの中の1つの型式であるが、大スパンの実現という目的および対象とする荷重の性質に鑑みれば、面内骨組構造型式によって、巨大な自重=重力を利用して高い剛性を実現するという方法は、基本線として維持されるべきであると考えられる。そこで以下では専ら面内変形現象のみを対象とする。つまり橋軸直角方向の変形が無視できない現象は、これを基本的アルゴリズムの外に置いて、別に照査することにする。

* 工修 株式会社 長 大 技術開発部 (〒104 東京都中央区湊1-1-12)

** 工博 埼玉大学助教授 工学部建設工学科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保255)

吊橋の面内挙動は最も古典的な問題であり、したがってまた重要な問題である。このため非常に多くの研究がなされている。しかし理論上はともかく設計計算の実務にあつては、古典的なたわみ理論が思いの外に活用されている（もちろんこの場合にも吊材の離散性は忠実に定式化される。以下の記述ではこの離散的なたわみ理論を単にたわみ理論と呼ぶ）。これは、後述するように、たわみ理論の定式化が適切で、鉛直方向の平衡を相当に正しく捉えていることに負うところが大きい。しかしこのモデルは水平方向の平衡を表現することができない。このためケーブルおよび吊材の形態について強い制限を受ける。

面内のすべての変形を考慮するために変形法を適用するというアイデアはきわめて自然であり、事実きわめて早い時期から試みられている（1）。上述のようにたわみ理論の適応性が高いため、変形法の実用上の意義は主として各種スチーおよび斜め吊材に限られる。しかしスチー技術の開発は現代の1つの潮流でもあり、これによって吊橋のアーキテクチャは大きな自由度を獲得する。またトラス型式の補剛材の解析を詳細に行うことも可能となる。また後藤によって提唱された有限変形法は、たわみ理論のモデルをふまえた簡潔な構成をしており、スチーや斜め吊材を効率よく解析できる（2）。

以上のように、変形法は吊橋に対して独特の適応性を有しているにもかかわらず、個々の現象の解析への適用に留まり、設計システムの中核として駆使されるに至らない原因は、作成すべきデータ量が膨大であるということよりも、プログラムの信頼性に対する技術者の不安に由来すると考えられる。これは変形法の出力データ量が非常に大きいため、少々ケーススタディではプログラムの信頼性のテストになってしまい、実際の現象の解明にまで到達しえないこと、また個々の要素における微視的な力学が一挙に最終的な解をもたらす、たわみ理論のようなマクロなもしくは“integral”な力学モデルが介在しないため、技術者の頭の中に力学的イメージが形成され難いことによるものと言える。なぜならこのイメージこそ設計技術のエッセンスだからである。このため変形法の利点を設計手続に反映するためには、変形法によるデータ処理過程の物理的内容を明らかにしてゆくことが不可欠である。この目的のためには、情報密度の高い中間出力量を観察することが効果的である。

この中間出力量として影響線は高い意義を有する。そこで次章では変形法を前提とした影響線の手法について考察する。

2. 設計手続と影響線手法

設計手続は代替案の創出と選択＝意思決定の反復を内容とし、試行錯誤的に適正な設計案が見出されてゆくものである。構造解析はそのループの中の1つのステップを成す。吊橋の設計の基本を与える完成系の照査における設計手続を模式的に示したものがFig. 1である。ここには破線で示される3つのフィードバックループが存在している。ループ3は上述の設計手続の試行過程を示すものである。これに対してループ1と2は構造解析の内部のものである。このうちループ1が剛性の変位依存性に対処するものであり、好んで研究されてきたものである。ループ2は活荷重の載荷パターンを変化させて最大部材力を検索するためのものであり、狭義の構造解析にない、設計手続に独特の処理である。ループ3は他の2つを内に含むが、他の2つの包含関係は必ずしも一定しない。

