

統計データからの分布形・特性値の決定

DETERMINATION OF DISTRIBUTION MODEL AND CHARACTERISTIC VALUE FROM STATISTICAL DATA

杉山俊幸* 藤野陽三** 伊藤学***

By Toshiyuki SUGIYAMA, Yozo FUJINO and Manabu ITO

Accuracy of several statistical methods commonly used for the determination of distribution model from statistical data is compared by means of Monte Carlo simulation. Method of maximum likelihood, eight kinds of plotting methods in which the data are plotted on probability papers, and Kolmogorov-Smirnov test are chosen for comparison. The result shows method of maximum likelihood among these ten methods is the most stable to various distribution-types, coefficients of variation and data size. Furthermore, it has been revealed that the probability which each of possible distribution models may coincide with true distribution can be approximated by normalized likelihood calculated from the data.

1. はじめに

信頼性解析に際しては、構造物の強度やそれに作用する荷重などの確率変量に関する統計情報が必要とされる。それゆえに、近年、データ収集の努力もなされている。しかし、徐々にデータが集められてきているとはいえ、はたして、有限個のデータからどの程度正確に分布形やそのパラメータ値などが推定できるのだろうか。”任意の確率現象について、その確率密度関数を人類の滅亡以前に同定可能であるというような保証は全然ないのである”と主張する研究者もいる¹⁾。確かに100%正確に確率変数の母集団分布形を推定することは、無限個のデータを必要とするため、永久に不可能であろう。しかし、どの程度のデータがあれば、どれほどの精度で分布形やそのパラメータ値・特性値などを推定できるのか、また、その推定にどのような統計的手法を用いるのが最も適切なのかを検討しておくことは意味のあることと考えられる。それは以下の理由による。

統計データが与えられたとき、想定される幾つかの理論分布形へのデータの適合度を比較し、最も適合度のよい分布形を選び、これに基づいて特性値を決めていくのが特性値推定のための標準的なプロセスである。このための手法としては、統計学の分野で確立している最尤法やKolmogorov-Smirnov法、気象データの統計解析や水文統計学でよく用いられている確率紙を用いたプロット法などがある。このように、一般に用いられている方法は各分野によって異なっており、必ずしも統一されていないのが実情である。信頼性解析

* 工博 山梨大学講師 工学部土木工学科 (〒400 甲府市武田4丁目3-11)
** Ph.D 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7丁目3-1)
*** 工博 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7丁目3-1)

に用いるための確率・統計情報は、できるだけ同一の手法を用いて求めておくのが妥当と考えられる。従って、確率・統計情報を得るための手法としてどの方法が最も適切なのかを検討しておく必要がある。

有限個の統計データから統計的特性（分布形の“型”も含む）を推定するための手法の優劣に関して取り扱った従来の研究には、二重指数分布を仮定した風速の統計データにプロット法を適用した場合の各手法の優劣を比較検討した菊知原の研究²⁾、これとほぼ同様のCunnaneの研究³⁾などがある。そして、菊知原、Cunnane共に、プロット法の中ではHazenの方法が最も精度がよいとの結果を得ている。しかし、これらの研究では、一般によく用いられている最尤法などを対象外とし、また比較検討の方法も必ずしも客観的なものではない。さらに、データ数と各種手法の分布形・特性値の推定精度との関連についても、詳しくは言及されていない。これらの研究とは別に、有限個のデータから最尤法を用いて母集団分布を推定したとき、最適分布と判定された分布形も含めて判定の対象とした各理論分布が、真の母集団分布と一致する確率は、最適分布判定の際に用いられる尤度の比を正規化することにより求められるとしているGrigoriuらの研究⁴⁾がある。しかし、この考え方の妥当性に関する検証はなされておらず、何らかの形で適否を示す必要があると考えられる。

本論文では、最尤法やKolmogorov-Smirnov法、プロット法などの各種統計的手法の分布形・特性値の推定に関する精度の優劣を、モンテカルロ法を用いた数値実験により比較する。また、最も適切な手法を用いた場合の、データ数と分布形・特性値の推定精度との関係について検討する。さらに、Grigoriuらが用いた尤度の比に関する考え方の妥当性についても、モンテカルロ法を用いた数値実験により検証する。なお、特性値の推定精度を比較するのは、構造物の安全性照査に用いられる設計値として、ある特定の超過確率値（あるいは非超過確率値）が採用されていることが多いためである。

2. 現時点で利用可能なデータ数

土木構造物の強度やそれに作用する荷重など、構造物の安全性・使用性に関与する確率変量のデータが現時点ではどの程度存在するのかを調べてみる。

たとえば、福本らは鋼材の機械的性質および各種鋼構造部材要素の抵抗強度に関するデータを、国の内外にわたって収集し解析している^{5)~7)}。その一例を表-1に示すが、これなどは、現時点で集められるデータ数の上限に近いと考えられる。次に、構造物に作用する荷重のデータ数について調べてみると、たとえば、全国136地点の気象観測所の観測記録から各地の年最大風速の分布形のあてはめを行なっている文献⁸⁾では1929年からの観測値を用いており、その数は50個程度である。また、文献⁹⁾、¹⁰⁾によれば、東京における震度V以上の地震の記録は811年以降の16個、京都におけるそれは599年以降の16個である。

以上から、現時点で実際に利用できるデータの個数は、

- ① 鋼材の機械的性質については、数百個のオーダーである^{*)}
- ② 鋼構造部材要素の抵抗強度については概して少なく、プレートガーダーのように十数個の場合もある
- ③ 荷重、特に偶発荷重に関しては、数十個のオーダーである

といえる。従って、信頼性解析を行なうに際して必要な確率変量の統計的特性を、数少ない有限個のデータから精度よく推定することが要求される場合も多い。

表-1 鋼構造部材要素の抵抗強度に関するデータ数 (東海鋼構造研究グループ^{6), 7)}

鋼構造部材 要素名	柱				梁		プレートガーダー	
	圧延I型	圧延H型	溶接H型	溶接箱型	圧延梁	溶接梁	曲げ耐荷力	せん断耐荷力
データ数	440	82	190	42	181	96	15	16

