

Dual Approach によるトラス部材の 最適鋼種の決定法について

OPTIMUM MATERIAL SELECTION OF TRUSS BY DUAL APPROACH

大久保禎二*・谷脇一弘**

By Sadaji OHKUBO and Kazuhiro TANIWAKI

A new design method to select the optimum steel types and sectional sizes of member elements of truss is proposed based on dual theory and linear approximation concepts. The design problem is transformed into a sequence of approximate primal problems of convex and separable form by linear approximation on material selection variables and the compliances of sizing variables for member elements. The convex problems are solved by dual method, in which the dual variables are decided by maximizing dual function by using quasi-Newton algorithm, then material types and sectional sizes of member elements are improved by minimizing the separable dual function on each member. This separable minimization can avoid the inherent combinatorial complexity associated with the material selection problems. The efficiency and reliability of the proposed method are demonstrated by giving numerical results for minimum cost design problems of statically indeterminate trusses.

1. まえがき

構造物の最適設計を行う場合、その結果に大きな影響を与える設計変数として、(a) 構造要素の断面諸元に関するもの (b) 構造形状に関するもの、および (c) 使用材種に関するものがあるが、これまでの構造最適化の研究においては、主として構造要素の断面諸元および構造形状に関する変数が設計変数として考慮されており、使用材種に関する変数を取り扱った研究はきわめて少ないのが現状である。

構造物の応力制限やたわみ制限などの挙動に関する制約条件、および重量や製作費などの目的関数は、使用材料の物理的性質や単価などに大きく影響され、かつ、これらの値が各材種毎に離散的な値をとることから、構造物の各部材の使用材種をも設計変数として考慮する設計問題は、離散的に変化する各材料間の物理的性質と連続的に変化する断面諸元の両方を考慮しながら、それぞれの最適値を決定する問題となる。

このような構造部材の最適材料選択の問題に関して、Reinschmidt はトラスの各部材の最適な使用鋼種および断面を市販の離散的な断面の中から選ぶ設計問題を、線形近似および 0-1 変数 (論理変数) を用いて定式化し、SLP 法により最適解を決定する方法を提案している⁵⁾。また、著者の一人である大久保と奥村は、曲げを受ける鋼桁断面について各鋼種別に Suboptimization を行い、その結果を利用して材料選択変数を導入し、SLP 法により鋼連続桁の各桁要素の断面寸法および最適鋼種を同時に決定する方法⁶⁾、および鋼桁断面の Suboptimization の結果と桁の最大曲げモーメント図を利用して鋼連続桁の製作費図を作成し、この面積を

* 工博 愛媛大学教授 工学部土木工学科 (〒790 愛媛県松山市文京町3番)

** 工修 川田工業(株)

最小化するように桁要素の寸法諸元および使用鋼種を決定する方法⁷⁾を提案している。また、杉本⁸⁾および小西、前田⁹⁾は、トラス部材の Suboptimization の結果を利用して、全応力設計法により静定トラスの各部材の最適鋼種および断面寸法を決定する方法について研究を行っている。これらの研究において、数理計画法により最適な鋼種および断面諸元を決定する方法では、部材要素数が増加した場合の計算能率および収束性が大きな問題となる。

ところで、近年、双対理論および制約条件の線形近似による構造物の最適設計法 (Dual Approach) に関して種々研究が行われ、構造要素の断面諸元を最適化する設計問題に対してその有効性が明らかとなっている^{1), 3), 4)}。Imai は、この Dual Approach に基づき、弾性係数の異なる材種間の最適選択問題のみに適用できる近似解法を導入し、最小重量を与えるトラスの各部材の材種をアルミニウムあるいは高張力鋼のいずれかより選択する問題を解いている²⁾。

本研究では、構造要素の最適使用材種および断面諸元を決定する設計問題に関して、弾性係数が等しく、許容応力度および製作単価が異なる材料間の最適選択の問題を、Dual Approach により解く方法を展開するとともに、トラス構造物の最小製作費設計問題に適用した例を示し、本研究の方法の有効性を明らかにするものである。

2. 原設計問題の設定

構造物の設計問題において考慮すべき応力、たわみ、あるいは設計変数の上下限などの制約条件および目的関数 W は、構造物を構成する各要素 (部材) の断面寸法に関する設計変数 X 、

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n]^T \quad (n: \text{要素数}) \quad (1)$$

および各要素の使用材種の許容応力度、弾性係数、単位重量、単価などの関数として表わされる。ところでこれらの使用材種に関する諸値は各材種毎に固有の離散値をとるので、使用材種の呼称 M をもって表現するものとする。各構成要素 (部材) の使用材種に関する離散変数として次の変数 M を導入することができる。

$$M = [M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n]^T \quad (n: \text{要素数}) \quad (2)$$

したがって、構造要素の最適な使用材種および断面諸元を決定する構造物の最適設計問題は、構造物の挙動に関する制約条件

$$g_j(X, M) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (m: \text{制約条件の数}) \quad (3)$$

X の上、下限値に関する条件

$$X_i^{(l)} \leq X_i \leq X_i^{(u)} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

および各要素の材種を使用可能な材種群 S_M の中から選択すべき条件

$$M_i \in S_M \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

のもとで、目的関数 W

$$W(X, M) \rightarrow \min \quad (6)$$

を最小にする X および M を決定する問題として表現することができる。

いま、構造要素の断面寸法に関する設計変数 X の逆数 Z

$$Z_i = 1/X_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (7)$$

を新たな設計変数とし、 $g_j(X, M)$ を Z^0 および M^0 の近傍で Taylor 展開すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_j(Z, M^0 + \Delta M) &\approx \bar{U}_j(Z^0, M^0) - \sum_{i=1}^n [C_{ij}Z_i + D_{ij}\Delta M_i] \geq 0 \\ \text{ここに、} C_{ij} &= -\partial g_j(Z^0, M^0) / \partial Z_i, \\ D_{ij} &= -\partial g_j(Z^0, M^0) / \partial M_i, \\ \bar{U}_j(Z^0, M^0) &= g_j(Z^0, M^0) - \sum_{i=1}^n \partial g_j(Z^0, M^0) / \partial Z_i \cdot Z_i^0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

