

弾性および塑性解析法の破壊確率による評価

AN EVALUATION OF ELASTIC AND PLASTIC ANALYSES BY THE PROBABILITY OF FAILURE

西野文雄* 佐藤尚次** 山脇良雄*** 長谷川彰夫****

By Fumio NISHINO, Naotsugu SATO, Yoshio YAMAWAKI and Akio HASEGAWA

It is evident that geometrical configurations of structures depend on the method of structural analysis applicable for design, even for a particular loading and constant weight conditions. This paper discusses the elastic and plastic designs from the viewpoint of design efficiency and presents the design scheme to determine the optimal allocation of resistant moments for components of structures. Two criteria, elastic and plastic limits, are used to examine the performance of structures and then the respective probabilities of failure are evaluated. Numerical examples for simple statically indeterminate structures indicate that the plastic analysis method combined with the plastic limit state does not always improve the design efficiency of structures from the probabilistic standpoint.

1. まえがき

構造物の設計を合理化するために信頼性理論を適用する際、安全性評価の基本的な要因として荷重および強度の確率的特性があげられる。これらの性質が明らかにされたとき、安全性の照査は構造物の任意の点の断面力や応力などの力学量を介して行なわれる場合が多い。荷重は構造解析を通してこれらの力学量に変換されるが、この変換は構造解析の手法とともに構造物の幾何学的形状に依存する。

一定の安全性照査の規範が与えられれば、実際の設計における断面決定などの幾何学的形状の決定は構造解析手法に依存する。したがって設計の合理化を議論する場合、荷重および強度の評価とともに、構造解析手法の優劣に関する検討も必要である。

現在、骨組構造物の設計において、構成部材の断面を決めるための手法として一般に弾性理論にもとづく構造解析法（弾性設計と呼ぶ）と単純塑性理論にもとづく解析法（塑性設計と呼ぶ）が使われている。鋼橋梁構造では不静定次数の低さや薄肉大断面が採用される等の背景から現在ほとんど弾性設計が採用されて

* Ph.D.、アジア工科大学副学長（タイ国バンコック市）。（東京大学より海外派遣）

** 工博、東京大学講師、工学部土木工学科（東京都文京区）。

*** 工修、科学技術庁（東京都千代田区）。

**** 工博、東京大学助教授、工学部土木工学科（東京都文京区）。

いるが¹⁾、一方、建築ラーメン、連続はり構造などでは塑性設計が用いられる場合もあり、設計指針も提供されている^{2),3)}。弾性設計を行なう場合でも、モーメントの補正を許す形で単純塑性理論を採用している例もある^{4),5)}。特に近年では耐震設計上の理由から、塑性設計を取り入れる形で建築基準法が改訂されたことで⁶⁾、土木の設計技術者の考え方にも影響を受けている部分が少なからずあるものと思われる。

これらの方法を比較すると、弾性設計では設計された構造物が設計荷重に対しどれだけ余力があるか不明であり、塑性設計では設計荷重が載荷したときに作用する断面力の大きさが明らかでないという特徴がある。一定条件下での耐荷力評価では、単純塑性理論が弾性理論より優れているため、構造物の断面決定および配分のための解析法としても、塑性設計が弾性設計より優れていると考えられている場合が多い。現在弾性設計を許している場合でも、設計論的にそれがよいという理由でなく、実用に便利で大きな不都合はないなどの消極的理由によるものかもしれない。しかし、設計法の立場からのこの2つの解析法の比較が行なわれた例は極めて少ない⁷⁾。

本論文では、実際に起こり得る荷重が載荷された状態に対する信頼性の大きさという立場からこの2つの解析法を比較し、優劣を検討するための方法論を開発する。比較の基準として、与えられた一定の材料と一定条件の荷重載荷のもとで、構造物の破壊確率を小さくする設計が優れているという考え方をを用いる。

安全性照査の点で信頼性理論の成果が有効に反映し得るものの、断面配分を決めるための実際の設計手順は、現状において確定論的な計算であり、今後もその段階で確率論的計算を導入することは難しい。ここでも、弾性設計および塑性設計による断面配分の決定は確定論的に行なう。設計された構造物の破壊確率を評価するときには、本質を失うことなく計算を簡単にするために、確率量として荷重載荷位置と材料強度を選ぶ。

解析法の優劣が不静定次数をはじめとする構造物の形状や特性に依存することは明らかであるが、ここでは土木分野の構造物への応用を考え、数値計算の対象とする構造物モデルとしては、変断面はり構造を用いる。

2. 構造モデルと設計方法

取扱う対象として図-1に示す2径間連続はりおよび先端を支持された片持はりの2種類の構造モデルを考える。

載荷荷重 w は等分布移動荷重とする。等分布荷重の先端位置 ξ はスパン上に一様に分布する確率変量とし、異なる載荷状態は互いに排反であると仮定する。この仮定は、橋梁上に発生する事故を想定している。道路橋のようなものでは、スパン上のどの位置で事故が発生するかは確率的に一樣であり、事故が発生した際には、その位置から一方向に連続して荷重が分布すると考えられる。このような状況は、現実には生ずる載荷状態のうち、最も厳しい荷重条件になると考えてよい。

対象構造の重量が一定の条件のもとで、はりをスパンあたり n 個の要素に等分割する。各々の要素断面における

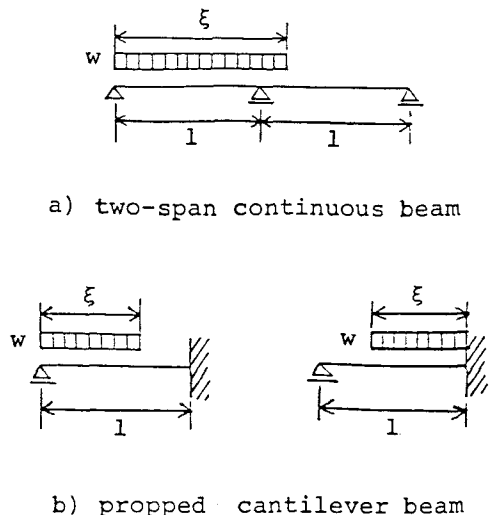


図-1 構造モデル

抵抗モーメントの配分を弾性設計および塑性設計により決定する。

弾性設計および塑性設計を行なうに際し、計算の便宜のため、断面の抵抗モーメントと比例関係にある断面係数および塑性断面係数、曲げ剛性と比例関係にある断面 2 次モーメントは、断面積に比例すると仮定する。断面形状として板厚が板幅に比べて微小と考えてよい 2 軸対称鋼 I 形断面を用い、全スパンにわたって桁高が一定の橋梁を対象とした上で、断面 2 次モーメントにおよぼすウェブ面積の影響を無視すれば、この仮定は妥当である。このとき断面係数と塑性断面係数は一致するため、抵抗モーメントとしての降伏モーメント（弾性設計）と全塑性モーメント（塑性設計）は一致する。この仮定のもとでは、重量が一定の条件は、各要素の抵抗モーメントの総和が一定という条件に等価となる。