* データバンクに登録されている数のみをさしている。ミルシート値も含めれば、数万個のオーダーになると思われる。

3. 確率分布形・特性値の推定方法の優劣比較

実測データからの母集団分布形の推定に用いられる方法には、以下のものが挙げられる。¹¹⁾

- (a) 実測データを種々の分布形に関する確率紙に経験的累積確率を用いてプロットし、そのプロットしたデータが最もよく適合する分布形を最適分布とする（プロット法）。
- (b) 想定される幾つかの理論分布形への実測データの適合度（goodness of fit）を算出し、最も適合度のよい分布形を決定する（統計的検定法、最尤法）。

本論文では、プロット法、統計的検定法に属するKolmogorov-Smirnov法および最尤法の優劣を、数値実験により明らかにすることにする。具体的には以下のことを行う。

- (i) 確率分布形やその平均値・変動係数などの統計パラメータ値がわかっている母集団から、モンテカルロ法に基づいてデータを有限個作成する。
- (ii) このデータに各種の統計的手法を適用して分布形を推定すると同時に、統計的特性値（たとえば1%（非）超過確率値）を推定する。
- (iii) 推定した分布形および統計的特性値の誤差を調べ、各手法の優劣を比較する。

3-1 分布形推定に用いる統計的手法

- (a) 最尤法 Method of Maximum Likelihood (ML法)

対象とする理論分布形の各々に対して尤度を最大にするように分布形のパラメータ値を決定する。このパラメータ値を用いた分布形に実測データを照らし合わせ、尤度が最も大きくなる理論分布形を最適分布とする方法である。

- (b) プロット法 (PL法)

プロット法とは、得られている実測データとその累積度数（または累積確率）を、特定の確率分布に対応する確率紙上にプロットし、プロットした結果が直線的であるか、直線からはずれているかによって、母集団を支配する分布が確率紙の分布と同じものであるかどうかを判断する方法である。具体的には、

- (i) 実測データを小さい順に並び換える。
- (ii) 各々のデータに累積確率（経験的累積確率）を与えてプロット位置を定め、確率紙上にプロットする。
- (iii) 最小二乗法により各種の統計パラメータ値を求める。
- (iv) どの理論分布が最も適するかを、ある適合度尺度を判定基準にして判定する。

なおここでは、(iv)の適合度として、Powellが定義した

$$E_j = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^j)^2 / n} / (\sum_{i=1}^n x_i / n) \quad (1)$$

n ：データ数， x_i ：並べ換えられた実測データ， x_i^j ：理論分布 $F_j(x)$ による理論値を用い、¹²⁾ E_j が最小となる理論分布 $F_j(x)$ を最適分布とする。

ここで注意しなければならないのは、プロット位置の決め方である。すなわち、経験的累積確率の算定方法に関して幾つかの考え方が提案されており、どの算出方法を採用するかが分布形等の判定結果に少なからず影響を与えるからである。本研究で対象としたのは、表-2に示した8通りの方法である。これらは従来より提案されている幾つかの算定方法のうち代表的と考えられるものである。各々の方法の詳細については文献に^{13)~18)}譲る。

- (c) Kolmogorov-Smirnov法 (K-S法)

統計的検定法と呼ばれる方法には幾つかの手法があるが、そのうち分布形の推定に用いることができるのは、Kolmogorov-Smirnov法(K-S法)である。K-S法は、対象とする理論分布形のパラメータ値を

確率値)を求めて、母集団特性値との二乗平均誤差 R. M. S. (母集団平均値で無次元化した値)を次式により算出し、特性値の推定精度の観点からも各手法の優劣を比較する。

$$R. M. S. = \sqrt{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - X_0)^2 / n / \mu} \quad (2)$$

X_{ij} : i 番目の推定方法による j 回目のシミュレーションでの推定値, μ : 母集団平均値

X_0 : 母集団特性値

なお、シミュレーション数に関しては、1000回程度でその結果が安定してくることが確かめられたため、ここでは1000回としている。

表-3 各手法による100回のシミュレーションでの最適分布形の判定結果の例
(母集団分布形：正規分布，変動係数=0.1，データ数=20)

3-3 数値実験結果および考察

(1) 正答率^{*}の観点からの比較

数値実験結果の一例を示したのが、表-3および表-4である。表-3は、母集団分布が変動係数0.1の正規分布であるようなデータが20個の場合、各手法による100回のシミュレーションでの最適分布形の判定結果を示したものである。また、表-4は、データ数を変化させた場合の、ML

手 法	N	LN	判 定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3
ML	29	20	12	14	5	20
PL-1	26	18	16	15	7	16
PL-2	31	26	8	8	6	21
PL-3	33	26	6	12	2	21
PL-4	31	26	7	10	4	22
PL-5	34	26	6	11	3	20
PL-6	32	26	7	11	3	21
PL-7	0	0	9	0	0	9
PL-8	31	26	7	8	6	22
K-S	29	31	11	11	1	17

表-4 最尤法による100回のシミュレーションでの最適分布形の判定結果の例
(変動係数=0.2)

法による100回のシミュレーションでの最適分布形の判定結果を示したもので、母集団分布の変動係数は0.2である。表-3より、たとえば、ML法で正しくN分布と判定されるのは100回中29回、PL-3法では33回、K-S法では29回であることがわかる。また表-4より、母集団分布がEXT1L分布である場合にデータ数を50, 100, 500と変化させると、ML法で正しくEXT1L分布と判定されるのは、各43回、56回、98回となり、データ数の増加に伴って正しく判定される回数が多くなっているのがわかる。データ数が500程度となるとほぼ正確に分布形が判定されるといえよう。

母集団分布	N	LN	判 定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	35	22	1	1	0	41	ML	50
LN	28	48	0	22	2	0		
EXT1S	1	0	78	0	0	21		
EXT1L	5	32	0	43	18	2		
EXT2	1	8	0	22	69	0		
EXT3	18	6	14	0	0	62		

母集団分布	N	LN	判 定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	67	8	0	0	0	25	ML	100
LN	27	54	0	19	0	0		
EXT1S	0	0	82	0	0	18		
EXT1L	2	23	0	56	19	0		
EXT2	0	2	0	17	81	0		
EXT3	22	0	5	0	0	73		