上式の C_{ij} は、部材 i の断面寸法に関する逆変数 Z_i の単位量変化により生ずる制約条件 g_j の変化量に -1 を乗じたものである。また D_{ij} は、部材 i の材種が使用材種 M_i^0 より改良材種 $M_i = M_i^0 + \Delta M_i$ に変化したことにより生ずる制約条件 g_j の変化量に -1 を掛けたものであり、 ΔM_i の大きさにより D_{ij} は異なる値をとる。また ΔM_i は M_i^0 から M_i への変化を示す論理変数である。

また、最小化すべき目的関数 $W(\mathbf{X}, \mathbf{M})$ は、各構造要素の目的関数への寄与の和として次式で表わされるものとする。

$$W(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n \rho_i(M_i) \cdot \ell_i X_i = \sum_{i=1}^n W_i(M_i) \cdot X_i \rightarrow \min. \quad (9)$$

ここに、 $\rho_i(M_i)$ は構造要素 i の $\ell_i X_i$ の単位量当りの目的関数の値であり、使用材種 M_i の関数として表わされる。また ℓ_i は要素長、 $W_i(M_i) = \rho_i(M_i) \cdot \ell_i$ である。

式(9)の目的関数を $\mathbf{Z}$ 及び $\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}$ で表現すると次式のようになる。

$$W(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} \rightarrow \min. \quad (10)$$

3. 双対設計問題の導入

式(8)の線形近似の制約条件のもとで、式(10)の目的関数を最小化する近似の原設計問題の設計変数は $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ であり、この設計問題のラグランジュ関数を導入すると次式を得、

$$L(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} + Z_i \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij} + \Delta M_i \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{ij} \right] - \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{U}_j(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) \quad (11)$$

ここに、 $\boldsymbol{\lambda}$: 双対変数 (ラグランジュ乗数)、 $\lambda_j \geq 0$ ($j=1, \dots, m$)

この関数を $\boldsymbol{\lambda}$ について最大化、 $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ について最小化することによって、近似の原設計問題の解 ($\mathbf{Z}^*$, $\Delta \mathbf{M}^*$, $\boldsymbol{\lambda}^*$) を得ることができる。

$$L(\mathbf{Z}^*, \Delta \mathbf{M}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \max_{\boldsymbol{\lambda}} \min_{\mathbf{Z}, \Delta \mathbf{M}} L(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}, \boldsymbol{\lambda}) \quad (12)$$

4. $L(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}, \boldsymbol{\lambda})$ の最小化

式(11)を $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ について最小化する場合、右辺の最後の項は $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ に対して定数であり、また第一項は Z_i および ΔM_i に関する項の和であるので、式(11)の最小化は、各 [] の項をそれぞれ独立に、 Z_i および ΔM_i について最小化することにより達成される。

いま、式(11)の i 番目の [] の項を $L_i(Z_i, \Delta M_i)$ と表わすものとする、

$$L_i(Z_i, \Delta M_i) = \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} + Z_i \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij} + \Delta M_i \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{ij} \quad (13)$$

各改良候補材種 ($M_i = M_i^0 + \Delta M_i$) に対して上式を最小化する Z_i は、 $\partial L_i(Z_i, \Delta M_i) / \partial Z_i = 0$ および $Z_i \geq Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)$, $Z_i \leq Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)$ の条件により、次式より求めることができる。(文献1), 3), 4) 参照)

$$\left. \begin{aligned} Z_i^* &= \left[\frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij}} \right]^{1/2}, & \text{if } [Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)]^2 < \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij}} < [Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)]^2 \\ Z_i^* &= Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i), & \text{if } \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij}} \leq [Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)]^2 \\ Z_i^* &= Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i), & \text{if } \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{\sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij}} \geq [Z_i^{(0)}(M_i^0 + \Delta M_i)]^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

したがって、式(13)を最小化する ΔM_i および Z_i は、各改良候補材種（各 ΔM_i ）についてそれぞれ式(14)より Z_i を求め、式(13)の値が最小となる ΔM_i と Z_i の組み合わせを求めることにより決定することができる。このようにして $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ について最小化された $\mathbf{L}(\mathbf{Z}, \Delta \mathbf{M})$ を双対関数 $\ell(\lambda)$ とおく。すなわち、

$$\ell(\lambda) = \min_{\mathbf{Z}, \Delta \mathbf{M}} \mathbf{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left\{ \min_{\substack{Z_i^l \leq Z_i \leq Z_i^u \\ M_i^0 + \Delta M_i \in S_{M_i}}} \left[\frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} + Z_i \sum_{j=1}^m \lambda_j C_{ij} + \Delta M_i \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{ij} \right] \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^m \lambda_j \bar{U}_j(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) \right\} \quad (15)$$

5. 双対関数 $\ell(\lambda)$ の最大化

式(15)の $\ell(\lambda)$ を最大にする双対変数 λ を決定する方法として、本研究ではニュートン法を用いている。ニュートン法ではactiveな制約条件群 AG

$$AG = \{i | \lambda_i > 0; i \in m\} \quad (16)$$

のみに着目し、各制約条件に対する λ の改良を次式により行う。

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{S}^{(k)} \quad (17)$$

$\mathbf{S}^{(k)}$ は λ の改良方向であり、次式より求められる。

$$\mathbf{S}^{(k)} = -[H(\lambda^{(k)})]^{-1} \cdot \nabla \ell(\lambda^{(k)}) \quad (18)$$

ここに、 $\nabla \ell(\lambda^{(k)})$ は $\ell(\lambda)$ の λ_j ($j \in AG$)に関する一次の偏微係数ベクトルであり、その要素は式(15)を λ_j について偏微分することにより、次式で単純に計算することができる。

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^n C_{ij} Z_i + \sum_{i=1}^n D_{ij} \Delta M_i - \bar{U}_j(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}) \quad (19)$$

