

非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析 における不連続面の取り扱いについて

A NEW JOINT ELEMENT FOR THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF AN AXISYMMETRIC BODY
SUBJECTED TO NON-AXISYMMETRIC LOADING

* **

小堀為雄 近田康夫

By Tameo KOBORI and Yasuo CHIKATA

In this paper, a new joint model for semi-analytical finite element analysis of an axisymmetric body subjected to non-axisymmetric loading is presented. The new joint model for axisymmetric interface has three degrees of freedom; normal, tangential and circumferential direction, and can describe debonding (normal direction), and slip (tangential and circumferential direction) on the interface. The new joint model was incorporated into a finite element program and test-case analyses were performed. The results indicate that the new joint model is useful for the semi-analytical finite element analysis of an axisymmetric body subjected to non-axisymmetric loading.

1. まえがき

フーチング—地盤系や節理を有する岩盤等の有限要素解析においては、フーチングと地盤との境界面や岩盤中のクラック (Crack) 等の不連続面を表現するために、ジョイント要素 (Joint element) がしばしば用いられる。このジョイント要素は、Goodmanら¹⁾による、厚みが0の4節点2次元要素に端を発し、今日まで種々のジョイント要素が提案されている。これらのジョイント要素の共通点は、不連続面において、剥離および滑りが表現可能なことである。

さて、解析対象内に存在する不連続面を考慮して、フーチング—地盤系や杭—地盤系の有限要素解析を行う場合、解析対象を軸対称体としてモデル化することにより、より実際に近いモデル化が可能となるが、これに対応したジョイント要素としては、筆者らの知る限りでは、Ghaboussiら²⁾、Heuzeら³⁾そして佐々木ら⁴⁾により提案されたものがある。しかし、これら3者により提案されているジョイント要素は、いずれも軸対称問題を対象としているため、非軸対称荷重の作用する場合には適用できない。例えば、杭—地盤系の解析では、鉛直載荷条件には適用できるが、水平載荷条件には適用できないのである。

本報告では、Goodmanらが文献1)で提案したジョイント要素を発展させて、非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析 (直交関数を用いた半解析的手法) に適用可能なジョイント要素を提案するとともに、若干の解析例を示すものである。

* 工博 金沢大学教授 工学部建設工学科 (〒920 金沢市小立野2丁目40-20)

** 工修 金沢大学助手 工学部建設工学科 (〒920 金沢市小立野2丁目40-20)

2. ジョイント要素の要素剛性マトリックスの導出および解析手順

Fig. 1 に示すように、円筒座標系 (r, z, θ) において、長さ L 、厚さ 0 の長方形回転断面を有する回転要素を考える。局所座標系 (ξ, η, θ) の原点を要素中央に取り、以下では局所座標系で考える。

要素の上辺 (3-4) と下辺 (1-2) との相対変位は、節点変位を用いて次式のように表せる。

$$d = N u \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} d &= \{ d_\xi \quad d_\eta \quad d_\theta \}^T \\ N &= [-N_1 I \quad -N_2 I \quad N_2 I \quad N_1 I] \\ u &= \{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4 \}^T \end{aligned} \right\} (2)$$

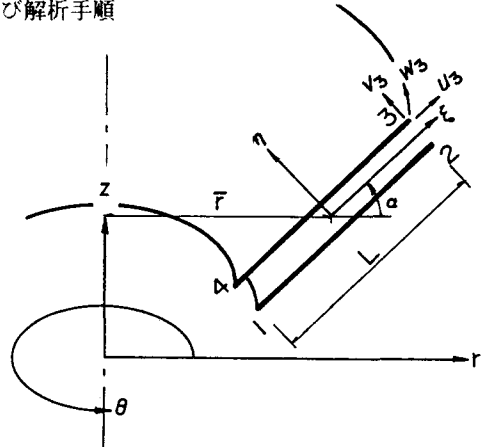


Fig. 1 Notation for joint element

ただし、 d_i ($i = \xi, \eta, \theta$) は i 軸方向の上、下辺間の相対変位、 I は 3×3 単位行列、 u_i, v_i, w_i ($i = 1 \sim 4$) は節点 i の ξ, η, θ 方向変位、 N_1, N_2 は、 $N_1 = 0.5(1 - 2 \cdot \xi/L)$ 、 $N_2 = 0.5(1 + 2 \cdot \xi/L)$ なる形状関数である。