母集団分布	N	LN	判 定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	97	0	0	0	0	3	ML	500
LN	0	94	0	6	0	0		
EXT1S	0	0	98	0	0	2		
EXT1L	0	0	0	98	2	0		
EXT2	0	0	0	0	100	0		
EXT3	0	0	0	0	0	100		

* 100回のシミュレーションのうち、最適と判定された分布形が母集団分布形と一致した回数をシミュレーション総数(=100)で除した値

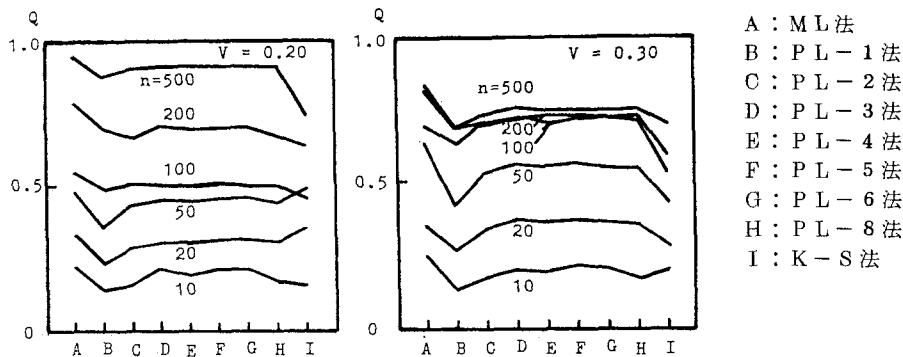


図-1 各手法の正答率 Q とデータ数 n の関係 (母集団分布: 対数正規分布)

また図-1は、各手法の正答率とデータ数との関係を示したもので、横軸に各手法、縦軸に正答率をとってある。代表例として、母集団分布が変動係数0.20および0.30のLN分布である場合を示してある。なお、PL-7法は母集団分布の種類にかかわらず、正しく判定される回数が他の手法に比べて著しく少なかったため、考察の対象から除外している。

以上のような数値実験結果に基づいて、定性的にはあるが各手法の優劣を比較したのが表-5である。表-5(a)はデータ数の多寡に、表-5(b)は変動係数の大小に着目して比較したものであり、他の手法と比較して相対的に優れている場合には○印、劣る場合には×印、どちらともいえない場合は△印が付してある。結果として母集団分布の種類やデータ数、変動係数の大小によって、各々適切とみなせる推定手法が存在するが、いずれの分布形・データ数・変動係数に対しても共通して高い正答率を示しているのは最尤法(ML法)であるといえる。

表-5 正答率の観点からの各手法の優劣の定性的な比較

(a) データ数の多寡に関する比較

手 法	母 集 団 分 布							
	N	LN	EXT1S	EXT1L	EXT2	EXT3		
ML	△	△	△	△	△	△	○	○
PL-1	△	△	△	△	△	△	×	×
PL-2	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-3	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-4	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-5	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-6	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-8	△	△	△	△	△	△	△	△
K-S	○	△	△	×	△	△	△	×

(左欄: データ少, 右欄: データ多)

(b) 変動係数の大小に関する比較

手 法	母 集 団 分 布							
	N	LN	EXT1S	EXT1L	EXT2	EXT3		
ML	△	△	△	○	○	○	○	○
PL-1	△	△	△	×	×	×	×	×
PL-2	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-3	△	△	△	×	×	△	△	△
PL-4	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-5	△	△	△	×	×	△	△	△
PL-6	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-8	△	△	△	△	△	△	△	△
K-S	△	○	△	×	△	×	△	×

(左欄: 変動係数小, 右欄: 変動係数大)

に優れている場合には○印、劣る場合には×印、どちらともいえない場合は△印が付してある。結果として母集団分布の種類やデータ数、変動係数の大小によって、各々適切とみなせる推定手法が存在するが、いずれの分布形・データ数・変動係数に対しても共通して高い正答率を示しているのは最尤法(ML法)であるといえる。

(2) 特性値の推定精度の観点から 表-6 最尤法による100回のシミュレーションでの最適分布形の判定結果

らの比較

(1)では分布形判定の正答率に着目して、各種手法の優劣を比較検討した。しかし、変動係数の値によっては、2種類以上の理論分布がほぼ同様の分布形状をなす場合もある。それを示し

母集団分布	判 定 分 布				手 法	データ数
	N	LN	EXT1S	EXT2		
N	71	29	0	0	ML	500
LN	20	80	0	0		
EXT1S	0	0	66	0		
EXT1L	0	0	0	89		
EXT2	0	0	0	40		
EXT3	0	0	22	0		

(変動係数=0.05)

たのが図-2である。この図は、先に取り上げた6種類の理論分布の上方裾部(図-2(a))および下方裾部(図-2(b))の形状を調べたもので、横軸には

平均値からの隔たり x/μ (μ : 平均値)、縦軸には各々超過確率 $1.0 - F(x)$ 、非超過確率 $F(x)$ をとっている。これらの図より、たとえば下方裾部に着目すると、変動係数 $V = 0.05$ の場合には、N分布とLN分布、EXT1S分布とEXT3分布、EXT1L分布とEXT2分布がそれぞれ、かなり類似した裾部形状を有することなどがわかる。従って、こうした類似性が分布形の判定にも影響を及ぼしてくると思われる。

それを示しているのが表-6である。同表は、データ数が500個のときの、ML法による100回のシミュレーションでの最適合分布の判定結果の一例を示したものである。これより、図-2から読み取れる

表-6 最尤法による100回のシミュレーションでの最適合分布形の判定結果

母集団分布	N	LN	判定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	91	9	0	0	0	0	ML	500
LN	16	84	0	0	0	0		
EXT1S	0	0	91	0	0	0		
EXT1L	0	0	0	92	8	0		
EXT2	0	0	0	21	79	0		
EXT3	0	0	7	0	0	93		