また、 $H(\lambda)$ は λ_j ($j \in AG$)に関する $\ell(\lambda)$ のヘッセ行列であり、 $H(\lambda)$ の jk 要素は、式(19)をさらに λ_k について偏微分することにより、次式より計算される。

$$H_{jk} = \frac{\partial^2 \ell(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = -\frac{1}{2} \sum_{i \in \tilde{n}} \frac{C_{ij} C_{ik}}{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)} Z_i^3 \quad (20)$$

$$\text{ここに、} \tilde{n} = \{i | Z_i^{(l)} < Z_i < Z_i^{(u)}\}$$

式(17)の $\alpha^{(k)}$ は改良方向 $\mathbf{S}^{(k)}$ に沿っての λ の改良巾であり、 $\mathbf{S}^{(k)}$ の各要素がすべて正の場合は $\alpha^{(k)} = 1.0$ とし、負の要素がある場合には、 λ_j の非負の条件より $\alpha^{(k)}$ の許容最大値を次式より決定した。

$$\alpha_{max}^{(k)} = \min_{S^{\alpha} < 0} \left| \frac{\lambda_j^{(k)}}{S_j^{(k)}} \right| \quad (j \in AG) \quad (21)$$

ただし、この $\alpha_{max}^{(k)}$ の値は $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \alpha_{max}^{(k)} \mathbf{S}^{(k)}$ により $\ell(\lambda^{(k+1)})$ が最大値を越えない場合、すなわち、次式の値が正となる場合にのみ使用することができる。

$$\frac{\partial \ell(\lambda^{(k+1)})}{\partial \alpha^{(k)}} = \sum_{i \in AG} S_i^{(k)} \frac{\partial \ell}{\partial \lambda_j}(\lambda^{(k+1)}) \quad (22)$$

上式の値が負となる場合には、 $\ell(\lambda^{(k+1)})$ が $\alpha^{(k)}$ に関して最大値を越えているので、 α の値を半減させながら λ の改良を行う。また、この $\lambda^{(k+1)}$ の改良過程で0となる λ に対応する制約条件はactiveでなくなり、集合 AG より取り除く。また、新にactiveとなる制約条件は、適当な初期値を仮定して集合 AG に加える。このようにして改良された $\lambda^{(k+1)}$ を用いて式(14)により $\mathbf{Z}$ を改良し、これを式(19)、(20)に代入して $\partial \ell / \partial \lambda_j$ および H_{jk} を改良し、再び式(17)により λ を改良する。このような λ の改良を繰り返すことにより $\ell(\lambda)$ は逐次最大化され、その最大点では $\mathbf{S} = [0]$ となり、 $\ell(\lambda)$ を最大にする λ^* を決定することができる。

6. トラス構造物の設計問題

本研究では、上記の理論を、トラス構造物の各部材の最適な鋼種および断面積を決定する問題に適用し、

その最適性、有効性、収束性などの検討を行った。

トラス構造物では、部材の断面寸法に関する設計変数として各部材の断面積 $\mathbf{A} = [A_1, \dots, A_n]^T$ 、各部材の使用鋼種として $\mathbf{M} = [M_1, \dots, M_n]^T$ を考える。

また、得られた解の最適性が明らかに判断できるようにするため、使用可能な鋼種 S_M として、市販の鋼種に関係なく、表-1 に示すような鋼種を仮定し、この5種類の鋼材の中から各部材に対して最適な鋼種を選択するものとした。これらの鋼材は、鋼種の番号が大きくなるにしたがい許容応力度と単価の比、および単価が大きくなるように設定され、かつ、すべての鋼種の弾性係数を $E = 2,000,000 \text{ kg/cm}^2$ と等しくしているので、応力の制約条件に対しては番号の大きな鋼種ほど有利となり、また、たわみ制限に対しては、番号の小さな鋼種ほど有利となる。

制約条件として、各部材の応力に関する条件

$$g_{\sigma j}(\mathbf{A}, \mathbf{M}) = |\sigma_{aj}(M_j)| - |N_j(\mathbf{A}, \mathbf{M})/A_j| \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (23)$$

ここに、 $\sigma_{aj}(M_j)$ ：部材 j の許容応力度、 $N_j(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ ：部材 j の軸力

および格点のたわみに関する制約条件

$$g_{\delta k}(\mathbf{A}, \mathbf{M}) = |\delta_{ak}| - |\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{M})| \geq 0 \quad (k = 1, \dots, K) \quad (24)$$

ここに、 δ_{ak} ：着目点 k の許容たわみ量、 $\delta_k(\mathbf{A}, \mathbf{M})$ ：着目点 k の実たわみ量、 K ：たわみの着目点数を考慮し、目的関数として次式で表わされるトラスの製作費を考え、これを最小とする各部材の最適鋼種および断面積を決定することとした。

$$W(\mathbf{A}, \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n \text{COSTM}(M_i) \cdot A_i \ell_i = \sum_{i=1}^n W_i(M_i) \cdot A_i \quad (25)$$

ここに、 $\text{COSTM}(M_i)$ ：部材 i の単位容積当りの製作費、 $W_i(M_i) = \text{COSTM}(M_i) \cdot \ell_i$

いま、各部材の断面積 A_j のかわりに、その逆数 $Z_j = 1/A_j$ を新たな設計変数として考慮し、式 (23) を $\mathbf{Z}$ および $\mathbf{M}$ について線形近似すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma j}(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) &= \bar{U}_{\sigma j}(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) - \sum_{i=1}^n [C_{ij} Z_i + D_{ij} \Delta M_i] \\ \text{ここに、} C_{ij} &= |N_j| - \partial |N_j| / \partial A_i \cdot A_i^0 \quad (i = j) \\ C_{ij} &= -\partial |N_j| / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2 / A_j^0 \quad (i \neq j) \\ D_{ij} &= -(\sigma_{aj, M_j} - \sigma_{aj, M_j^0}) \quad (i = j) \\ D_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \bar{U}_{\sigma j}(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) &= g_{\sigma j}(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) + \sum_{i=1}^n C_{ij} Z_i^0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

また、式 (24) は次のように線形近似される。

$$\left. \begin{aligned} g_{\delta k}(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) &= \bar{U}_{\delta k}(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) - \sum_{i=1}^n [C_{ik} Z_i + D_{ik} \Delta M_i] \\ \text{ここに、} C_{ik} &= -\partial |\delta_k| / \partial A_i \cdot (A_i^0)^2, \\ D_{ik} &= 0, \\ \bar{U}_{\delta k} &= g_{\delta k}(\mathbf{Z}^0, \mathbf{M}^0) + \sum_{i=1}^n C_{ik} Z_i^0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

さらに、式 (25) の目的関数を $\mathbf{Z}$ および $\Delta \mathbf{M}$ で表現すると次式となる。

$$W(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) = \sum_{i=1}^n \frac{\text{COSTM}(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{W_i(M_i^0 + \Delta M_i)}{Z_i} \quad (28)$$