いま構造物の自由度を N 、荷重の自由度を L とし、さらに設計のために照査すべき着目点の個数を M とする。通常の吊橋では L は、 $N/3$ ないし $N/2$ 程度である。また設計においては M は小さく、しばしば M は1である。これは設計作業の本質に関わることであって、照査とはあくまで案の改良の方向づけを与えるも

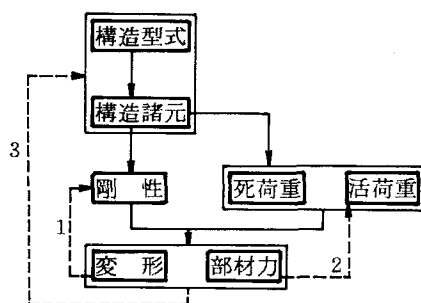


Fig.1 Design Procedures

のだからである。この役割を果たすのはよく絞りこまれた比較的少数の着目量であり、膨大な量のデータは逆効果をもたらすだけである。

一般の処方に従って、剛性の変形依存性による非線形性を反復手法で対処することとして、ループ2を線形問題に限る。この条件のもとでは影響線を利用することができる。これによって、解かれるべきN元連立1次方程式の個数がLからMに減少する。このために影響線を用いる最大部材力検索の利点は、吊橋にあっては維持される。

有限変形法による吊橋の影響線解析については、山村・長谷川による研究がある(3)。これは影響線を求めるのにMüller-Breslauの定理を利用する。この原理によると、互いに乗ぜられて仕事となる1組の力Fと変位Dを考えると、着目点においてD方向の部材力に1の差が生じるように荷重を与えた時の変形図がDの影響線を与える。また着目点においてF方向に-1の変位差を生じるように強制変位を生じる時の変形図がFの影響線を与える。山村らはこの原理を忠実に適用している。すなわち部材力(軸力、せん断力、曲げモーメント)の影響線を求めるために、上述の仮想的変位を与え、これが惹起する仮想外力を計算する。そしてこの仮想外力に対する変位を求めて影響線を得ている。

Müller-Breslauの定理は相反作用の定理から簡単に証明されるものであり、理論的にはその適用は妥当である。しかし上述の研究における仮想外力の導出は相当にわずらわしく、ルーチンワーク的な処理に適していない。また部材が初期軸力を有する場合などやや複雑な問題への対応も困難である。このため、変形法がもつ適用範囲の広さとその手軽さという利点が十分に発揮されない憾みがある。

そこで、変形法の利用を前提とする場合には、Müller-Breslauの定理を、次のような形で表示するのが便利である： 任意の着目量sの影響線は、sを変形{u}で表示したときの係数ベクトル{a}を荷重とするその系の変位で与えられる。

なぜなら $s = \{a\}^t \{u\}$ とすれば、sの影響線{s}は $\{s\}^t = \{a\}^t [K]^{-1}$ と表わされるので、結局次式が成り立つからである。

$$[K] \{s\} = \{a\} \quad (1)$$

ここに、[K]は系の剛性マトリックスであり、右肩のtは転置を表す。

ベクトル{a}は山村らが求めた仮想外力と同じ内容をもつものである。しかしこれは要素剛性マトリックスから簡単に取出すことができる。計算に際しては要素剛性マトリックスを定義するサブプログラムに指令するだけでよい。ベクトル{a}は上述の部材力のみならず支点反力、さらには任意の部材の端部応力など所要の量に対して簡単に定義され、したがって影響線も容易に得られる。換言すれば、格点のみに載荷される通常の系に対しては、式1はMüller-Breslauの定理の拡張になっている。また格点と格点の中間に分布する荷重に対しては、通常の橋梁構造では、上記の離散的な影響線を直線補間すればよいことは明らかである。またそれぞれの部材を仮想的に細分してゆくと、その極限においては、式1は本来のMüller-Breslauの定理に一致することも容易に証明される。式1による解法の組み立ては日月の創始にかかるものであるが、これによって設計計算は著しく機動性に富むものとなる。