抵抗モーメント配分の具体的な手順を述べる。初めに、抵抗モーメントの総和を次のように決定する。等断面を仮定した図-1 の構造モデルに対し、特定の値 w^0 をもつ分割要素単位で離散化された移動荷重モデルの全ての組み合わせを載荷する。このとき、弾性解析から求める i 番目の要素の作用モーメントの絶対値のうち最大の値を $M_{ei \max}^0$ とする。対象とする構造物に対する設計荷重の特性値 M_s^* としては、この $M_{ei \max}^0$ の総和を平均値としたときの変動係数 V_s の p 倍の上界値を選ぶ。

$$M_s^* = (1+pV_s) \sum_i M_{ei \max}^0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

抵抗モーメントの特性値 M_R^* は、要素の抵抗モーメント M_{ri} の総和を平均値としたときの変動係数 V_R の q 倍の下界値を選ぶ。

$$M_R^* = (1-qV_R) \sum_i M_{ri} \quad \dots\dots\dots (2)$$

設計の規範として

$$M_R^* = M_s^* \quad \dots\dots\dots (3)$$

を用いると、式(1)、(2) より、抵抗モーメントの総和として

$$\sum_i M_{ri} = \frac{1+pV_s}{1-qV_R} \sum_i M_{ei \max}^0 = C \quad \dots\dots\dots (4)$$

が得られる。以上の手順により、特定の荷重レベル w^0 に対応した抵抗モーメントの総和が確定し、この値が一定値 C となる条件は、前述のように総重量一定の条件に対応する。

抵抗モーメントの総和が一定のもとで、各断面要素に対する抵抗モーメントの配分を行なう。各要素の断面積が変化する構造物に、考えている移動荷重モデルの全ての組み合わせを載荷し、弾性設計または塑性設計から求める i 番目の要素の作用モーメントの絶対値のうち最大の値を $M_{ei \max}$ とする。

i 番目の要素における抵抗モーメント M_{ri} はこのようにして求めた $M_{ei \max}$ に比例するように配分する。式(4) で与えたように、抵抗モーメントの総和が一定値 C であるという条件から M_{ri} は

$$M_{ri} = \frac{M_{ei \max}}{\sum_i M_{ei \max}} \cdot C \quad \dots\dots\dots (5)$$

で与えられる。式(5) にしたがって各要素の断面を決める際、曲げ剛性が変わると作用モーメントも変化する。そこで、等断面はりを初期値として式(5) の繰返し計算を行なうことによって、各要素における抵抗モーメントをそれぞれ一定値に収束させる。

作用モーメントの絶対値の最大値 $M_{ei \max}$ のはり軸上の分布は、弾性設計と塑性設計により異なり、その結果、抵抗モーメントの分布が変わる。ここでは、弾性設計として、式(5) の繰返し計算を完全に行なっ

た場合と、等断面はりを初期値として1回だけ弾性計算を行ない、その作用モーメントの分布をもとに抵抗モーメントを配分した場合とを考える。前者を逐次弾性設計、後者を逐次計算によらない弾性設計と呼ぶ。逐次計算によらない弾性設計は、現在の設計慣行に比較的近いものと考えてよい。

塑性設計では、対象としている構造物モデルが1次不静定であるので、1つの不静定力を仮定して静定化を行なう。ある載荷状態において作用モーメントの正負の最大値が全塑性モーメントに等しいという条件により、不静定力の値が定まり、崩壊時のモーメント分布が求まる。考えている全ての載荷状態についてこのモーメント分布を計算し、各要素における作用モーメントの絶対値の最大値 $M_{ei\max}$ を求める。この $M_{ei\max}$ の分布をもとに、式(5)により各要素の抵抗モーメントの配分を決定する。この場合も、断面配分により $M_{ei\max}$ が変化するため、逐次計算を行なう。

3. 破壊条件と破壊確率

はり構造モデルの破壊条件として次の2種類の状態を定義する。

- 1) はりの任意の位置で初めて降伏モーメントに達した状態（弾性限界と呼ぶ）。
- 2) 塑性メカニズムを構成した状態（塑性限界と呼ぶ）。

ここでは板要素の局部座屈やはりの横倒れ座屈にともなう先行崩壊は考慮せず、さらにせん断の影響も無視する。

この2つの破壊条件における破壊確率を計算して、抵抗モーメントの配分を決定した弾性および塑性設計法の優劣を比較する。ここでは、一定の重量で構造物を設計したときに、与えられた荷重条件のもとで破壊確率が小さくなる設計を優れた設計と考える。

2. では実際の設計慣行に即し、弾性および塑性設計による抵抗モーメントの配分を確定論的に決定した。破壊確率の検討を問題としているここでは、本質を失わない範囲で定式化を簡単にするため、材料強度すなわち降伏応力のみを確率変数に選ぶ。したがって、 ξ が与えられたときの荷重効果すなわち作用モーメントや幾何学量は確定量として扱う。

抵抗モーメントは幾何学量を介して降伏応力と比例関係にあるため、この仮定は、各要素の抵抗モーメントを確率変数に選ぶことと等価である。ここでは、設計された抵抗モーメントの値 M_{ri} を平均値とし、変動係数が V_R の、各要素互いに独立な正規分布を仮定する。