なお、上式における C_{ij} 、 C_{ik} 、 $\bar{U}_{\sigma j}$ 、 $\bar{U}_{\delta k}$ は式 (14)、(19)、(20) などでも利用されるが、このような場合、各制約条件の係数の大きさができるだけ同じオーダーであることが望ましい。このような観点から、本研究では式 (27) のたわみに関する制約条件を1000倍し、式 (26) の応力度に関する制約条件の係数と大きさのオーダーがほぼ合うように調整している。

式 (26)、(27) および (28) の諸値を式 (11) に代入して、近似の設計問題に対するラグランジュ関数を導入し、

表-1 使用可能鋼種一覧表

鋼種 M	1	2	3	4	5
許容応力度 $\sigma_{at}(M) = \sigma_{ac}(M)$ (kg/cm ²)	1500	2000	2500	3000	3500
単価 COSTM(M) (円/cm ³)	250	300	350	400	450
許容応力度 単価	6.00	6.67	7.14	7.50	7.78
弾性係数 (E)	2,000,000 kg/cm ²				

これを λ について最大化, $Z, \Delta M$ について最小化することにより, $Z, \Delta M$ の改良解を決定することができる。

7. 最適設計アルゴリズム

2～6で展開した理論により, トラス構造物の最適な Z (あるいは X) および M を決定するアルゴリズムの概略的な流れは次のようになる (図-1 参照)。

すなわち, まず Z および M の初期値において, 非線形の制約条件を線形な制約条件式(8)に近似し, M を固定して, 式(15)の双対関数 $\ell(\lambda)$ を最大にする λ をニュートン法により決定する。次に, この λ を固定し, M_i を種々変化させ, 式(13)の $L_i(Z_i, \Delta M_i)$ を最小にする $Z_i, \Delta M_i$ を求め, これより各部材の改良解 $Z_i^1 = Z_i, M_i^1 = M_i^0 + \Delta M_i$ を決定する, この改良解を再び初期値として同様の改良をくり返し, 収束条件を満足する解を最適解とするものである。

ところで, この Z と M の改良過程において, 構造解析理論式および式(8)より明らかのように, Z および M の改良に伴いトラス部材の軸力 N や節点のたわみ δ , 各制約条件の C_{ij} および定数項 $\bar{U}_j$ が変化するが, 文献 3)の研究結果より, 式(15)の $\ell(\lambda)$ の最大化過程において C_{ij} や $\bar{U}_j$ を一定とする方が, active な制約条件式群 AG の決定や, 最終的な最適解を決定するために必要とする C_{ij} の計算回数を減少させ得ることが明らかとなっている。そこで本研究でも, ニュートン法による $\ell(\lambda)$ の最大化過程においては, トラス構造物の挙動 (N, δ) および $C_{ij}, \bar{U}_j$ および M_i を一定とし, Z の変化毎にトラスの解析および C_{ij} の計算は行わないこととした。したがって, 本論文の設計法においては, 式(13)の $L_i(Z_i, \Delta M_i)$ ($i = 1, \dots, n$) の最小化により各部材の使用鋼種および断面積の改良の検討を行った後においてのみ, トラスの解析および C_{ij} の計算を行っており, この繰り返し回数を反復改良回数 (ITE) としている。

また, 式(13)の $L_i(Z_i, \Delta M_i)$ の最小化において, 改良可能な鋼種すべてについて D_{ij} および $W_i(M_i^0 + \Delta M_i)$ を求め, 式(13), (14)により, 式(13)を最小とする Z_i および ΔM_i の組み合わせを決定することが考えられる。しかし, 本研究では, 線形近似問題において active な制約条件群 AG が変化しないという仮定のもとで, すなわち, λ を一定として式(13)を最小化するように Z および ΔM を改良していること, および, 応力に関する制約条件が active な制約条件となる設計問題においては, 鋼種の改良により, 断面が大きく変化することがあることなどを考慮して, 鋼種 M_j の1回の改良における ΔM_j の変化可能な範囲を, 使用鋼種 M_j^0 に隣接する1ランク上位, および1ランク下位の2つの鋼種に限定して改良の検討を行うこととした。この場合, 上位および下位の鋼種の物理的性質および目的関数への寄与の変化量が必ずしも同一でないことから, 式(8)の D_{ij} の計算は, 各改良候補鋼種に対してそれぞれ独立に行う必要がある。

また, 式(13)によりトラス部材 j の Z_j および M_j の改良を行う場合, 改良候補鋼種 $M_j^0 + \Delta M_j$ に対して式(13)

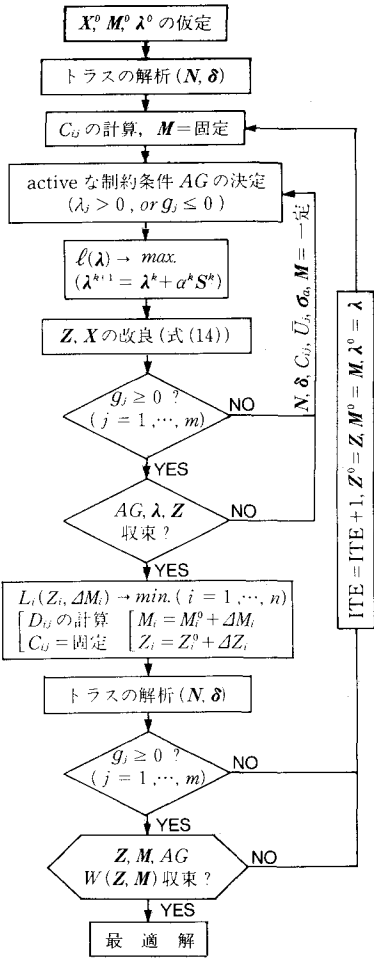


図-1 最適設計アルゴリズムの概略的な流れ図

を最小にする Z_j は、一般に式 (14) より求められるが、特に応力制限が active となるトラス部材 j に対しては、

$$g_{\sigma_j}(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) = \sigma_{\sigma_j}(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j) - |N_j| \cdot Z_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j) = 0 \quad (29)$$

となることより、 $Z_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j)$ を次式より計算することもできる。

$$Z_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j) = \sigma_{\sigma_j}(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j) / |N_j| \quad (30)$$