基本関係式(1)は連続変量の場に対しても拡張できる。すなわち

$$s_x = M_x \{u_x\}, \quad f_x = L_x \{u_x\} \quad \text{とする。} \quad (2)$$

ここにMとLは線形演算子であってLは自己共役とする。fは荷重である。

するとsの影響関数S(x; y)は $S(x; y) = M_y \{G(y; x)\}$ であたえられる。(3)ここにxは作用点でありyは着目点である。またGは演算子Lのグリーン関数であって、

$$L_x \{G(x; y)\} = \delta(x-y) \quad (4)$$

このとき、Gの対称性によって、 $L_x \{S(x; y)\} = M_y \{\delta(x-y)\}$ 。(5)

特にMが有界演算子であれば、ヒルベルト空間論のリースの定理によって(4)、ある関数m(x)が存在して、 $L_x \{S(x; y)\} = m(x)$ (6)

これが式1に対応する。(ただしふつうはMは有界でない。この場合には、Sはグリーン関数GにMの共役演算子を施したものとして計算しなければならない。)

4. 数値計算例

前述した山村らの研究においては、変形法にはじめて捉えられるような典型的な現象への適用は試みられていない。これは、線形たわみ理論との対比のもとに、有限変形法の妥当性を確認することに主眼があったためと思われる。本論文では、変形法を適用してはじめて可能になる補剛トラスの忠実な計算を行うことにする。対象とする吊橋の諸元をFig. 2に示す。なお以下で対象とする吊橋は実在するものではないが、その諸元は正式の設計手続によって定められたものであり、現実的なものである。ケーブルの初期張力の水平成分は $2.7 \times 10^4 \text{ tonf}$ である。

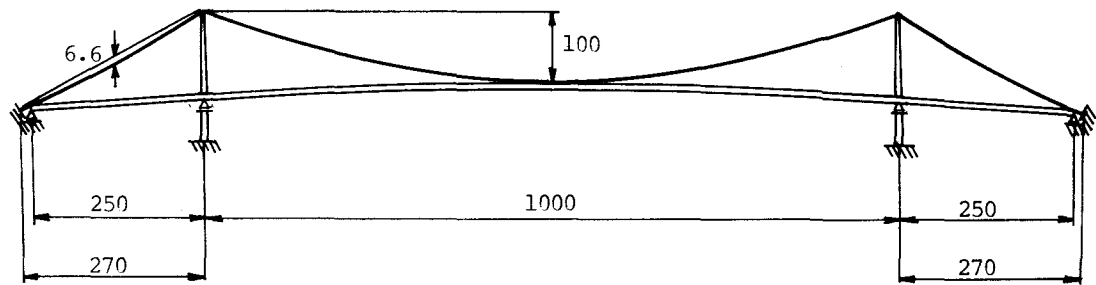


Fig.2 General Geometry of the Model Bridge [m]

補剛トラスの忠実な計算には次のような利点が考えられる。

- (1) 斜材の伸縮を考慮できる。
- (2) 部材力の計算の際に、等価桁からの煩雑な変換が不要である。
- (3) 吊材やスティの取り付けによって生じる水平力の偏心を考慮できる。
- (4) 鉄道併用橋における上下弦材両方への載荷を解析できる。
- (5) トラス支点の偏心の影響を解析できる。
- (6) 現実のトラス部材が格点で剛結されているために生じる2次的な部材力を求める。

このうち1と2はたわみ理論にとって本質的な制約ではない。また3～5の影響は局所的なものである。しかし6の云ゆる2次応力を正確に評価するためには、補剛トラスそのものとしての解析が不可欠である。そこで以下ではこの2次応力の解析を試みることにする。