弾性限界、塑性限界における破壊確率 P_{f1} 、 P_{f2} を計算する手順を考える。弾性限界は構造物を各要素の直列結合としてモデル化することに対応する。塑性限界でメカニズムを構成する状態を考える際には、全塑性モーメントが作用すれば、どの要素でも塑性ヒンジが生成するものとする。

はり構造モデルのスパンを1とする。等分布荷重 w の載荷長 ξ は、図-1に示すように、2径間連続はりに対しては $0 \leq \xi \leq 2$ 、先端を支持された片持ちはりでは $0 \leq \xi \leq 1$ を2通り考える。一様分布を仮定しているため、いずれの場合も ξ の確率密度関数 $f_\xi(\xi)$ は次式で表わせる。

$$f_\xi(\xi) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (6)$$

確率的に独立な、 m 個（ただしこの場合 m は連続はりにおいて $2n$ 、片持ちはりにおいて n ）の構造要素からなる構造物モデルにおいて、ある ξ が与えられたときにどの要素 i でも抵抗モーメント M_{ri} が作用モーメント M_{ei} を下回らない確率を $R_0(\xi)$ とすると、

$$R_0(\xi) = \prod_i \{1 - F_i(M_{ei})\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$F_i(M_{ei}) = \int_0^{M_{ei}} f_i(x) dx \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 f_i 、 F_i は要素 i での抵抗モーメント M_{ri} の確率密度関数、確率分布関数を表わす。作用モーメント M_{ei} は ξ の関数であり、近似的に要素中点での値をとる。これより、ある ξ における弾性限界での破壊確率 $P_{f1}(\xi)$ は、

$$P_{f1}(\xi) = 1 - R_0(\xi) \quad \dots\dots\dots (9)$$

構造モデルの破壊確率 P_{f1} は全ての ξ について式 (6) の頻度のもとに式 (9) を積分することにより、

$$P_{f1} = \int_{\xi_l}^{\xi_r} f_{\xi}(\xi) P_{f1}(\xi) d\xi = \frac{1}{2Q} \int_{\xi_l}^{\xi_r} P_{f1}(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。ここで積分区間は連続はりで $\xi_l = \xi_0^{2\phi}$ 、片持ちはりで $\xi_l = \xi_0^{\phi} + \xi_0^{\phi}$ である。

塑性限界における破壊確率を計算するためには、ある 1 つの要素で塑性ヒンジが生じたことによるモーメントの再分配後の作用モーメントを考慮しなければならない。ある ξ を与えたときに、弾性状態における k 番目の要素の作用モーメントを M_{ek} とする。この要素の抵抗モーメント x が $0 \leq x \leq M_{ek}$ の値をとるときには、ここに塑性ヒンジが発生し、値 x の塑性ヒンジが生ずる確率密度は $f_k(x)$ である。この塑性ヒンジによるモーメントの再分配後の i 番目 ($i \neq k$) の要素の作用モーメントは x の関数となり、これを $M_{ei}(x, k)$ とすると、2 つ目の塑性ヒンジが生成しない確率は

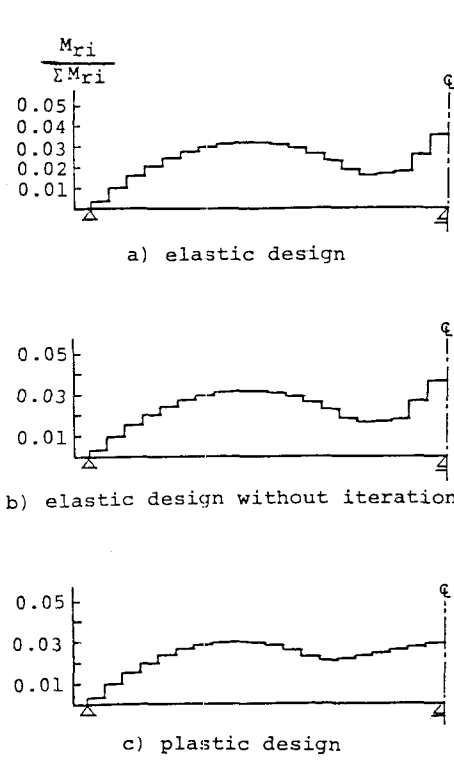


図-2 2 径間連続はりに対する抵抗モーメントの配分

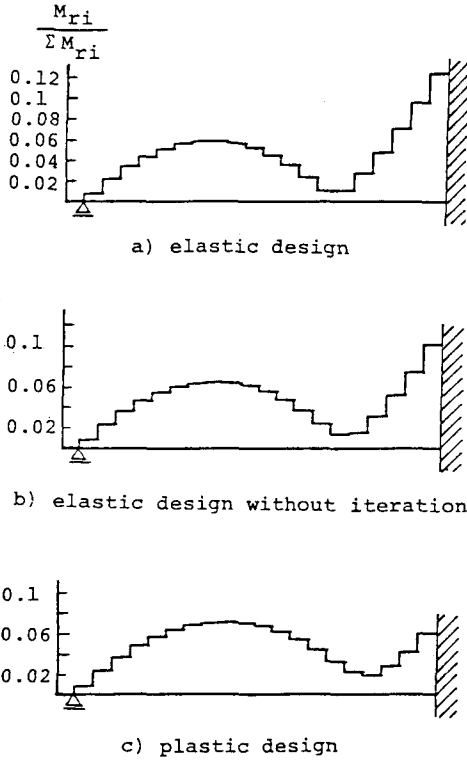
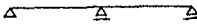
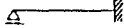