上式より求めた $Z_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j)$ は、 $g_{\sigma_j}(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) = 0$ において、 $\lambda_j = \partial W(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) / \partial \sigma_{\sigma_j}$ 、 $C_{ij} = -\partial g_j(\mathbf{Z}, \mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}) / \partial Z_i$ および $W_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j)$ を式 (14) に代入し、近似的に $\partial N_j / \partial Z_i = 0 (i \neq j)$ とすることにより得られる $Z_j(\mathbf{M}^0 + \Delta \mathbf{M}_j)$ と一致し、式 (30) は、トラスの応力制限が active となる部材の Z_j に関する、式 (14) の近似の簡易計算式であることを容易に証明することができる。式 (30) は式 (14) と比較してきわめて単純な計算式であり、かつ、 Z_j の改良毎の変化量がある程度制限することより、設計問題によっては、よりスムーズに最終的な最適解に到達することがあり得る。そこで、本研究では、応力制限により Z が決定される部材に対しては、式 (14) の代りに式 (30) を用いて Z を決定することとした。しかし、たわみ制限などのように、多くの部材の Z の寄与が互いに同程度となる制約条件により部材の断面積が決定される場合には、 Z_j を式 (14) により求めなければならない。

8. 設計例

前節で述べたトラス構造物の最適設計アルゴリズムにより、種々の不静定トラスの最適設計を行い、本論文で提案している方法の最適性、計算効率、信頼性などについて検討を行ったが、本節では図-2 および図-7 に示す3部材トラスおよび10部材トラスについて種々検討した結果について述べる。

なお、前節の最適設計アルゴリズムで述べたように、本研究では式 (13) の $L_i(Z_i, \Delta M_i) (i = 1, \dots, n)$ の最小化により各部材の使用鋼種および断面積の改良の検討を行った回数を反復改良回数 (Number of Iteration, ITE) としており、この改良回数は、トラスの解析および C_{ij} の計算回数とも一致する。また構造解析上の理由から、本研究の設計例においては、理論的に断面積が 0 cm^2 となる部材に対しても、その部材の断面積の下限値を 0.1 cm^2 に設定している。さらに、たわみ制限の許容値 δ_a は、すべての節点の水平および鉛直方向のたわみ制限に適用されるものとした。

1) 3部材トラス

図-2 (a) に示す3部材トラスで、節点の許容たわみ量 δ_a を 4.0 cm とした場合の最適解への収束過程を図-3 に、その最適解を表-2 の Case 1-① に示す。この設計問題では部材1および3の応力に関する制約条件のみが active となり、両部材とも鋼種

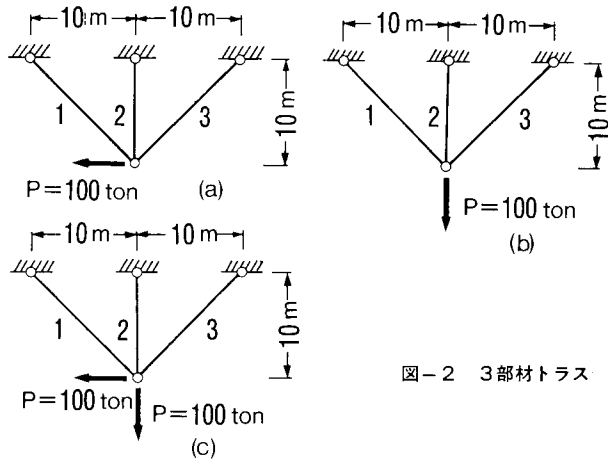


図-2 3部材トラス

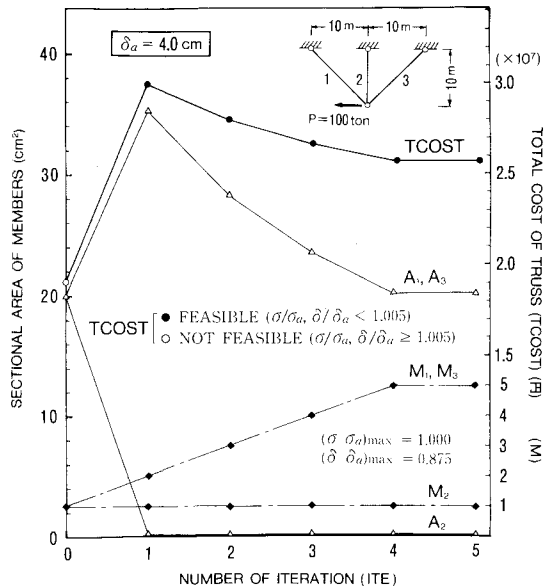


図-3 3部材トラス (表-2, Case 1-①) の収束過程

の初期値1より出発して、各改良毎に製作費を減少させるように、許容応力度が1ランク上の鋼種および断面積に改良しており、応力制限に対して最も経済的となる鋼種5を4回の改良で選択している。また、部材2は不要となるので、断面積はその下限値0.1cm²をとっており、鋼種も最も安価な1を選択している。この解の最適性を検討するため、部材1および3の使用鋼種を4あるいは3とし、かつ、部材2の断面積を0.1cm²、鋼種を1とした場合について、式(30)より求めた解をそれぞれ表-2のCase 1-②および③に示す。いずれの場合もトラスの製作費(TCOST)が上記①の最適解より高く、本研究の方法により真の最適解が得られている。

つぎに、上記のトラスの節点の許容たわみ量を3.0cmと厳しくした場合の最適解への収束過程を図-4に、その最適解を表-2のCase 2-①に示す。この場合には部材1および3の応力制限とたわみ制限が共にactiveとなり、3回の改良で最適解に達し、ITE 4~6で解の収束判定を行っている。各部材の最適鋼種として、それぞれ4, 1, 4を選択し、TCOSTも上記の $\delta_a = 4.0$ cmの例と比較して約3.6%増加している。この解の最適性を検討するため、各部材の使用鋼種をそれぞれ3, 1, 3および5, 1, 5と固定し、応力制限およびたわみ制限を共に満足するような最小の断面積を求めた結果を表-2のCase 2-②および③に示す。使用鋼種を3, 1, 3とした場合には応力制限のみにより部材の断面積が決定され、鋼種が4, 1, 4の場合よりも