トラスは全格点に垂直材を有するワーレン型とし2次応力が大きい連続型式を考える。形状の詳細をFig. 3に与える。トラス高は13.0m、パネル長は12.5mである。また設計計算によって定められたトラス部材の断面諸元をFig. 4および表2に示す。Fig. 4において部材に付された番号は、表2に示す断面諸元をもっている。ただし垂直材はFig. 4に与えていない。これは側径間のアンカー側支点の直上のみ $E A = 0.87 \times 10^6 \text{ tonf}$ 、

表1 材料定数

ヤング率 (トラス)	$2.1 \times 10^7 \text{ tonf/m}$
ヤング率 (ケーブル)	$2.0 \times 10^7 \text{ tonf/m}$
断面積 (ケーブル)	0.61 m^2
断面積 (吊材)	0.07 m^2
単位重量 (ケーブル)	4.7 ton/m
単位重量 (吊材)	0.04 ton/m
熱膨張係数	1.2×10^{-5}

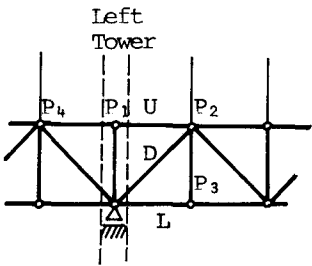


Fig.3 Members of the Truss

$EI = 0.97 \times 10^5 \text{ ton f} \cdot \text{m}^2$ の部材で、他はすべて $EA = 0.67 \times 10^6 \text{ ton f}$, $EI = 0.38 \times 10^5 \text{ ton f} \cdot \text{m}^2$ の部材である。

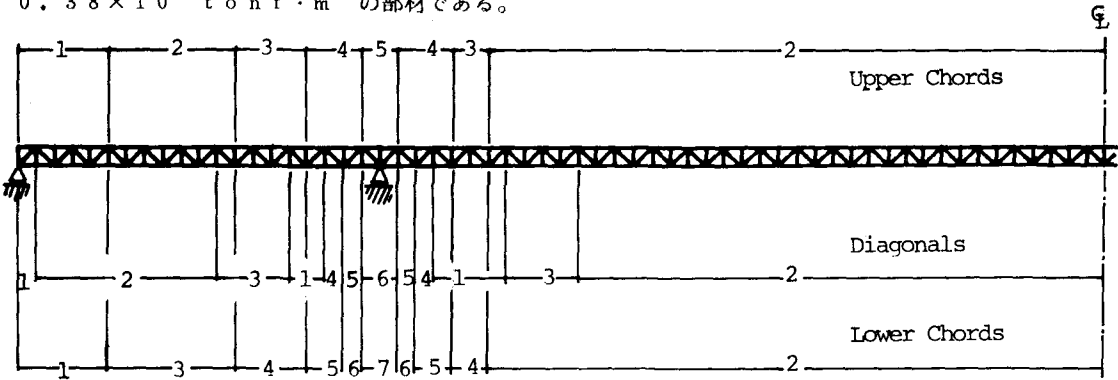


Fig.4 Size Codes of the Truss Members

表2 部材の剛性

(1) 影響線の考察
以下では2次応力の発生が著しいと考えられる主塔直近のトラス部材に着目する。これらはFig. 3においてU, D, Lで示されている。これらの影響線をFig. 5～Fig. 7で示す。

番号	上 弦 材		下 弦 材		斜 材	
	EA	EI	EA	EI	EA	EI
1	1.59	0.14	1.53	0.15	1.59	0.14
2	1.96	0.17	1.90	0.19	1.11	0.09
3	2.35	0.21	2.09	0.21	1.41	0.14
4	3.24	0.38	2.54	0.25	2.20	0.22
5	6.27	1.46	2.81	0.35	1.79	0.28
6	—	—	4.72	1.05	2.87	0.48
7	—	—	5.62	1.45	—	—

(単位は、 $EA = 10^6 \text{ ton f}$, $EI = 10^6 \text{ ton f} \cdot \text{m}^2$)