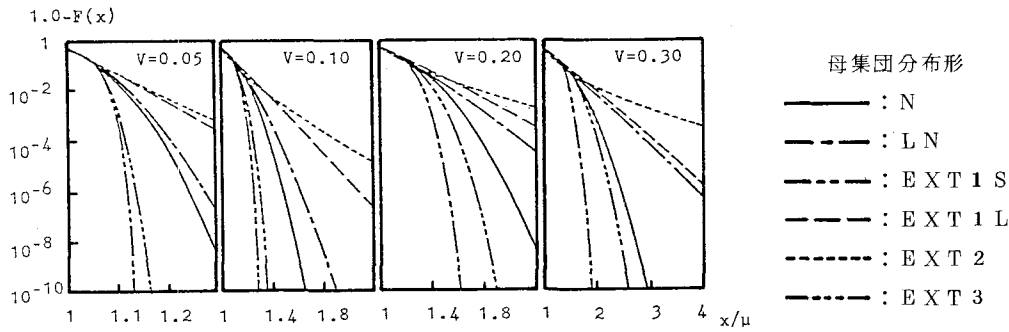
(変動係数=0.10)

母集団分布	N	LN	判定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	97	0	0	0	0	3	ML	500
LN	0	94	0	6	0	0		
EXT1S	0	0	98	0	0	2		
EXT1L	0	0	0	98	2	0		
EXT2	0	0	0	0	100	0		
EXT3	0	0	0	0	0	100		

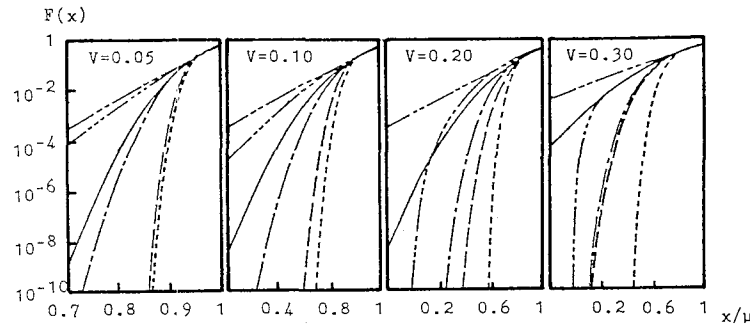
(変動係数=0.20)

母集団分布	N	LN	判定 EXT1S	分 布 EXT1L	EXT2	EXT3	手 法	データ数
N	70	0	0	0	0	30	ML	500
LN	0	83	0	17	0	0		
EXT1S	0	0	100	0	0	0		
EXT1L	0	26	0	74	0	0		
EXT2	0	0	0	0	100	0		
EXT3	13	0	0	0	0	87		

(変動係数=0.30)



(a) 上方裾部の形状

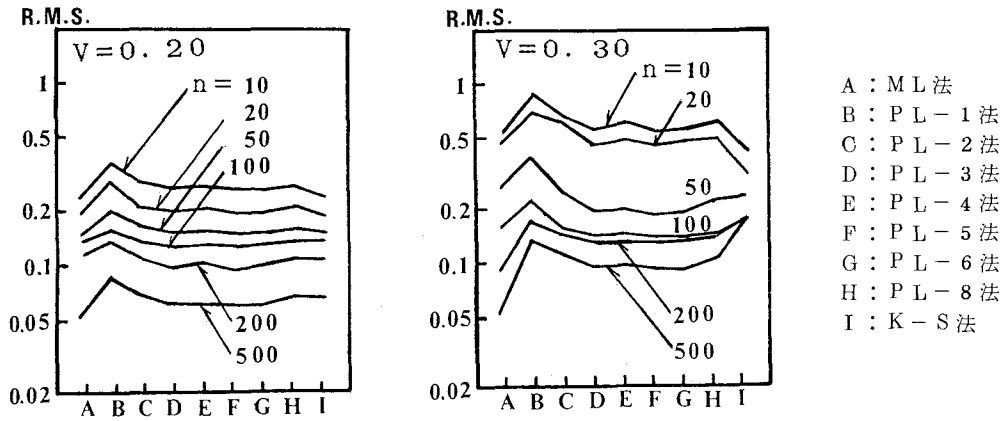


(b) 下方裾部の形状

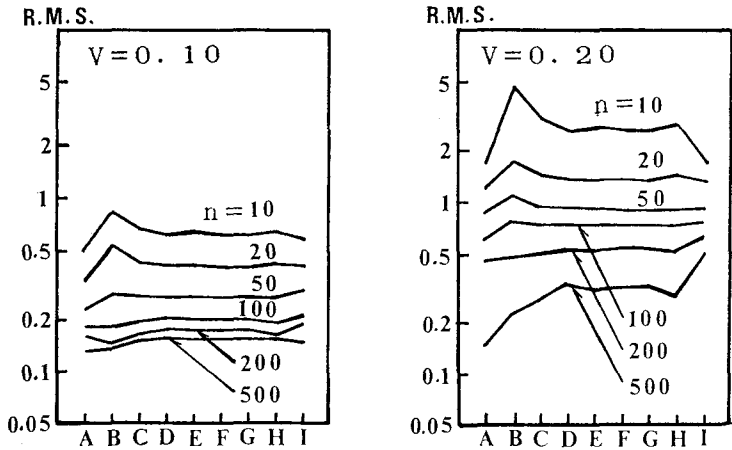
図-2 超過確率 $1.0 - F(x)$ および非超過確率 $F(x)$ と平均値 μ からの隔たり x/μ の関係

裾部形状の類似性に従って最適分布形を判定していることが把握できる。すなわち、データが十分に存在する場合には、仮に分布形の判定を誤ったとしても誤って判定された分布形は、真の分布形と裾部の形状が類似した分布形であるとみなせる。従って、統計的特性値を求めることが最終目標である場合には、分布形自体の判定が正確でなくても、母集団特性値にかなり近い値が得られるものと考えられる。換言すると、各種手法の優劣を比較する場合に、正答率の観点から比較するだけでは十分でないといえよう。そこでここでは、統計的特性値の推定精度の観点からも各種手法の優劣を比較検討することにする。

図-3 (a) は、下方裾部特性値（ここでは0.01%非超過確率値）を各手法で推定したときに、(2)式より算出される二乗平均誤差R. M. S. の値を示したもので、横軸に各手法をとってR. M. S. の大小を比較してある。図-3 (b) は、同様のことを上方裾部の特性値（0.01%超過確率値）の推定に関して示したものである。ここでは、代表例として母集団分布が各々EXT3分布（変動係数0.20および0.30）、EXT2分布（変動係数0.10および0.20）の場合について示してある。これより、ML法のR. M. S. の値が概して小さいこと、また、K-S法のR. M. S. はデータが少ない場合には他の手法と比べて小さいが、データ数の増加に伴って他の手法よりも大きくなっていることがわかる。