大きな断面となっている。また、鋼種が5, 1, 5の場合にはたわみ制限のみがactiveとなるので、断面積は①の場合と等しくなり、応力的には余裕のある構造となっている。しかし、②および③のトラスはいずれも①のトラスと比較して最小製作費が高くなっており、①が真の最適解であることが分る。

図-2(b)のトラスにおいて、 $\delta_a = 2.0$ cmおよび1.0 cmとした場合の最適解、およびその最適性を検討するための比較解を表-2のCase 3およびCase 4に示す。また、 $\delta_a = 1.0$ cmにおける収束過程を図-5に示す。

$\delta_a = 2.0$ cmの場合には最適解は応力制限により決定され、すべての部材の鋼種の初期値を1と仮定しても、4回の反復改良で最適な鋼種1, 5, 1を選択している。しかし、その後、最適解において不要となる部材1および3の断面積がその下限値0.1cm²に収束するまでに、更に3回の改良を必要としている。この設計問題は応力制限により断面が決定されているので、得られた解の最適性は明らかである。

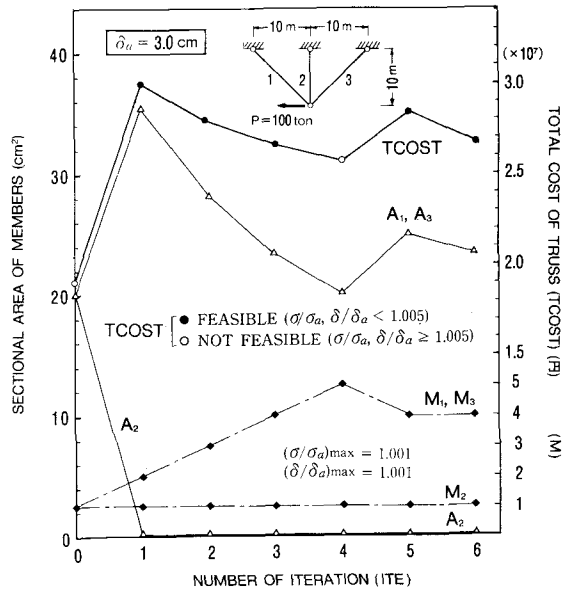


図-4 3部材トラス (表-2, Case 2-①) の収束過程

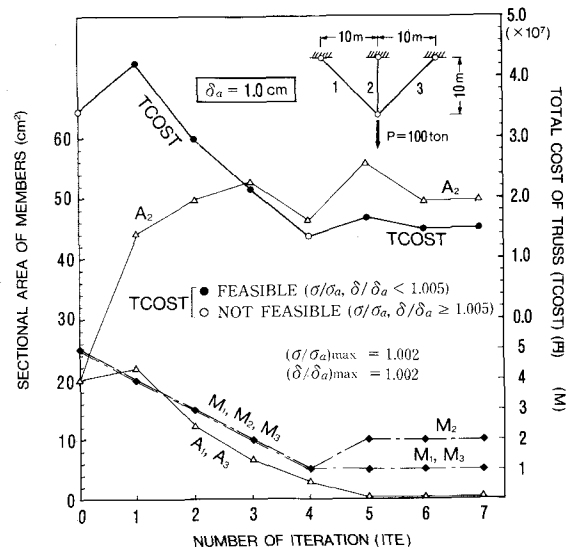


図-5 3部材トラス (表-2, Case 4-①) の収束過程

また $\delta_a = 1.0 \text{ cm}$ の最適解では、たわみ制限と応力制限が共に active となっている。
 すべての部材の初期鋼種を 5 と仮定しても、
 5 回の改良で最適鋼種 1, 2, 1 を選択し、
 7 回の改良で部材 2 のみが外力に抵抗する
 最適構造を決定している。この解の最適性
 も、部材 2 の鋼種を 1 および 3 に固定して、
 それぞれ応力制限およびたわみ制限を満足
 する最小の断面を求めた解 (Case. 4 - ②,
 ③) と比較することにより明らかである。

図-2 (c) に示すトラスにおいて、 $\delta_a = 4.0 \text{ cm}$ とした場合の最適解への収束過程、
 最適解およびその比較解を図-6 および表
 -2 のCase 5 に示す。この設計問題では、
 外力の合力の方向が部材 3 の方向と完全に
 一致することから、最適解では部材 3 のみ
 が外力に抵抗し、部材 1 および 2 の断面積は、
 それぞれ 0.11 cm^2 および 0.13 cm^2 とほぼ断面

積の下限値に収束し、鋼種も 1 を選択している。この設計問題ではたわみ制限に余裕があることから、部材 3
 の最適解は応力制限により決定され、最適鋼種として 5 を選択しており、このトラスの最適性も明らかである。