図-3 先端を支持された片持ちはりに対する抵抗モーメントの配分

表-1 破壊確率 Pf1およびPf2

Structural Model	Design Method	Elastic Limit Pf1		Plastic Limit Pf2	
		n=10	n=20	n=10	n=20
	a) Elastic Design	7.53×10^{-3}	1.52×10^{-2}	1.22×10^{-3}	3.17×10^{-3}
	b) Elastic Design without Iteration	7.58×10^{-3}	1.53×10^{-2}	1.24×10^{-3}	3.07×10^{-3}
	c) Plastic Design	9.85×10^{-3}	2.02×10^{-2}	6.56×10^{-4}	1.92×10^{-3}
	a) Elastic Design	6.66×10^{-4}	1.94×10^{-3}	1.09×10^{-4}	3.00×10^{-4}
	b) Elastic Design without Iteration	6.34×10^{-4}	1.37×10^{-3}	1.44×10^{-4}	2.33×10^{-4}
	c) Plastic Design	1.67×10^{-3}	3.37×10^{-3}	1.34×10^{-4}	3.40×10^{-4}

$$\prod_{i=k} [1 - F_i \{M_{ei}(x, k)\}] \dots\dots\dots (11)$$

となる。したがって、ある*ξ*において、*k*番目の要素で塑性ヒンジが生成するが、他の要素では塑性ヒンジが生ぜず、メカニズム状態を構成しない確率*R_k (ξ)*は式(11)に*f_k (x)*を乗じ、 $0 \leq x \leq M_{ek}$ で積分することにより、次のように求まる。

$$R_k(\xi) = \int_0^{M_{ek}} f_k(x) \prod_{i=k} [1 - F_i \{M_{ei}(x, k)\}] dx \dots\dots\dots (12)$$

ここで、*M_{ek}*、*M_{ei}*はともに*ξ*の関数である。

塑性ヒンジが1つだけ生成するがメカニズムを構成せず破壊しない確率は*R_k (ξ)*を $1 \leq k \leq m$ で加えたものとなる。塑性ヒンジが1つも生ぜず、破壊しない確率が式(7)より*R₀ (ξ)*で与えられていることに注意すると、ある*ξ*における塑性限界での破壊確率*Pf2 (ξ)*は

$$Pf2(\xi) = 1 - R_0(\xi) - \sum_k R_k(\xi) \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる。構造モデルの破壊確率*Pf2*は式(10)と同様に

$$Pf2 = \int_0 f_\xi(\xi) Pf2(\xi) d\xi = \frac{1}{2l} \int_l Pf2(\xi) d\xi \dots\dots\dots (14)$$

と表わせる。

4. 数値計算例と考察

(1) 数値計算例

断面配分の設計の際の荷重*w⁰*、破壊確率を評価する際の荷重*w*およびスパン長*l*を

$$w^0 = w = 1.0, \quad l = 1.0 \dots\dots\dots (15)$$

として数値計算する。このとき断面配分の設計の際、式(1)、(2)において

$$V_s = V_R = 0.2, \quad p = q = 2 \dots\dots\dots (16)$$

の値を仮定する。

スパンあたりの要素分割数 $n=10$ と 20 について 2. で述べた手順で断面配分を行なった。 $n=20$ のときの結果を、連続はりについて図-2、片持ちはりについて図-3 に示す。図で a), b), c) はそれぞれ逐次弾性設計、逐次計算によらない弾性設計、塑性設計を表す。この結果より、塑性設計は弾性設計に比べ、断面変化が少なく、均等分布に近い傾向を示すことがわかる。

これらの設計法に対し、3. で述べた手順で弾性限界の破壊確率 P_{f1} 、塑性限界の破壊確率 P_{f2} を計算した結果を表-1 に与える。さらに $n=20$ のときの $P_{f1}(\xi)$ 、 $P_{f2}(\xi)$ を、両構造モデルにおける各設計に関し比較したものを、連続はりについて図-4、片持ちはりについて図-5 に示す。

図-4 において、連続はりの弾性設計と塑性設計を比較する。逐次弾性設計と逐次計算によらない弾性設計は、 $P_{f1}(\xi)$ 、 $P_{f2}(\xi)$ とともに相違が小さい。塑性設計では、 $P_{f1}(\xi)$ はあらゆる ξ に対し弾性設計を上回っているが、 $P_{f2}(\xi)$ は $\xi=1$ に近いところで弾性設計の約 $1/2$ と小さく、 $\xi=2$ に近いところで弾性設計とほぼ等しい。

片持ちはりでは、図-5 から $P_{f1}(\xi)$ は同様に、塑性設計が弾性設計を常に上回る。しかし $P_{f2}(\xi)$ は先端から荷重が載荷する場合の $\xi=0.5$ の近くでは塑性設計の方が小さくなっているものの、 $\xi=1$ (満載) に近いところでは塑性設計が弾性設計を上回る。片持ちはりの場合、逐次弾性設計と逐次計算によらない弾性設計の差が若干現われ、塑性限界では、逐次計算によらない弾性設計の $P_{f2}(\xi)$ は常に他を下回っている。