これらの図中の破線は、トラスの格点が理想的なヒンジであるばあいの結果である。これらは補剛材に作用する曲げモーメントもしくはせん断力に比例する。実際、いま対象としている橋の補剛トラスと同一の曲げ剛性を有する等価桁に対して線形たわみ理論を用いるとほとんど同一の結果が得られる。

次に補剛トラスの格点が完全に剛結されている場合の影響線を図中に実線で与える。この場合にはトラス部材に曲げモーメントが作用するため部材軸力に曲げ応力が重ねられる。図中の太線は部材の上縁端の垂直応力であり、細線は下縁端の垂直応力である。ヒンジの場合の解は大略して2本の実線の平均的な値を示しているが、もともと補剛材の剛性に違いがあるので、いくらかのずれが存在する。

さらに載荷される格点が上弦材上にあるか下弦材上にあるかによっても結果が異なる。ここに示した図は、道路橋の標準形である上弦材載荷の場合を与えている。載荷する部材の違いによる影響線の差をFig. 8に示す。前出の図と同じように破線はヒンジ格点の場合であり、太実線と細実線はそれぞれ部材の上縁端と下縁端の垂直応力を示す。このうち白丸を付したものが上弦材の格点に載荷した場合であり、黒丸が下弦材載荷の場合である。

まず上弦材を考えてみよう。支点の軸線上に荷重がある場合の下弦載荷型式ではもちろん部材力は発生しない。上弦載荷型式ではFig. 3のP₁に荷重があることになるが、ここには斜材がなく、生じる変形はほぼP₁の沈下に局限される。このため上弦材はごく僅かながら伸長する。これはFig. 8(1)の支点上の2つの白丸の平均値の僅かの正值をもたらしている。支配的なのはもちろん曲げ応力である。つまり

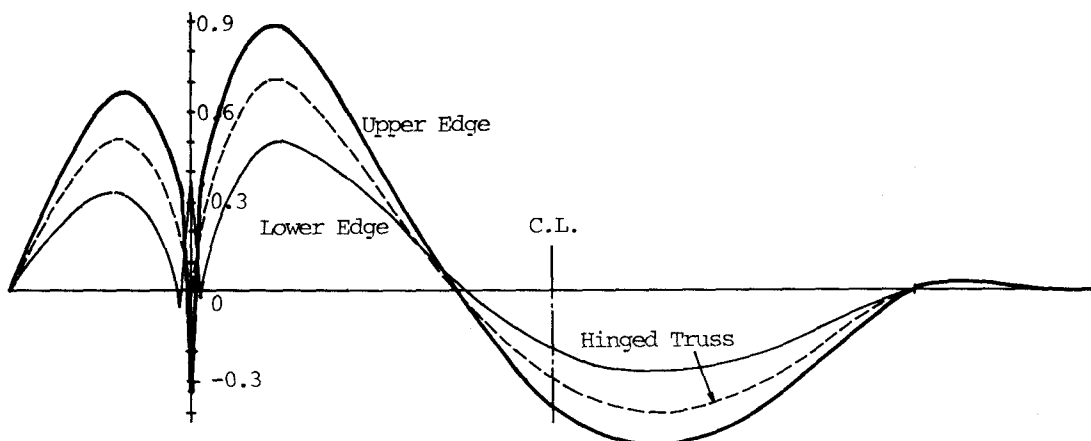


Fig.5 Influence Line of the Upper Chord U [$\text{kgf/cm}^2\text{tonf}$]