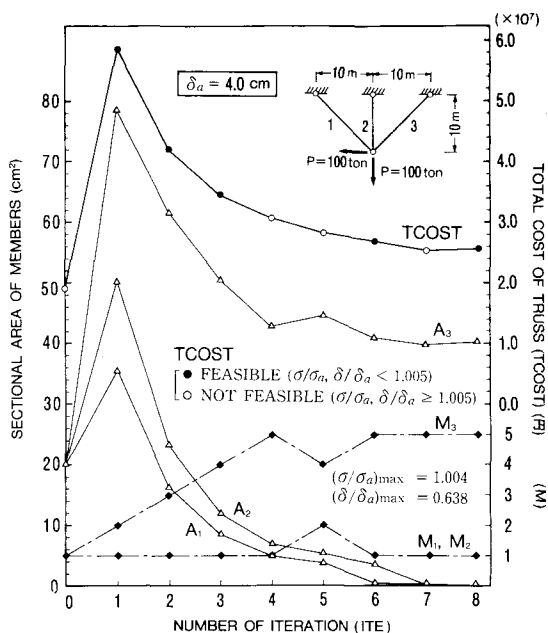


図-6 3部材トラス (表-2, Case 5-①)の収束過程

表-2 3部材トラスの最適解とその最適性の検討

			$M_1^{1)}$ $A_1^{2)}$	M_2 A_2	M_3 A_3	Min. TCOST ($\times 10^3$ 円)	ITE ⁴⁾ (δ/δ_a) _{max}	設計条件	
Case 1		初期値	1 20.00	1 20.00	1 20.00	19142	5	1.000 0.875	
	①	最適解 ⁵⁾	5 20.20	1 0.10	5 20.20	25739			
	②	比較解 ⁶⁾	4 23.56	1 0.10	4 23.56	26676	$\delta_a = 4.0$ cm		
	③		3 28.28	1 0.10	3 28.28	28021			
Case 2		初期値	1 20.00	1 20.00	1 20.00	19142	6	1.001 1.001	
	①	最適解	4 23.56	1 0.10	4 23.56	26676			
	②	比較解	3 28.28	1 0.10	3 28.28	28021	$\delta_a = 3.0$ cm		
	③		5 23.56	1 0.10	5 23.56	30012			
Case 3		初期値	1 20.00	1 20.00	1 20.00	19142	8	1.004 0.879	
	①	最適解	1 0.10	5 28.37	1 0.10	12839			
	②	比較解	1 0.10	4 33.10	1 0.10	13311	$\delta_a = 2.0$ cm		
	③		1 0.10	3 39.72	1 0.10	13973			
Case 4		初期値	5 20.00	5 20.00	5 20.00	34456	7	1.002 1.002	
	①	最適解	1 0.10	2 49.85	1 0.10	15027			
	②	比較解	1 0.10	1 36.47	1 0.10	16688	$\delta_a = 1.0$ cm		
	③		1 0.10	3 49.85	1 0.10	17518			
Case 5		初期値	1 20.00	1 20.00	1 20.00	19142	8	1.004 0.638	
	①	最適解	1 0.11	1 0.13	5 40.21	25664			
	②	比較解	1 0.11	1 0.13	4 46.91	26608	$\delta_a = 4.0$ cm		
	③		1 0.11	1 0.13	3 56.29	27934			

1) M_i : 使用鋼種 2) A_i : 部材断面積 (cm^2) 3) TCOST = TOTAL COST OF TRUSS (¥)

4) ITE = Number of iteration required to obtain optimum solution 5) 本方法による解 6) 使用鋼種を固定

2) 10 部材トラス

図-7 に示す10 部材トラスにおいて、各節点の δ_a を 20.0 cm および 1.0 cm とした場合の最適解への収束過程およびその最適解を、それぞれ図-8、9 および表-3 に示す。

図-8 に示す $\delta_a = 20.0$ cm の設計問題においては、たわみ制限に余裕があるので、各部材の鋼種および断面積は応力制限により決定されている。すべての部材の初期鋼種を 1 と仮定しても、9 回の改良を経て、最適解において必要となる部材 1、2、5、6、9、10 の最適鋼種はすべて 5 となり、妥当な最適鋼種および断面積となっている。また、最適解において不要となる

部材に関する鋼種の選択過程は、それぞれの部材に作用する部材力の状態により多少異なり、かつ不安定であるが、その断面積はすべて断面積の下限値近傍の値となっており、主要部材と比較して極めて微小な断面積を有する部材となっている。したがって、これらの部材にいかなる鋼種を選択しても、トラス構造物全体の TCOST にはほとんど影響を与えない。

一方、図-9 に示す $\delta_a = 1.0$ cm の設計問題では、すべての部材の断面積がたわみ制限により決定され、全部材の初期鋼種を 5 と仮定しても、4 回の改良ですべての部材の鋼種が 1 に変更され、さらに 4 回の改良で、 $\delta_a = 20.0$ cm の例と同様に、部材 1、2、5、6、9、10 が主要部材となる最適解を決定している。なお、最適解において不要となる部材 3、4、7、8 の断面積が、断面積の下限値より多少大きな値となっているのは、本研究の設計例における最適解の判定基準として、すべての制約条件を満足し、かつ、TCOST の変化量が 0.3% 以内となった時、最適解に収束したものと判断する判定基準を用いているためであり、1 回目の改良ですでに断面積の下限値 0.1 cm² となっている部材 8 を除く部材 3、4、7 の断面積は、図-9 に示す部材 3 の断面積 (A_3) の改良経過のように、すべて一様に減少してきており、最適解の判定基準をさらに厳しくして改良を繰り返すことにより、すべての不要な部材の断面積を確実に下限値に収束させることができる。

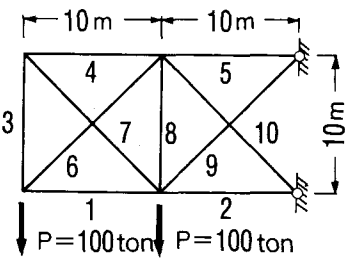


図-7 10 部材トラス

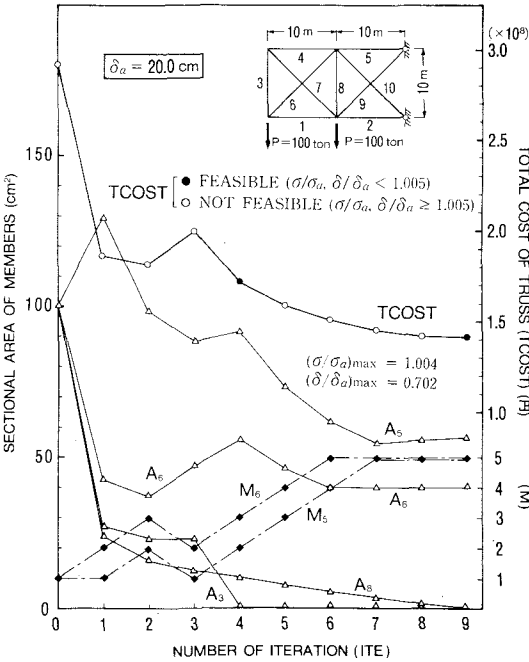


図-8 10 部材トラスの収束過程 ($\delta_a = 20.0$ cm)