一方、単位長さあたりに働く力 p と節点変位との関係は次式のように書くことができる。

$$p = k N u \quad (3)$$

$$p = \{ p_\xi \quad p_\eta \quad p_\theta \}^T, \quad k = \text{diag} [k_\xi \quad k_\eta \quad k_\theta] \quad (4)$$

ただし、 p_i ($i = \xi, \eta, \theta$) は p の i 軸方向成分、 k_i ($i = \xi, \eta, \theta$) は i 軸方向の接合剛性である。

いま、変位および荷重が、 $\theta = 0$ 断面に関して対称であり、かつ 0 次から M 次までのフーリエ (Fourier) 級数として表すことができるとすれば、

$$d = N \sum_{m=0}^M C_m u_m, \quad f = \sum_{m=0}^M C_m f_m \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} C_m &= [c_m \quad c_m \quad c_m \quad c_m] , \quad c_m = \text{diag} [\cos m\theta \quad \cos m\theta \quad \sin m\theta] \\ f_m &= \{ f_{\xi_1} \quad f_{\eta_1} \quad f_{\theta_1} \quad \cdots \quad f_{\xi_4} \quad f_{\eta_4} \quad f_{\theta_4} \}^T \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし、 u_m, f_m は、フーリエ級数表示した変位、荷重のフーリエ係数であり、 f_{ji} ($j = \xi, \eta, \theta$)、($i = 1 \sim 4$) は節点 i に作用する節点力の j 軸方向成分である。

この、フーリエ級数を用いた半解析的手法は、文献 5) に詳しいが、最終的にフーリエ次数ごとに平衡方程式が分離される。したがって、Eqs. (1) ~ (6) より第 m 調和成分に関する要素剛性マトリックスは次式のように得られる。なお、要素の厚みは 0 であるから、要素内の変位、応力は ξ, θ 方向にのみ分布し、体積分は ξ, θ 方向に関してのみ行う。

$$K_m = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} C_m^T N^T k N C_m r d\xi d\theta$$

$$= \frac{\pi \bar{r} L}{4} \begin{bmatrix} k_{\xi} & 0 & 0 & k_{\xi} & 0 & 0 & -k_{\xi} & 0 & 0 & -k_{\xi} & 0 & 0 \\ & k_{\eta} & 0 & 0 & k_{\eta} & 0 & 0 & -k_{\eta} & 0 & 0 & -k_{\eta} & 0 \\ & & k_{\theta} & 0 & 0 & k_{\theta} & 0 & 0 & -k_{\theta} & 0 & 0 & -k_{\theta} \\ & & & k_{\xi} & 0 & 0 & -k_{\xi} & 0 & 0 & -k_{\xi} & 0 & 0 \\ & & & & k_{\eta} & 0 & 0 & -k_{\eta} & 0 & 0 & -k_{\eta} & 0 \\ & & & & & k_{\theta} & 0 & 0 & -k_{\theta} & 0 & 0 & -k_{\theta} \\ & & & & & & k_{\xi} & 0 & 0 & k_{\xi} & 0 & 0 \\ & & & & & & & k_{\eta} & 0 & 0 & k_{\eta} & 0 \\ & & & & & & & & k_{\theta} & 0 & 0 & k_{\theta} \\ & & & & & & & & & k_{\xi} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{\eta} & 0 \\ & & & & & & & & & & & k_{\theta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Symmetric

ただし、 $\bar{r}$ は要素中心までの全体座標系における r 軸方向の距離である。また、Eq. (7)の積分は、要素中心での一点積分を行っている。

Eq. (7)にはフーリエ次数 m が含まれないことから $m \geq 1$ に対しては同一の要素剛性マトリックスとなるが、 $m=0$ の場合は、軸対称問題に対応しており、Eq. (7)を2倍する必要がある。この場合($m=0$)、 K_0 は、 θ 軸に関する行と列を取り除けば、Heuzeらが文献3)で導いた軸対称ジョイント要素の要素剛性マトリックスに等しい。