(a) 0.01%非超過確率値の推定 (母集団分布：極値3型分布)



(b) 0.01%超過確率値の推定 (母集団分布：極値2型分布)

図-3 各手法による特性値の推定に関する二乗平均誤差R. M. S. (n: データ数)

これらの数値実験結果に基づき、表－５と同様に、特性値の推定に関する各種手法の優劣を定性的に比較したのが表－７である。なお、変動係数の大小の違いによる優劣の差はほとんど認められないため、データ数の多寡に関する比較のみを示してある。

表－７ 特性値の推定精度の観点からの各手法の優劣の定性的な比較

手 法	母 集 団 分 布									
	N	L	N	EXT1S	EXT1L	EXT2	EXT3			
ML	△	△	○	○	○	○	○	○	○	○
PL-1	×	△	×	×	△	×	△	×	×	×
PL-2	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-3	○	△	○	△	○	△	△	△	○	△
PL-4	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
PL-5	△	△	○	△	△	△	△	△	△	△
PL-6	△	△	△	○	△	△	△	△	○	△
PL-8	△	△	△	△	△	△	△	△	△	△
K-S	○	×	○	×	○	×	△	×	○	×

以上をまとめると次のことがいえる。

(左欄：データ少、 右欄：データ多)

(1) ML法は、ほとんどの分布形・

データ数・変動係数に対して、相対的に安定した精度で特性値を推定できる。

(2) 経験的累積確率の算定式の根拠が明確であるため最もよく使われているPL-1法は、特にデータが少ない場合に他の手法と比較して誤差が大きい。これは、データが少ない場合には、PL-1法によって最小のデータに与えられる非超過確率および最大のデータに与えられる超過確率が、他の手法と比較して著しく大きくなるためと考えられる。

(3) プロット法の優劣の差は、データ数が100以上となると、PL-1法も含めてほとんどない。これは、データが多くなると、小さい順に並び換えられたデータに与えられる経験的累積確率が、いずれの方法を用いてもほぼ同じ値となるためである。

(4) データ数が10～50の場合には、一般的にPL-3法、PL-5法、PL-6法がプロット法の中では誤差が小さい。

(5) すべての分布形に対して適切であるとCunnaneが推奨しているPL-8法が特に優れているということはない。

(6) PL-7法は、他の手法と比較して精度は著しく悪い。

(7) K-S法は、一般にデータ数が10～50の場合には相対的に小さい誤差で特性値を推定できるが、データが100以上と多くなると、推定精度が他の手法と比較して悪くなる傾向がある。

以上、分布形判定の正答率および特性値の推定精度の2つの観点から各種手法の優劣を数値実験により比較検討した。その結果、種々の母集団分布形・データ数・変動係数に対して、最尤法は相対的に最も安定した手法であるといえる。なお、プロット法には、表－２からわかるように、ある特定の分布（たとえば極値1型最大値分布）を対象として、その経験的累積確率を算定しているものが多いわけである。そのため、種類の確率分布に対して安定して高い精度で分布形や特性値を推定できないのは当然ともいえる。これに対し最尤法は、個々の理論分布に対して尤度関数が定義でき、その尤度が最大となる分布形を最適分布とするため、任意の確率分布に対し普遍的に適用できる。従って、こうした点からも、母集団分布が未知のデータから分布の型も含めた確率統計情報を得るための手法として、最尤法を用いるのが妥当といえよう。ただし最尤法・プロット法いずれについても、分布形やそのパラメータ値等の推定に際して、個々のデータの持つ重みは同じである。ところが、母集団分布や裾部特性値の推定には、一般に裾部に存在するデータの方が、平均値近傍のデータより大きな影響を及ぼすといえよう。そのため、裾部のデータにはより大きな重みをつける方が推定精度は向上するとも考えられる。この点に関しては今後検討していく必要があると考えている。

4. 最尤法による分布形・特性値の推定精度とデータ数

分布形や特性値の推定に用いられる各種の統計的手法の中では、最尤法（ML法）がいろいろな分布形・

変動係数に対し相対的に最も安定した手法であるとの結果を前節で得た。従って、分布形がわかっていないデータが得られると、ML法を適用して最適分布を推定し、それをもとに特性値を算出することになる。ところでML法の適用により得られる最適分布形や特性値がどの程度の精度で真の母集団分布のそれらと一致するのかは、推定に用いたデータの多寡により異なる。前述したように、分布形の推定精度はデータ数の増加に伴って向上し、特性値の推定誤差はデータ数の増加とともに小さくなる。

信頼性解析に用いられる情報の正確さは、設計値や安全係数の設定にかなり大きな影響を及ぼす。そのため、分布形や特性値の推定精度とデータ数との関係を正確に把握しておくことは重要である。そこで本節では、ML法による分布形や特性値の推定精度とデータ数の関係について考察する。

4-1 分布形の推定精度とデータ数

ML法による分布形の推定で、最適と判定された分布形が真の母集団分布とどのような確率で一致するのか、また、最適以外の分布形が真の母集団分布である確率はどの程度かについて、データ数との関連も含めて検討する。