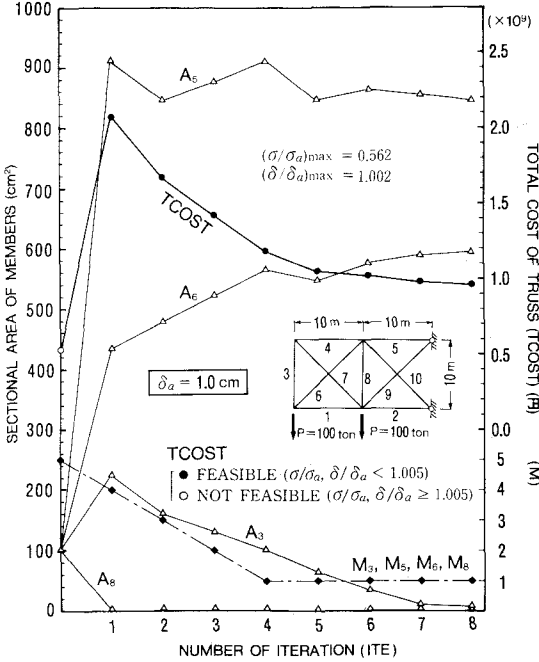


図-9 10 部材トラスの収束過程 ($\delta_a = 1.0$ cm)

表-3 10部材トラスの初期値および最適解

		M ₁ ¹⁾	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆	M ₇	M ₈	M ₉	M ₁₀
		A ₁ ²⁾	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀
		TCOST (円) ³⁾									
δ _a = 20.0 cm	初 期 値	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00	1 100.00
		291421 × 10 ³									
	最 適 値	5 28.36	5 57.58	4 0.24	4 0.24	5 56.70	5 40.11	4 0.34	4 0.27	5 41.03	5 39.79
141644 × 10 ³											
δ _a = 1.0 cm	初 期 値	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00	5 100.00
		524558 × 10 ³									
	最 適 値	1 420.98	1 622.98	1 9.68	1 9.43	1 846.75	1 595.40	1 14.32	1 0.10	1 165.27	1 595.55
962035 × 10 ³											

1) M_i : 使用鋼種 2) A_i : 部材断面積 (cm²) 3) TCOST = TOTAL COST OF TRUSS (円)

9. 結 語

本論文において、双対理論および制約条件の線形近似に基づく Dual Approach により、弾性係数が等しく、許容応力度および製作単価が離散的に異なる材種群より、各構造要素の最適な使用材種および寸法諸元を同時に決定する方法を提案した。

本研究で提案している設計法では、各構造要素の最適な使用材種を決定するために材料選択変数を導入し、この設計変数と断面寸法に関する設計変数に関して原設計問題の近似の設計問題を作成する。つぎに、この近似設計問題のラグランジュ関数を、双対変数について最大化、原設計変数について最小化することにより、構造要素の使用材種および断面寸法を改良するものである。この場合、構造物全体のラグランジュ関数は、各構造要素のみの設計変数の関数の和として表わされ、この関数を各要素毎に独立に、離散的な材料選択変数および断面寸法変数について最小化することにより、各要素の使用材種および断面寸法を改良することができ、離散値をとる材料選択変数の取り扱いが極めて単純かつ容易となる。なお本研究では、近似設計問題の近似の精度を考慮し、1回の改良における材種の変化可能範囲を、物理的性質が隣接している1ランク上位あるいは下位の材種のみに限定している。また、ラグランジュ関数の双対変数に関する最大化はニュートン法により行っているが、Dual Approach では設計変数の改良方向の決定に必要な制約条件の二次の偏微係数を、一次の偏微係数を利用して単純な計算式で求めることができる。さらに、active な制約条件の数と同じ次元を有する双対変数空間でのラグランジュ関数の最大化問題は、材料選択変数をも加えた原設計変数空間で、一般の非線形計画法を用いて解く方法と比較してはるかに次元数が小さくなり、関数の最大化をより容易に行うことができる。このことも Dual Approach に基づく設計法の大きな長所の一つである。

また、本論文の方法を、許容応力度および製作単価の異なる5種類の鋼種群より、不静定トラス構造物の製作費を最小とするように各部材の最適な鋼種および断面積を決定する種々の設計問題に適用し、得られた解の最適性、収束性、アルゴリズムの信頼性などについて検討を行った。その結果、トラス構造物の各部材の最適な鋼種への改良が極めてスムーズに、かつ正確に行われること、各改良鋼種に対する最適な部材断面積もニュートン法により能率的に決定できること、最適解への収束性および計算効率もきわめて高いことなどが明らかとなり、Dual Approach に基づく設計法が、構造要素の断面諸元の最適化問題のみならず、離散値をとる使用材種の最適選択の問題に対しても、きわめて有効に利用できることが明らかとなった。

最後に、本研究において計算結果のまとめや図表の作成などにご協力いただいた愛媛大学工学部土木工学科 谷端良次技官、および構造工学研究室の学生 中嶋毅君 に謝意を表する。また、計算は愛媛大学情報処理センターのFACOM M-180-IIAD により行ったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Fleury, C. and Schmit, L. A.: Dual Methods and Approximation Concepts in Structural Synthesis, NASA CR-3226, December 1980.
- 2) Morris A. J. ed.: Foundations of Structural Optimization - A Unified Approach, John Wiley, chapter 13, 1982.
- 3) 大久保植二・谷脇一弘: 双対理論および部材の Suboptimization によるトラス構造物の最適設計法, 土木学会論文集, 第 350 号/I-2, pp. 331~340, 1984 年 10 月.
- 4) 大久保植二・谷脇一弘: 双対理論による構造最適化に関する研究, 愛媛大学工学部紀要, 第 10 巻, 第 2 号 pp.135~150, 昭和 58 年 2 月.
- 5) Reinschmidt, K. F.: Discrete Structural Optimization, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 97, No. ST 1, pp. 133~156, January 1971.
- 6) 奥村敏恵・大久保植二: Suboptimization による鋼連続桁の最適設計, 土木学会論文報告集, 第 215 号, pp.1~14, 1973 年 7 月.
- 7) 大久保植二・奥村敏恵: 図式解法による鋼 I 桁の最適設計, 土木学会論文報告集, 第 252 号, pp. 23~34, 1976 年 8 月.
- 8) 杉本博之: トラス構造物の実用的最適設計に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 208 号, pp.23~31, 1972 年 12 月.
- 9) Konishi, Y. and Maeda, Y.: Optimum Design of Trusses Using Suboptimization, Proc. of JSCE, No. 333, pp. 173~181, May 1983.
- 10) 大久保植二・谷脇一弘・上野盛勝: Dual Approach における双対変数の決定法に関する検討, 愛媛大学工学部紀要, 第 10 巻, 第 4 号, (昭和 60 年 2 月刊行予定).