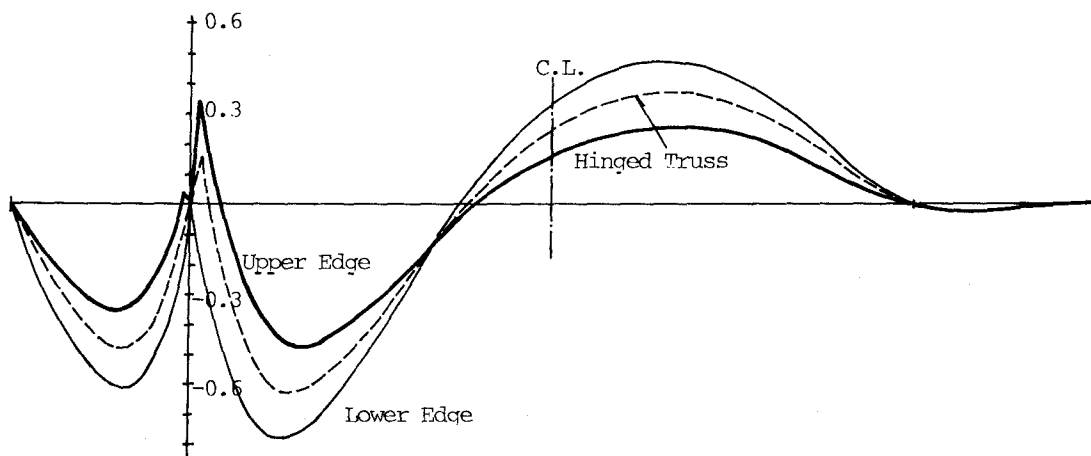


Fig.6 Influence Line of the Lower Chord L [$\text{kgf/cm}^2\text{tonf}$]

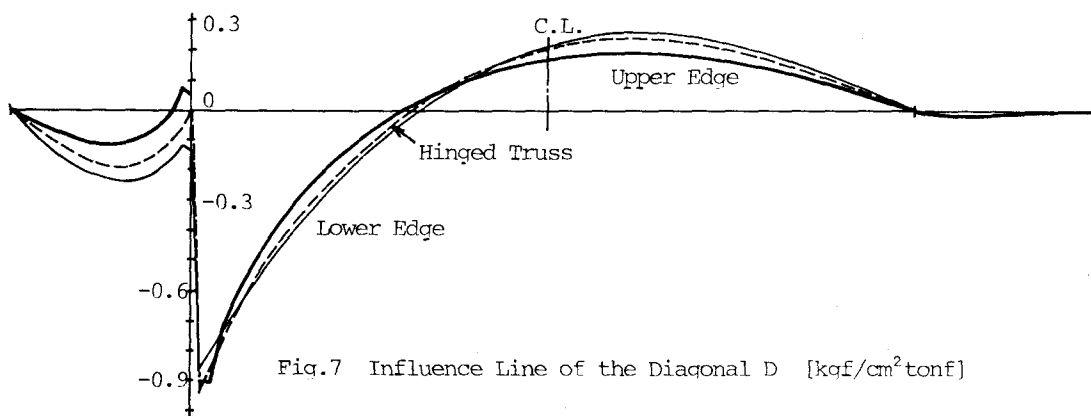


Fig.7 Influence Line of the Diagonal D [$\text{kgf/cm}^2\text{tonf}$]

P_1 点近傍で強く下に凸となるので、上縁端が圧縮力を、下縁端が引張力を受ける。その他の载荷点では上弦载荷と下弦载荷による差はほとんどない。連続桁の中間支点近傍の断面の一般的性質に従って上弦材は引張力を受ける。さらに遠方の荷重に対しては、Fig. 5 の示すとおり圧縮材に転化する。上弦材が引張力を受ける際には P_2 点以外での荷重に対してU部材は上に凸であり、したがって上縁端の方が大きい引張力を受ける。 P_2 点载荷の場合にはU部材の曲率の符号が逆転するが、この場合には P_1 点近傍で強い上の凸が生じるので、やはり上縁端の引張力の方が大きい。