Grigoriuらは、データからの理論分布の推定に関して次のような考え方をとっている。すなわち、母集団分布として考えられる m 種類の理論分布 $F_i(\cdot)$ [$i=1\sim m$]の各々に関して、尤度 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ が算出されたとき、理論分布 $F_i(\cdot)$ が母集団分布と一致する確率 li を

$$li = \alpha_i / \sum_{j=1}^m \alpha_j \quad (3)$$

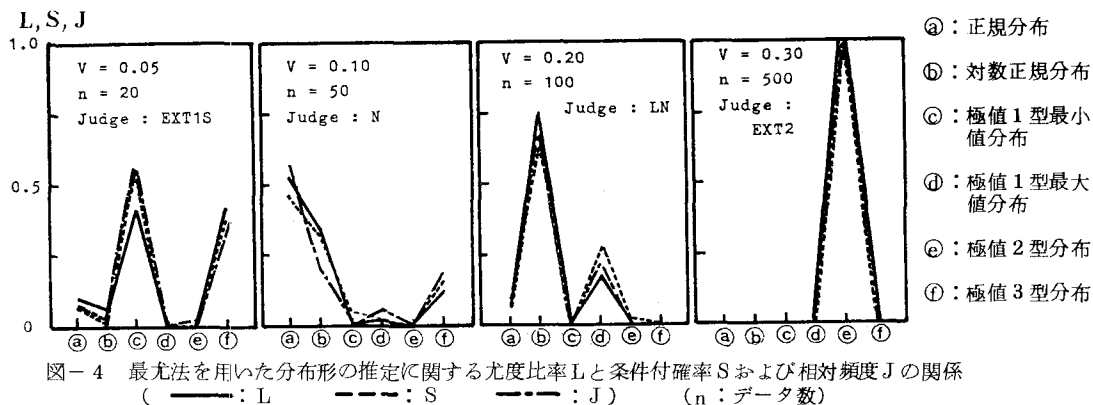
で求めている（以後、 li のことを尤度比率と記述する）。しかし、この考え方が妥当であるとの検証はなされていない。そこで、まず前節で行なったシミュレーション結果を用いて、この尤度比率を用いる考え方の妥当性を検証し、次に尤度比率とデータ数との関連について調べることにする。

6種類の理論分布 $F_i(\cdot)$ [$i=1\sim 6$]に従う母集団から、モンテカルロ法により作成された有限個のデータにML法を適用して最適分布形を判定した結果の一例を表-4に示したが、この表から、判定された分布が真の分布と一致している確率の近似値を以下のようにして求めることができる。例として、データ数が100のときのN分布（変動係数0.20）の場合に着目する。なお前提条件として、母集団分布形であると予想される6種類の理論分布以外の分布形が真の母集団分布であることはないとしている。

「600回のシミュレーションによりN分布と判定されたのは118回（67+27+0+2+0+22）であった。

そのうち、真の分布がN分布でN分布と判定されたのは67回であり、真の分布がLN分布、EXT1S分布、EXT1L分布、EXT2分布、EXT3分布でありながらN分布と判定されたのは、各々27回、0回、2回、0回、22回である。つまり、ML法により最適分布がN分布であると判定されたときにN分布が真である確率、すなわち適中率は、 $(67/118) \times 100 = 57\%$ であるといえる。別の表現をすると、データ数が100の場合にML法によりN分布が最適分布であると判定されたときに、N分布が真である条件付確率は57%、LN分布が真である条件付確率は $(27/118) \times 100 = 23\%$ 、EXT3分布が真である条件付確率は $(22/118) \times 100 = 19\%$ などといえる。」

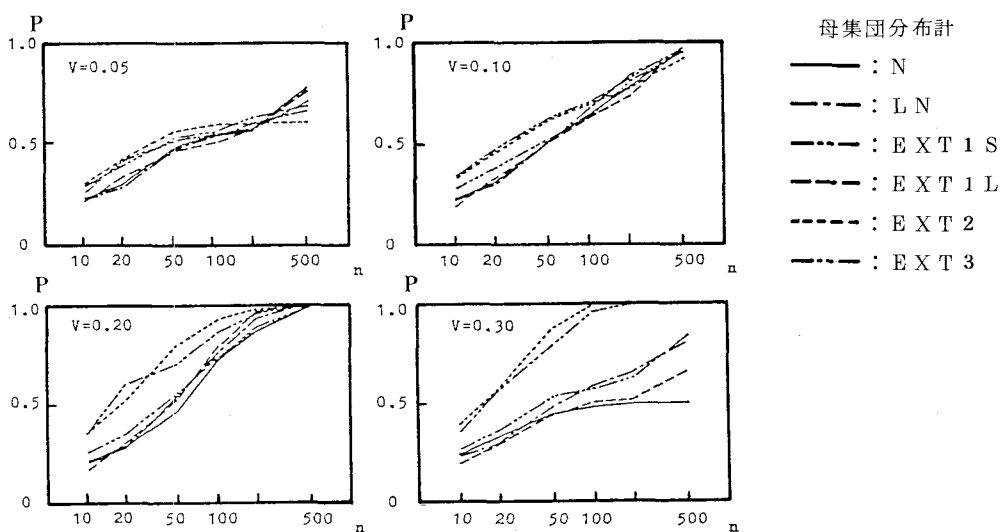
このように考えることにより、先に行なった数値実験から、ML法による分布形推定の際の条件付確率を求めることができる。図-4は、こうして得られる条件付確率と、式(3)で評価される尤度比率とを、判定された分布形別に比較したものである。同図は、横軸に真の母集団分布と考えられる理論分布の種類を、縦軸に条件付確率（破線）および尤度比率（実線）をとっている。ここで尤度比率は、その分布形と判定されたシミュレーション全体（たとえば、N分布と判定されたときは118回）の平均値を用いている。なお図-4には、参考のため、前節で行った母集団分布がわかっている場合の100回のシミュレーションにおいて何回 F_j 分布（ $j=1\sim 6$ ）と判定されたかを示す相対頻度を一点鎖線で描いてある。これより、変動係



数やデータ数に関係なく、いずれの分布形に対しても、条件付確率、尤度比率および相対頻度がほぼ同じ値となっていることがわかる。すなわち、ML法を用いた分布形の推定で、最適合と判定された分布形が真の母集団分布である条件付確率（適中率），あるいは、最適合以外の分布形が真の母集団分布である条件付確率は、式（3）で表わされる尤度比率を用いて算出してよいといえる。

次に、最適合と判定された分布形の適中率とデータ数の関係を、シミュレーションにより求めたのが図-5である。これより、以下のことがいえる。

- (1) 変動係数が0.20および0.30のときにEXT1S分布、EXT2分布と判定された場合を除くと、データ数が50程度のときの適中率は約50%である。
- (2) データ数が200以上で、かつ変動係数が0.10～0.20の場合には、80%以上の適中率が期待できる。
- (3) 変動係数が0.05および0.30の場合には、データ数が100以上となっても、適中率はそれほど高くない。これは、3-3(2)で述べたように、裾部の形状が類似している分布形どうしで互いに他方の分布形と判定されることが多くなるためと考えられる。図には示さなかったが、裾部の形状が類似した分布形の条件付確率を加算すると、変動係数が0.10～0.20の場合の適中率とほぼ同じ値となっている。