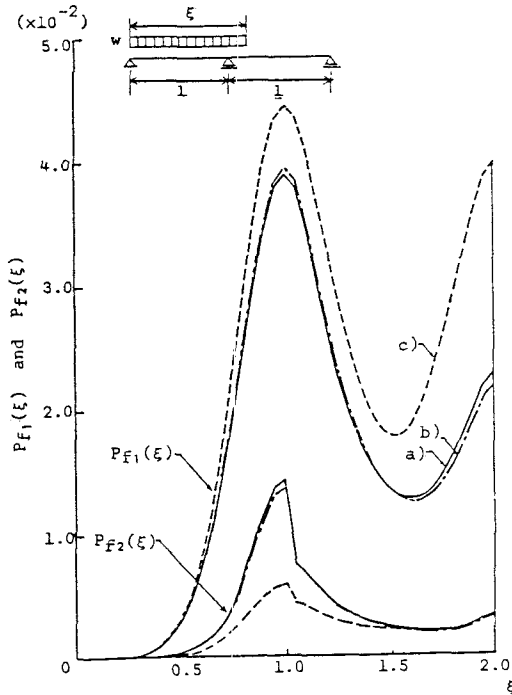


図-4 2 径間連続はりの場合の破壊確率 $P_{f1}(\xi)$ および $P_{f2}(\xi)$

a) : 逐次弾性設計 b) : 逐次計算によらない弾性設計
c) : 塑性設計

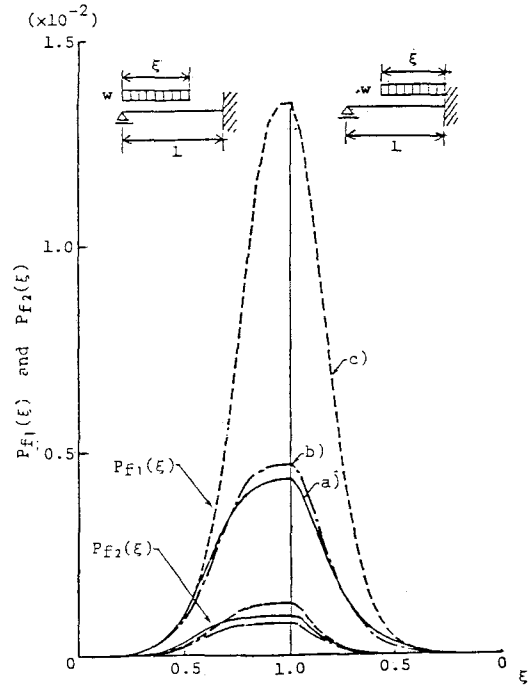


図-5 先端を支持された片持ちはりの場合の破壊確率 $P_{f1}(\xi)$ および $P_{f2}(\xi)$

a) : 逐次弾性設計 b) : 逐次計算によらない弾性設計
c) : 塑性設計

図-4, 図-5 に示したこれらの結果は、式(10), (14) から明らかなように表-1 の構造全体の破壊確率に反映される。

(2) 弾性限界に対する破壊確率

弾性限界に対する破壊確率 P_{fl} について、弾性設計と塑性設計を比較する。対象とした両構造モデルのいずれの場合も、塑性設計の破壊確率が弾性設計より大きい。弾性限界では、はり構造の各断面が弾性状態にあるときの作用モーメントが問題となるために、設計段階でこれを考慮している弾性設計の方が破壊確率 P_{fl} を小さくするものと思われる。

弾性設計のうち、逐次計算の有無による破壊確率 P_{fl} の相違は、両構造モデルともほとんどない。断面配分に逐次計算を導入することにより、一般には破壊確率を小さくできると考えてよい。それにもかかわらず、破壊確率の相違が現われなかった理由として、次のことが考えられる。

破壊確率を計算する際には、載荷長 ξ は一様に分布する確率変数として扱っている。いま、ある ξ が与えられたときの i 番目の要素に作用するモーメントの絶対値を M_{ei} とすると M_{ei} は ξ のみの関数となり

$$M_{ei} = M_{ei}(\xi) = h_i(\xi) \dots\dots\dots (17)$$

と表わせる。設計段階で抵抗モーメントの配分を決定するときには、式(5) より M_{ei} の最大値 $\max_{\xi} [h_i(\xi)]$ のみを問題にした。しかし、 ξ が確率変数であることを考えると $h_i(\xi)$ もまた確率変数である。図-6 に示すように、 $M_{ei}(\xi)$ は一般に ξ の単調関数ではないので、 $\xi = h_i^{-1}(M_{ei})$ は M_{ei} の多価関数となる。したがって、 $h_i(\xi) = M_{ei}(\xi)$ の確率密度関数を f_{ei} とすると、同一の M_{ei} を与える全ての ξ についての和をとることにより、次式が成立する (図-6)。

$$f_{ei}(M_{ei})dM_{ei} = \sum_{j=1}^S f_{\xi}(\xi_j)d\xi_j = \frac{1}{2Q} \sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dM_{ei}} h_i^{-1}(M_{ei}) \right]_j dM_{ei} \dots\dots\dots (18)$$

したがって、 M_{ei} の確率密度関数 f_{ei} は

$$f_{ei}(x) = \frac{1}{2Q} \sum_j \left[\frac{d}{dM_{ei}} h_i^{-1}(x) \right]_j \dots\dots\dots (19)$$

と表わせる。

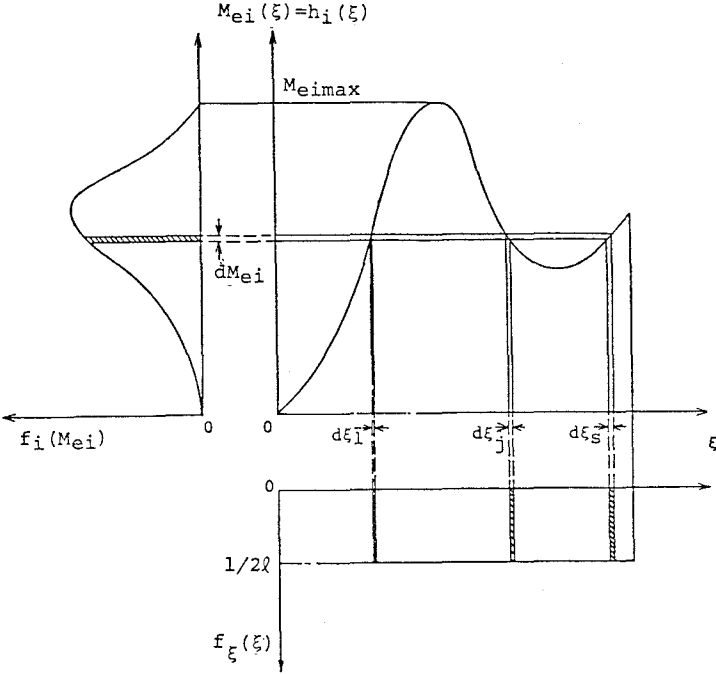


図-6 作用モーメントの確率密度関数

式(19)の確率密度関数は要素ごとに異なり、破壊確率は抵抗モーメント M_{ri} の分配とこの Me_i の分布の関係から決まる性質のものである。すなわち作用モーメントの最大値は同じであっても、広範囲の ξ に対して最大値に近いモーメントが作用する場合（図-6 の $f_{ei}(Me_i)$ のピークが Me_{imax} に近い場合）と、最大値を与える以外のところで作用モーメントが小さい場合（図-6 の $f_{ei}(Me_i)$ のピークが低いところがあり、長く尾を引いて Me_{imax} に達している場合）とでは破壊確率が異なる。もとより本研究での破壊確率の計算にはこれらの要因が配慮されているが、断面配分の設計段階では、式(19)の分布を全く考慮していない。このことが逐次計算の有無による破壊確率の相違の少ない大きな理由の1つと推測され、さらに、塑性設計も含めて、式(5)による断面配分の方法が、簡単ではあっても完全でないことを示唆している。式(5)を用いるに際し、式(19)の Me_i の確率分布を有効に反映させれば、さらに合理的な設計法となりうるが、設計の手段としては複雑になりすぎ、実用には適当でない。