次に下弦材Lを考察する。 P_1 点に斜材がないので、 P_1 点の荷重によってLはほとんど影響されることがない。 P_2 点もしくは P_3 点载荷の場合に限ってはL部材は通常のトラスの下弦材の一般的性質に従って引張材となるが、その他の载荷点に対しては、ちょうどU部材と逆になって圧縮力を受け、さらに遠方の荷重に対してはFig. 6 の示すとおり引張材に転化する。また部材自体は上に凸であるので、上縁端に引張力が、下縁端に圧縮力が加わる。特異なふるまいをするのは P_3 点载荷の場合である。これは P_3 点に斜材がないため、 P_3 での荷重によって P_3 点自身が著しく沈下する。この変形に伴ってL部材は変曲する。このうち絶対値が最大の曲率は P_3 ではなく支点到現れ、それは上に凸となっている。この結果上縁端には大きい引張力が加わることになる。支点近傍での顕著な上の凸は P_4 点载荷でも生じる。

斜材Dのふるまいは概ね理想的なトラスの場合にちかい。ただし P_2 点での荷重と比較すると、 P_3 点の荷重は、 P_3 点の沈下量を約60%増大するのに伴って、L部材の曲率を約3倍に増大し、さらにD部材を強く変曲させる。D部材の曲率のピークもやはり支付近で生じ、下に凸である。このためFig. 8 (3) の P_3 上の2つの黒丸に差が生じている。 P_4 点の荷重も同様の2次応力を生じる。この場合でもD部材の曲率のピークは支付近で生じるが上に凸である。このため P_4 点载荷とは逆の傾向が生じる。

(2) 部材力の算定

2次応力の程度を見るために実際に荷重を設定して部材力を算定して見よう。本州四国連絡橋公団の規定を参照して表3のような荷重を与える。また温度変化は $\pm 30^\circ\text{C}$ とする。応力の設計値の結果を表4に与える。これには参考のためにたわみ理論の結果をも与える。ヒンジトラスの部材力がすべてたわみ理論を下まわっているのは故あるこ