4-2 特性値の推定精度とデータ数

3. では、特性値の推定精度という観点から、下方裾部の0.01%非超過確率値および上方裾部の0.01%超過確率値に着目して、各種の統計的手法の優劣を比較した。しかし、実際に信頼性解析を行なっていく上で想定される非超過確率あるいは超過確率の値としては、0.001%~50%程度が考えられる。そこで、ここでは特に裾部特性値の推定という観点から、0.001%、0.01%、0.1%、1%、5%、10%の6個の値に関して、各々に対応する下方裾部および上方裾部の特性値をML法で推定した場合の推定精度とデータ数との関係について検討する。

図-6は、母集団が6種類の理論分布に従う場合の、特性値の推定誤差（二乗平均誤差を母集団特性値で除して無次元化した値）とデータ数との関係を、幾つかの非超過確率に対応する特性値について示したものである。代表例として、変動係数が0.20の場合を示す。なお、母集団特性値が負となる分布形については記入していない。これより、(i) 特性値の推定誤差は、それに対応する非超過確率あるいは超過確率の値が小さくなるほど大きくなっていること、(ii) 推定誤差はデータの多寡によって大きく異なり、たとえば、データ数が100以下の場合に1%以下の（非）超過確率値の推定誤差を±5%以内に抑えることはほとんど不可能であること、などがわかる。また、図-2を参照すると、特性値の推定誤差の大小は各理論分布の裾部がどのような形状を有するかによって判断できることがわかる。すなわち、 $F(x)$ あるいは $1.0 - F(x)$ の値が x/μ の値の変化に敏感である母集団分布ほど推定誤差が小さくなっている。たとえば下方裾部特性値の場合、母集団分布がEXT1S分布のときに比べて、N分布のときの方が推定誤差は小さくなっている。これは、N分布の方がEXT1S分布と比べて、 $F(x)$ が大きく変化しても特性値そのものはさほど変化しないためと考えられる。

図-7は、上方裾部特性値の推定誤差を変動係数別に調べたもので、横軸にデータ数、縦軸に推定誤差をとっている。代表例として母集団がLN分布の場合を示す。同図より、特性値の推定に際して同じレベルの精度を要求する場合には、母集団分布の変動係数が大きいほど多くのデータが必要となることがわかる。

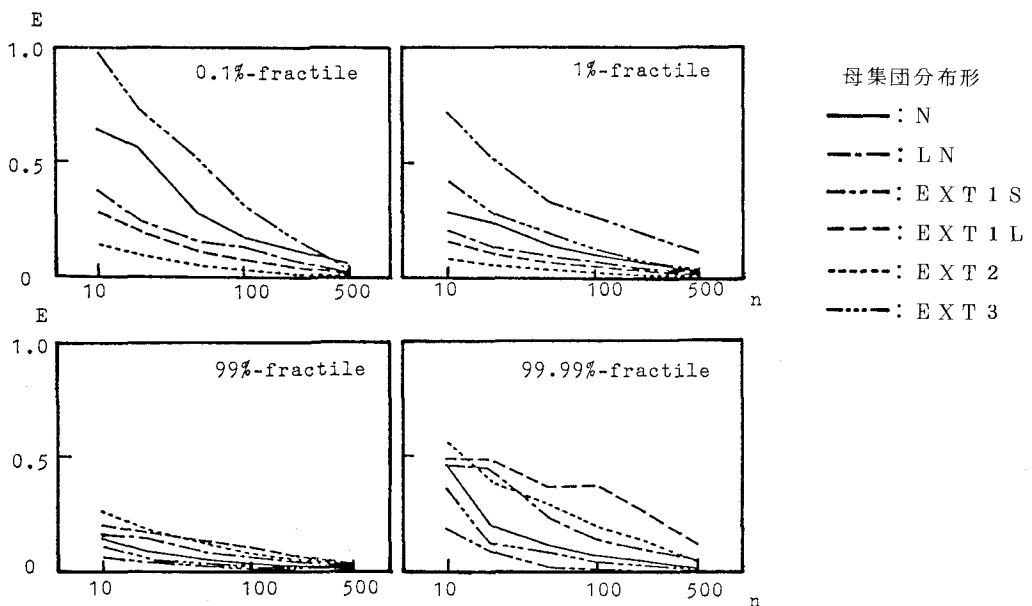


図-6 任意の非超過確率値の推定に関する誤差Eとデータ数nの関係（変動係数V=0.2）

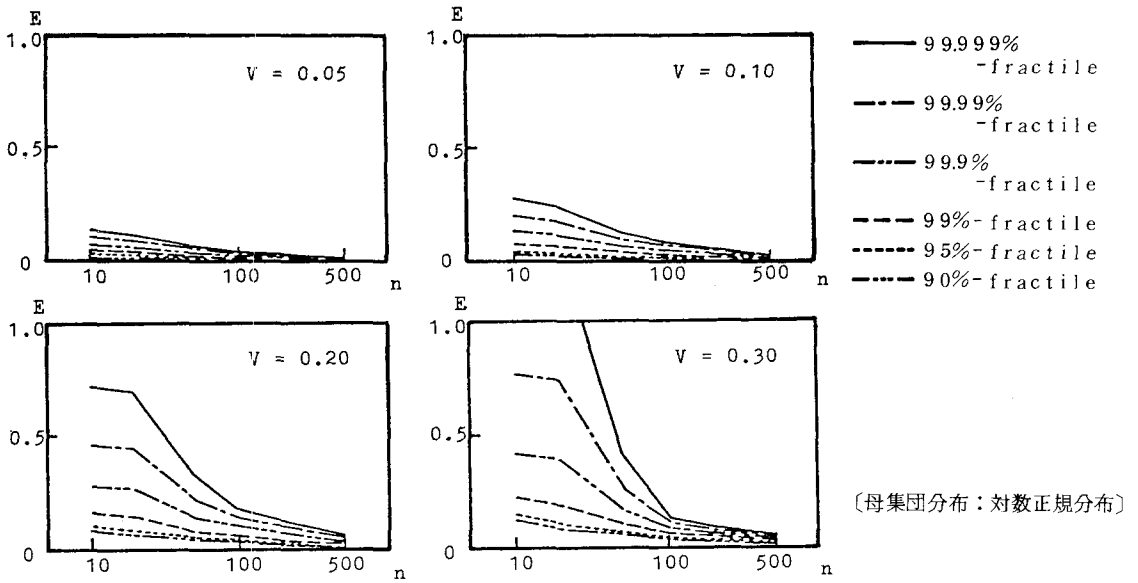


図-7 任意の非超過確率値の推定に関する誤差Eとデータ数nの関係 (V:変動係数)