(3) 塑性限界に対する破壊確率

塑性限界に対する破壊確率 P_{f2} について、弾性設計と塑性設計を比較する。連続はりの場合、 P_{f2} は塑性設計が弾性設計のいずれの場合よりも小さくなっている。しかし、片持ちはりの場合には $n=10$ のとき逐次弾性設計、 $n=20$ のとき逐次計算によらない弾性設計が最も P_{f2} を小さくしており、塑性設計は P_{f2} を最小にしない。このことは、構造形式が異なると P_{f2} を最小にする設計法も異なり、塑性メカニズム状態を破壊条件とする場合にも塑性設計が適しているとは限らないことを示している。

塑性限界を破壊条件とする場合、最初の1つの塑性ヒンジが形成されるとモーメントの再分配が生じ、このことが破壊確率 P_{f2} に大きく影響する。式(11)に示したように、 ξ を与えたとき、再分配後のモーメント分布は、最初の塑性ヒンジが生ずる点 k の全塑性モーメント x の値により、 $Me_i(x, k)$ と定まる。この値 x は弾性状態で考えた作用モーメント Me_k より小さい値であり、一般に、その作用モーメントが正であれば、弾性状態で正のモーメントが作用している位置ではそれよりも小さいモーメントが、負のモーメントが作用している位置では、それよりも絶対値の大きいモーメントが再分配後に作用する。作用モーメントが負の位置で塑性ヒンジが生成すれば、これと逆のモーメントの再分配状態となる（図-7, 9参照）。これらを2つのモーメントの再分配状態と呼び、区別して考える。

最初のヒンジが生ずる点の作用モーメントの正負により、2つのモーメントの再分配状態のどちらかに移行するかが分かれ、他の要素の作用モーメントの絶対値の増減が決まる。ある荷重状態において構造モデル全体を考えたとき、塑性ヒンジの生ずる点のモーメントが正である確率と、負である確率とが等しく、かつ式(19)の議論に関連して、抵抗モーメント以上のモーメントが作用する確率が各要素についてほぼ等しいような断面配分がなされている場合には、2つの再分配状態のどちらに対しても同程度に余裕をもつ設計となり、そのときの破壊確率 P_{f2} は小さくなると考えられる。荷重状態によっては、モーメントの再分配状態への移行が一方にかたよる場合がある。この場合には、移行する確率の大きい再分配状態において強度的に余裕があり、2つめの塑性ヒンジが生ずる確率が小さくなるように抵抗モーメントの配分を行えば、このときの P_{f2} は小さくなる。

ここで対象とした構造モデルについて具体的に考える。連続はりの塑性限界を考えると、 P_{f2} に大きく影響しているのは、図-4 より $\xi=1$ 付近の $P_{f2}(\xi)$ である。 $\xi=1$ では、 $P_{f2}(\xi)$ の値が最大であり、最も厳しい荷重条件になるとともに、弾性設計と塑性設計の差も最大となる。

このときの再分配後のモーメントの状態を考えると、図-7 a), b) の示す2つの状態が存在する。a)状態は正のモーメントが作用する点で、b)状態は負のモーメントが作用する点で最初の塑性ヒンジが生じたときに起こるモーメントの再分配である。これら2つの再分配状態のどちらに移行する確率が高いかについて考える。

$n=20$ に対し、 $\xi=1$ のときに k 番目の要素で最初の塑性ヒンジが生じ、2つめの塑性ヒンジが生成しない確率 H_{pk} は式(12)より近似的に

$$H_{pk} = F_k \{M_{ek}(\xi=0)\} \cdot \prod_{i=k}^{n-1} [1 - F_i \{M_{ei}(\xi=0)\}] \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。計算結果を図-8 に示す。この図から、弾性設計、塑性設計いずれの場合も、最初の塑性ヒンジが生ずるのは、 $1 \leq k \leq 15$ の範囲、すなわち正のモーメントの作用する点にある確率が高いことがわかる。このことは、モーメントの再分配が起こるときには、状態a)が支配的であることを示す。このため、負のモーメントが作用している点で、さらに絶対値の大きなモーメントが作用し、メカニズムを構成する2つめの塑性ヒンジはここで生ずる確率が高い。

図-2 a), b) に示す弾性設計では、このような再分配後のモーメント状態を考慮していないので、負のモーメントが作用する中央支点付近で、

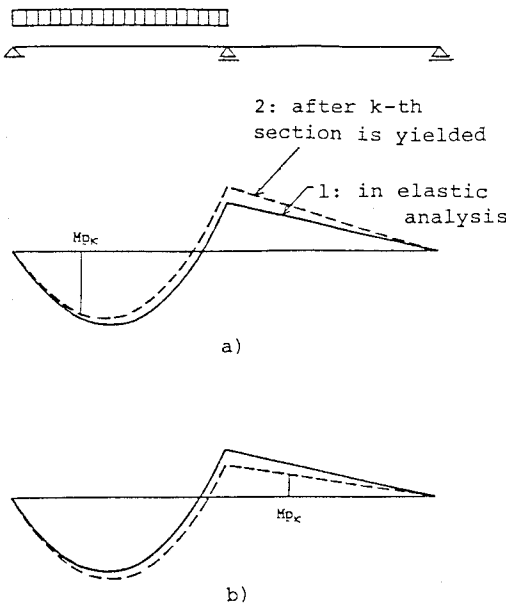
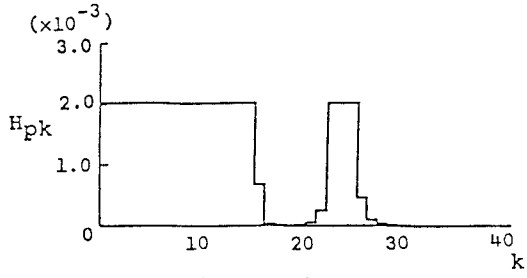
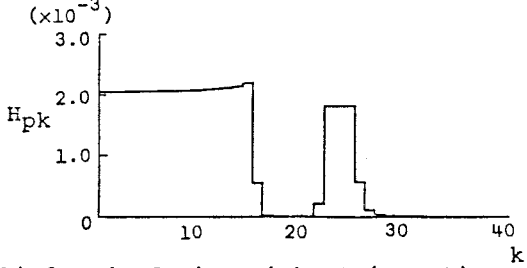