Eq. (7)は、局部座標系に対するものであるが、一般の場合、全体座標系への変換が必要であり、次式のような変換式で表現される。

$$K_m^g = T^T K_m T \quad (8)$$

$$T = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし、 α は、 ξ 軸と r 軸との成す角(反時計回り)である。

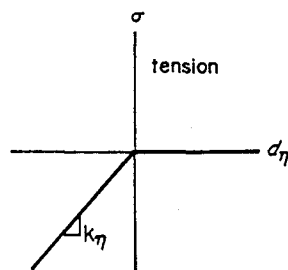
つぎに、ジョイント要素の構成関係は、以下のように与えることにする。⁶⁾

ジョイント要素は、要素面に垂直方向に引っ張り強度をもたず、引っ張り力が作用した場合には剥離が生じ、一切の力の伝達を行わない。また、要素に圧縮力が作用する場合には、ばね定数 k_{η} を介して線形挙動をする。

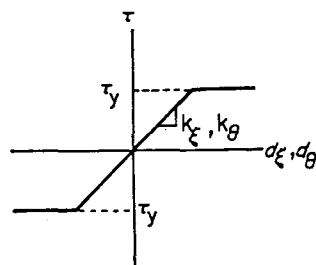
剪断(ξ および θ)方向では、要素に剥離が生じた場合には剪断力は伝達されず、要素に圧縮力が作用する場合には、剪断力の絶対値が降伏剪断力 τ_y に達するまでは剪断ばね定数 k_{ξ} または k_{θ} を介して線形挙動をし、 τ_y に達したのちは滑動が生じる。

この構成関係はFig.2 (a), (b)のように表せる。

降伏剪断力 τ_y は、Mohr-Coulombの降伏条件に従うものとし、次式のように書くことができる。



(a) Normal direction



(b) Tangential and circumferential direction

Fig. 2 Load-deflection curve

$$\begin{aligned}\tau_y &= c - \sigma \cdot \tan \phi \quad (\sigma \leq 0) \\ \tau_y &= 0 \quad (\sigma > 0)\end{aligned}\quad (10)$$

ただし、 c および ϕ はそれぞれ粘着力および内部摩擦角である。本研究では要素中心での応力が任意の θ 断面で一様に分布するものとする。

要素中心での要素に垂直な応力 σ 、要素に平行な方向の剪断力 τ_ξ および円周方向の剪断力 τ_θ は、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma &= k_\eta (-v_1 - v_2 + v_3 + v_4) / 2 \\ \tau_\xi &= k_\xi (-u_1 - u_2 + u_3 + u_4) / 2 \\ \tau_\theta &= k_\theta (-w_1 - w_2 + w_3 + w_4) / 2\end{aligned}\quad (11)$$

以上のような定式化によれば、例えば、フーリエ次数 $m=1$ の場合 Fig. 3 のような変形モードを考えることになる。

さて、本報告で提案したジョイント要素を用いて、非軸対称荷重を受ける軸対称体の解析手順を以下に略記する。

- (1) 0 次から M 次までの分離された $M+1$ 組の平衡方程式を解き、得られた解をフーリエ合成することにより、変位、応力等を円周方向に $M+1$ の断面について求め、前段階での値に加える。
- (2) 各断面ごとにジョイント要素の剥離、滑りの判定を行い、解放すべき応力に対応した節点力を求める。この結果、不平衡節点力の θ 方向分布が得られる。
- (3) 不平衡節点力の θ 方向分布をフーリエ分解し、0 次から M 次までの不平衡節点力の調和成分を求める。
- (4) 幾つかの θ 断面で次式により収束判定を行う。

$$\Psi^r / \Psi^0 < \varepsilon \quad (12)$$

ただし、 Ψ^r は r 回目までの繰り返し後の残差力ベクトルのノルムであり、 ε は収束判定値である。

- (5) 収束条件が満足されるまで(1)~(4)を繰り返す。

要素は、円周方向に一定な物性をもつので、一般のジョイント要素のように、剥離が生じた以降において接合剛性を 0 とすることはできず、応力分配法と同様の手順をとることになる。⁷⁾

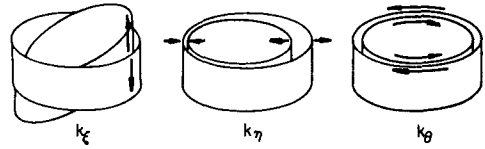


Fig. 3 Schematic of modes of deformation at the interface ($m=1$)