5. まとめ

モンテカルロ法を用いた数値実験により、有限個のデータから母集団分布の型を含めた統計的特性を推定する手法の優劣を、分布形判定の正答率および特性値の推定精度の観点から比較検討した。その結果を要約すると以下ようになる。

- (1) 種々の理論分布形・変動係数およびデータ数に対して、最尤法が最も安定した手法である。
- (2) プロット法の中では、菊地原やCunnaneが指摘しているように、Hazenの方法が他のプロット法と比較して優れているといえる。一方、プロット法の中で最もよく使われているWeibullの方法は、特に統計的特性値の推定精度の観点から、Hazenの方法と比較して劣る。
- (3) プロット法に関しては、データ数が100以上となると、個々の実測値に与えられる経験的累積確率の値にほとんど差が生じないため、各手法の優劣の差は生じない。
- (4) Kolmogorov-Smirnov法は、データ数が50以下のときには、最尤法やプロット法と同程度あるいはそれ以上の精度で分布形や特性値を推定できる場合も多い。しかし、データがさらに多くなると、最尤法やプロット法と比較して推定精度が悪くなる。
- (5) 最尤法を用いて推定した最適合分布形が真の母集団分布と一致する条件付確率、あるいは最適合分布以外の分布形が真の母集団分布である条件付確率は、最適合分布の判定に際して算出される尤度の相対比率で近似できる。

さらに、最尤法を適用して最適合と判定された分布形が真の母集団分布と一致する確率（適中率）とデータ数との関連および統計的特性値の推定精度とデータ数との関係を定量的に把握することができた。

本論文においては、従来の信頼性解析に関する数多くの研究のほとんどにおいて、わかっているものとして取り扱われている確率変数の分布形やそのパラメータ値・特性値などを有限個のデータから推定する幾つかの方法の優劣およびその精度に関して検討を加えた。有限個のデータから確率・統計情報を得ることは、実際に信頼性解析を行う上での出発点であるにもかかわらず、そのための方法に関しては、これまで十分な検討が必ずしもなされていなかったように思われる。ここで得られた成果が信頼性理論に基づく設計規準を策定していく上での一助となれば幸いである。

参 考 文 献

- 1) 菅野道夫：あいまい集合と論理の制御への応用，計画と制御，Vol. 18, No. 2, pp. 8-18, 1979年2月。
- 2) 菊知原英和：風速の再現期間計算法の比較考察，天気，Vol. 18, No. 1, pp. 21-34, 1971年1月。
- 3) Cunnane, C.: Unbiased Positions - A Review, Jour. of Hydrology, Vol. 37, pp. 205-222, 1978.
- 4) Grigoriu, M., Veneziano, D. and Cornell, C. A.: Probabilistic Modeling as Decision Making, Proc. of ASCE, Jour. of the Engrg. Mech. Division, Vol. 105, No. EM4, pp. 585-596, Aug., 1978.
- 5) 福本秀士，伊藤義人：鋼構造部材の耐荷力評価システムのための数値データバンクの作成と利用，土木学会論文報告集，第312号，pp. 59-72, 1981年8月。
- 6) 東海鋼構造研究グループ：鋼構造部材の抵抗強度の評価と信頼性設計への適用（上），橋梁と基礎，Vol. 14, No. 12, pp. 33-41, 1980年11月。
- 7) 東海鋼構造研究グループ：鋼構造部材の抵抗強度の評価と信頼性設計への適用（下），橋梁と基礎，Vol. 14, No. 12, pp. 38-44, 1980年12月。
- 8) 藤野陽三，伊藤学，酒井利夫：年最大風速記録による設計基本風速の算定に関する研究，土木学会論文報告集，第305号，pp. 23-34, 1981年1月。
- 9) 宇佐美龍夫，久本壮一：東京が震度V以上の地震に襲われる確率，地震研究所彙報，第48巻，pp. 331-340, 1970年。
- 10) 宇佐美龍夫，久本壮一：京都が震度V以上の地震に襲われる確率，地震研究所彙報，第49巻，pp. 115-125, 1971年。
- 11) Ang, A. H. - S. and Tang, W. H. (伊藤学，亀田弘之訳)：土木・建築のための確率・統計の基礎，丸善，1977年。
- 12) Powell, M. J. D.: A Method for Minimizing a Sum of Squares of Non-Linear Functions without Calculating Derivatives, Computer Journal, Vol. 7, pp. 303-307, 1965.
- 13) Weibull, W.: A Statistical Theory of Streory of Materials, Ing. Vet. Ak. Handl., Stockholm, 151, 1939.
- 14) Blom, G.: Statistical Estimates and Transformed Beta Variables, Wiley, New York, N. Y., pp. 68-75 and pp. 143-146, 1958.
- 15) Hazen, A.: The Storage to be provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, Trans. ASCE, pp. 1547-1550, 1914.
- 16) Gringorten, I. I.: A Plotting Rule for Extreme Probability Paper, J. Geophys. Res., 68(3), pp. 813-814, 1963.
- 17) 高橋浩一郎：モンテカルロ法による再現期間と設計荷重に関する研究，Papers in Met. and Geophys., 18, pp. 327-343, 1967。
- 18) California Department of Public Works : Flow in California Streams. Calif., Dep. Public Works, Div. Eng. Irrig., Bull. 5, 1923.
- 19) Borges, J. F. and Castanheta, M.: Structural Safety, PART II, Basic Problem of Structural Safety, pp. 35-59, LABORATORIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL, 2nd Edition, Lisbon, Mar., 1971.