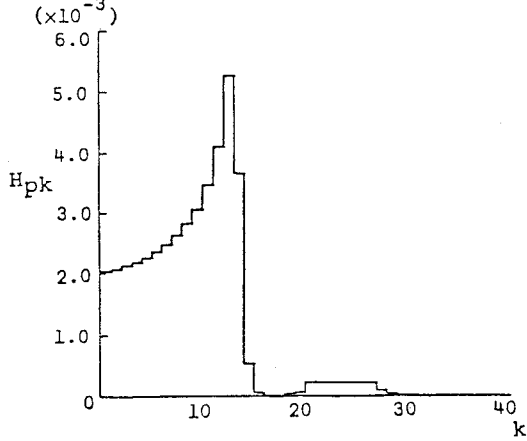
図-7 2 径間連続はりの場合のモーメントの再分配



a) elastic design



b) elastic design without iteration



c) plastic design

図-8 $\xi=1.0$ における式(20)の H_{pk}
(2 径間連続はりの場合)

2つめの塑性ヒンジが生ずる確率が高い。図-2 c)に示す塑性設計では、図-8 からわかるように H_{pk} の値は大きく、最初の塑性ヒンジは生じやすいが、再分配状態に対して余裕があり、2つめの塑性ヒンジの生ずる確率は小さくなる。したがって、 $\xi=1$ 付近での $Pf2(\xi)$ が小さく、この結果、破壊確率 $Pf2$ は弾性設計よりも小さくなるものと思われる。

片持ちはりの結果について考察する。この場合も、図-5 から $Pf2(\xi)$ が最大となる $\xi=1$ (満載)の状態 で計算を行なう。モーメントの再分配の移行の2つの状態を図-9 a), b) に、 $n=20$ のときの式(20)の H_{pk} を図-10に示す。これより、図-10 a) の逐次弾性設計では、幾分正のモーメントが作用する点で最初の塑性ヒンジが生じやすく、図-9 の状態a)に移行する確率が高いが、塑性設計では逆に状態b)に移行する確率が高い。

図-10の3つの設計法のうち、逐次計算によらない弾性設計が、2つのモーメントの再分配状態に移行する確率が最も近い設計法となっており、その結果、塑性限界に対する破壊確率 $Pf2$ を最も小さくしていると推測される。 $n=10$ の場合についても同様の検討を行なうと、逐次弾性設計が、モーメントの再分配状態を的確に反映した設計法となっていることがわかる。このことは断面配分設計の際の分割数も、破壊確率の優劣に影響を与えることを示唆している。

以上の考察により、塑性限界に対して設計を行なう場合には、再分配後のモーメント状態およびその状態への移行確率を考慮すれば、破壊確率を小さくすることができるとと思われる。しかし、断面配分設計にこの考え方を導入することは、設計手順として極めて複雑であり、実際の設計に適用することはほとんど不可能に近い。

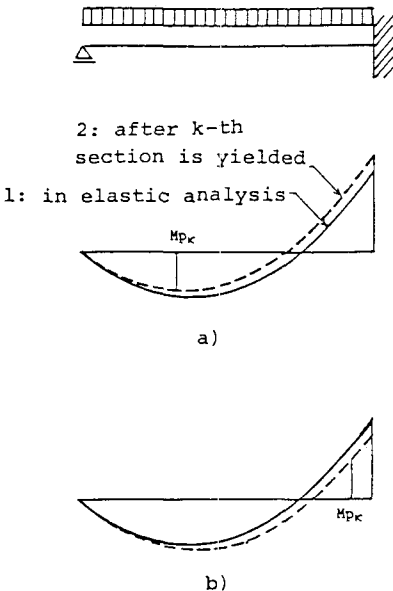


図-9 先端を支持された片持ちはりの場合のモーメントの再分配

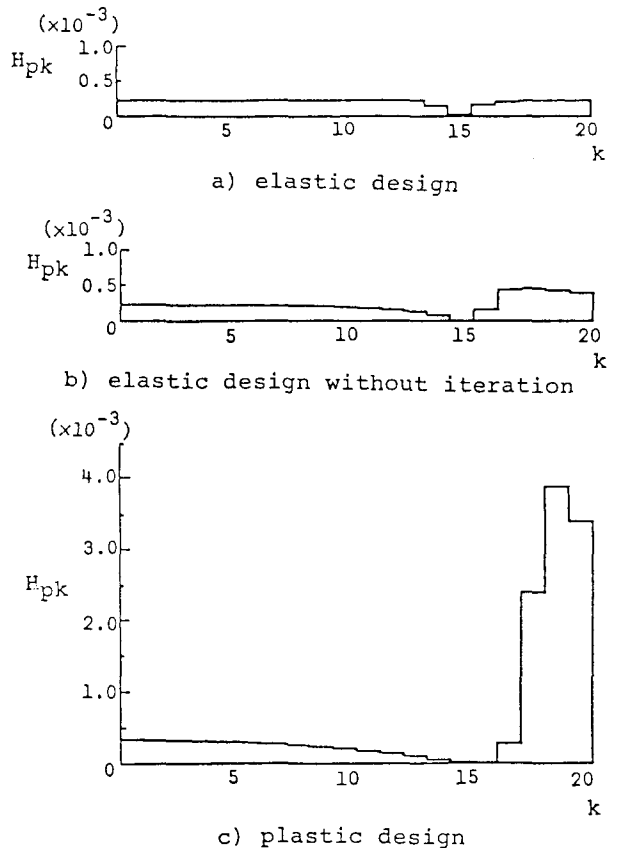


図-10 $\xi=1.0$ における式(20)の H_{pk}
(先端を支持された片持ちはりの場合)