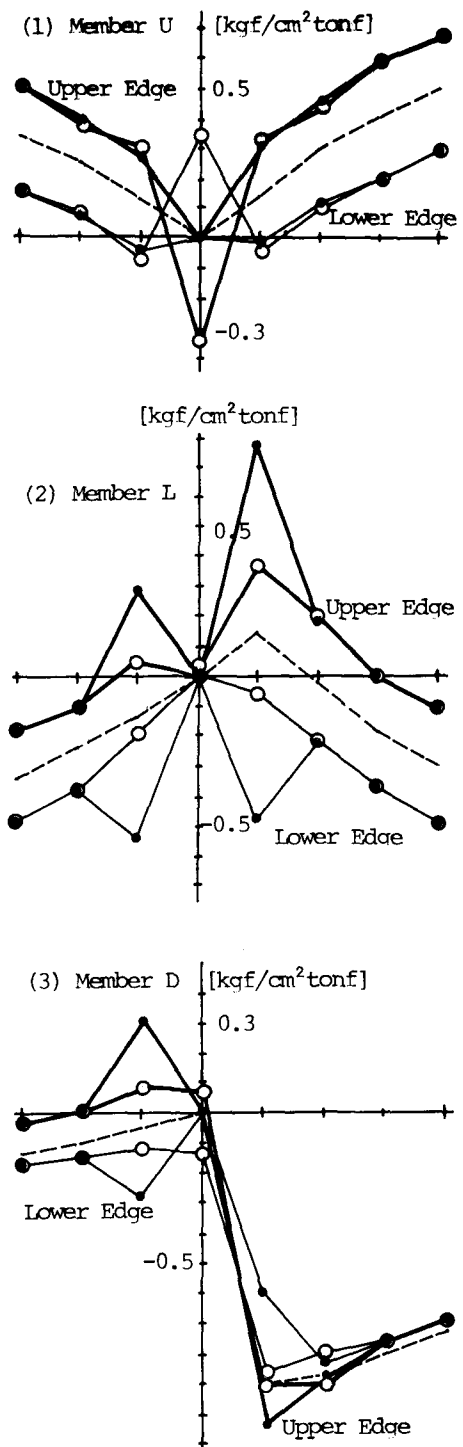


Fig.8 Influence Line near the Left Tower

とで、変形法はたわみ理論では考慮されない剛性をも評価しているため、そのモデルは相対的に高い剛性を具備しているのである。

表4によると、既に前節でも見たように、斜材の曲げは小さくしたがって2次応力は小さい。2次応力は弦材において明確に現れてお

り、概ねたわみ理論の2.5%増、ヒンジトラスの場合の30%増になっている。

表3 荷重条件

集中荷重 (道路)	52.45 tonf
等分布荷重 (道路)	1.661 tonf/m
〃 (鉄道)	4.028 tonf/m

(鉄道荷重の総延長は370m以下とする)

表4 応力の設計値

部 材 名			U		L		D	
部 材	力		引 張	圧 縮	引 張	圧 縮	引張	圧 縮
たわみ理論			1,512	1,143	1,026	1,339	721	1,060
変形法	ヒンジトラス		1,420	1,080	1,004	1,274	678	1,003
	剛	上縁端	1,831	1,385	717	873	549	820
		下縁端	958	741	1,291	1,709	727	1,056
	結							

(単位: kgf/cm²)

(3) 演算の性能

吊橋の剛性マトリックスがケーブル張力の関数であるので、原理的には非線形計算のための逐次近似法が必要であるが、安定系である完成橋に対してはそれを無視することができる。つまり設計実務においては原則として有限変形法の必要はなく、線形計算だけで十分である。このため本論文で展開した影響線の方法はきわめて有効である。因に表4の第1のケースにおけるケーブル張力の増分は、最大値で見ても、線形理論で1,254 tonf、大変形理論で1,241 tonfであって、その差は約1%にすぎず、この時のトラス部材力の最大値の差も2%に留まる。そして当然に線形理論の方が安全側の値を与える。

線形計算で影響線を求め、応力の設計値を計算するのに要するCPU時間は次のとおりである。本章でとりあげた吊橋モデルは格点数363 (ケーブル=121, トラス=242) で、部材数720 (ケーブル=120, 吊材=117, トラス=481, ステイ=2) である。トラス格点がヒンジの場合には自由度は726であり、1つの着目部材に対して影響線を求めて応力の設計値まで得るのに約5秒を費やす。トラス格点で剛結されている場合には自由度は968であり、同じ処理に約7.5秒を費やす。但し使用したのは(株)長大のMELCOM COSMO-800Ⅲである。したがって実務上は計算時間はほとんど問題にならないこと、換言すればデータセットと解釈のための作業がクリティカルになることが窺える。

5. 結 論

変形法を吊橋の設計実務に活用するための条件を考察し、下記の諸点について結果を得た。

- (1) 影響線手法を効率的に、しかも適用範囲の広い型式で定式化した。これによって、Müller-Breslauの定理の範囲にとらわれることなく、任意の部材力の影響線が直接に得られる。
- (2) 上記の理論に従って開発した変形法プログラムを用いて、補剛トラスの忠実な解析を行い、格点の剛結に起因する2次応力の態様について詳細な検討を加えた。
- (3) 得られたプログラムはきわめて高速であり、対話型の設計ツールとしてCADの要素となる。

6. 参 考 文 献

- (1) Saafan, S.A.: "Theoretical Analysis of Suspension Bridges",
Proc. ASCE, Vol.92, ST4, 1966
- (2) 後藤茂夫: "有限変形法による吊橋の解法", 土木学会論文集, 第156号, 1968年
- (3) 山村信道, 長谷川紀夫: "有限変形法による吊橋の影響線解析", 橋梁と基礎, 82-10,
1982年
- (4) 吉田耕作: "ヒルベルト空間論", 共立全書
- (5) 東原紘道, 大月 哲: "吊橋の面内振動における連成現象について", 第28回構造工学
シンポジウム, 1982年