(4) 断面配分設計法に関する考察

2 径間連続はり先端支持片持ちはりの 2 つの構造モデルを対象に、一定の数値的条件のもとで計算を行ない、断面配分設計法と特定の破壊条件における破壊確率の相互関係について検討した。その結果、弾性限界を破壊条件とする場合でも、逐次弾性設計が逐次計算によらない弾性設計よりも、必ずしも優れているとは限らないこと、塑性限界を破壊条件とする場合でも、片持ちはりの例に見られるように、対応する塑性設計が必ずしも優れているとは限らないことなど注目すべき事実が破壊確率の立場から明らかになった。これらの事実は、すでに考察したように、作用モーメントの確率的分布（式(19)参照）やモーメントの再分配の移行確率（式(20)参照）などが断面配分の設計段階で考慮されていないことに原因する。

現在、道路橋示方書では影響線解析により活荷重の配置を定める方法を採用している。これは各断面に作用し得るモーメントの最大値に注目した方法と考えることができるが、一定の重量のもとで破壊確率を最小にさせようとする経済設計の立場とこの方法とは必ずしも整合しない。さらに、現実的問題として影響線の一方の符号を与える位置にのみ荷重が載荷するという現象は極めてまれなことで、その意味でも設計の際の断面力評価の方法と併せて、荷重載荷の方法についても今後検討が必要である。

現在、信頼性理論にもとづく設計論に関する研究では、構造物のある位置における断面力と断面強度を確率量として扱い、破壊確率および安全性の評価を検討する場合が多い。しかし構造物全体としての信頼性から見れば、個々の断面における安全性の評価だけでは十分とはいえない。最終的には構造物を個々の要素から成り立つシステムとして考え、構造物全体の破壊確率を問題とすべきであろう。信頼性設計法の対象を断面の破壊確率から構造物全体の破壊確率へと拡張する際には、荷重載荷方法、断面力評価方法、破壊条件と合わせて、構造形式、構成要素の数、その要素の配列形状、不静定次数などが重要な要因となる。

ここでの数値計算モデルでは、1 次不静定構造を対象に、確率的に独立な要素が直列的に配列しているとして取り扱った。実際の設計手順に適用し得る最適な断面配分の設計法すなわち断面力評価方法を探る場合、ここで述べた他の要因も含め、さらに広範囲な検討が必要となろう。

5. 結語

信頼性理論を導入して構造物の設計の合理化をはかろうとする場合、荷重及び強度の確率的特性を明らかにするとともに、荷重を力学量に変換する構造解析手法を設計論の立場から検討することが重要である。

構造解析手法すなわち設計法の相違により、一定重量、一定荷重条件のもとでも、構造物の幾何学的形状、言い換えれば断面配分の結果が異なる。ここでは解析手法としての弾性設計と塑性設計を取り上げ、移動荷重のもとでの両設計法の断面配分決定法を実務設計を考慮して確定論的に与えた。弾性設計としては、正確さを期すための逐次弾性設計と実務に最も近く簡便な逐次計算によらない弾性設計を考えた。

設計された構造物に対し、破壊条件として降伏を開始する弾性限界と塑性メカニズムを構成する塑性限界を考え、破壊確率を計算する手順を示した。2 径間連続はり先端支持片持ちはりの簡単な 1 次不静定構造モデルを対象に数値計算を行なった。

数値計算の結果、弾性限界を破壊条件とする場合でも、逐次弾性設計が逐次計算によらない弾性設計よりも必ずしも優れているとは限らないこと、塑性限界を破壊条件とする場合でも、対応する塑性設計が断面配分設計として必ずしも優れていないことなどが明らかになった。

これらの事実は、断面配分設計が確定論的に行なわれ、作用断面力やモーメントの再分配などに関する確率的特性が設計段階で無視されていることに原因する。しかし、現実問題として実務での断面配分設計に確率計算を導入することは難しく、確定論的に行なわざるを得ないことを考慮すると、ここで得られた上記の事実は重要である。

移動荷重を対象とした場合、あらゆる構造形式に対し優れている断面配分設計の方法を厳密に見出すことは難しく、破壊条件の設定にも左右される。このとき、破壊条件の種類と、構造解析のための設計法を対で考えることは、設計を必ずしも最適にしない。例えば、塑性メカニズムの生成を破壊条件とする場合でも、断面配分では弾性設計法を用いて支障のない場合があり得る。

ただし、本研究で行なった解析は種々の前提条件に基づくものであり、また数値計算例も限られたものであるため、一般論としての弾性設計と塑性設計の優劣をここで論ずることができないのはいうまでもない。まえがきでも触れたように、不静定次数の大きな構造モデルに対し、同様の比較を行なえば、結果が異なった傾向を示す可能性があるし、また高次不静定構造において局所的な崩壊メカニズムの生成を考えると、本研究の断面配分手法が適用できるかどうかとも問題である。本研究の議論を発展させるためにはこれらの点の扱いが大きな課題であるといえる。

構造物の任意の位置の断面力と断面強度の比較という断面レベルでの安全性の照査が設計の基本となることはいうまでもない。しかし、構造物全体の安全性が最も重要である以上、ここで検討した構造解析手法や破壊条件の選択の他、それらに大きな関わりをもつ構造形式、独立な構成要素の数、要素の配列形状、不静定次数などの要因についても今後さらに検討が必要となろう。

謝辞

本研究は文部省科学研究費による研究の一部として行なわれたものである。ここに記して感謝する。

参考文献

- 1) 西野文雄、佐藤尚次、長谷川彰夫：許容応力度法の内容と問題点（上）、橋梁と基礎、第17巻第12号、昭和58年。
- 2) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針、昭和50年。
- 3) Welding Research Council and American Society of Civil Engineers：Plastic Design in Steel；A Guide and Commentary，ASCE，1971.
- 4) American Association of State Highway and Transportation Officials：Standard Specifications for Highway Bridges. 12th Edition，AASHTO，1977.
- 5) American Institute of Steel Construction：Specifications for the Design，Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings，AISC，1978.
- 6) 日本建築学会：建築基準法令集、昭和57年。
- 7) Ishikawa, N., T. Mihara, S. Katsuki and K. Furukawa：Optimal Design of Structures under Elastic and Plastic Design Criteria，Proc. of JSCE Structural Eng. / Earthquake Eng. Vol.1, No.2，1984.