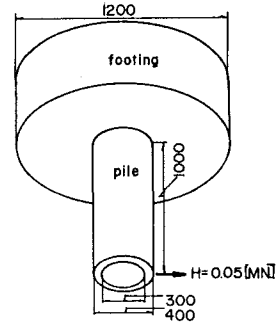


Fig. 4 Connection between pile-head and footing

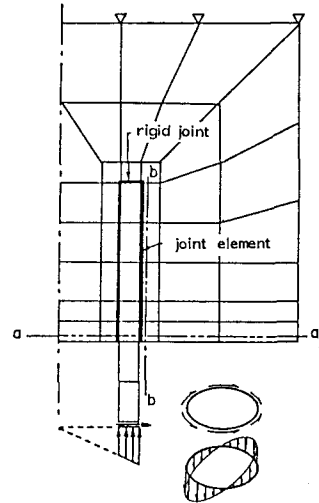


Fig. 5 Finite element mesh

3. 解析例

解析例として、Fig. 4 に示すような、杭頭—フーチング結合部において、杭先端に水平力が作用した場合の解析に、前章で導出したジョイント要素を用いる。解析対象は、Fig. 4 からわかるように弾性結合された片持ち梁と等価であるが、梁部

Table 1 Physical properties

Pile, Footing	
Young's modulus E	$= 2.0 \times 10^4$ MPa
Poisson ratio	$= 0.17$
Joint	
k_η	$= 2.0 \times 10^4$ MPa/m
$k_\xi = k_\theta$	$= 1.0 \times 10^4$ MPa/m
C	$= 0.5$ MPa, $\phi = 30^\circ$

分の解析が目的ではないのでFig. 5のような解析モデルに変換し、荷重も等価な断面力に変換している。

解析対象の物理諸元は、Table 1に示すとおりである。

ここでは、ジョイント要素のみが非線形挙動をし、杭およびフーチングは線形挙動をするものとする。また、杭頭頂面のジョイント要素は剥離、滑りを生じない (rigid joint) ものとする。

剥離や滑りの判定は $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ (rad.) の5断面について行う。したがって0次から4次までの5調和成分に関する解析である。

収束判定値 ε の値は0.03 (3.0 %) とした。

解析結果をFig. 6, Fig. 7に示す。

Fig. 6, Fig. 7は、それぞれFig. 5の a-a 断面 ($\theta = 0, \pi$) での σ_z の分布、b-b 断面 ($\theta = 0, \pi$) での σ_r の分布を示している。

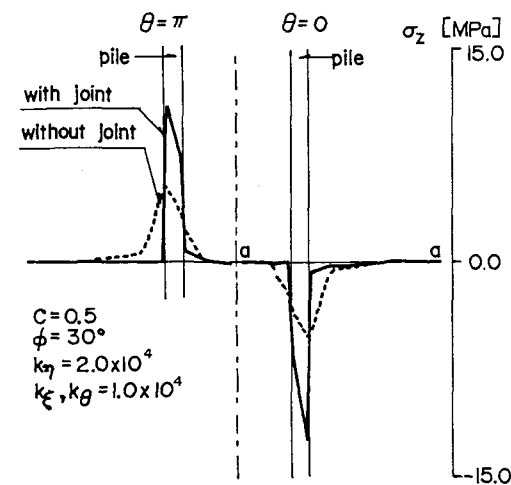


Fig. 6 Profiles of vertical stress on cross section a-a

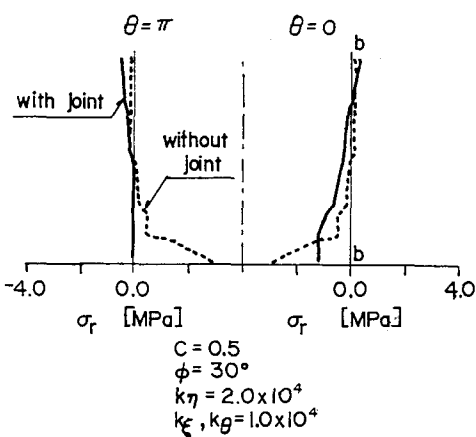


Fig. 7 Profiles of horizontal stress on cross section b-b

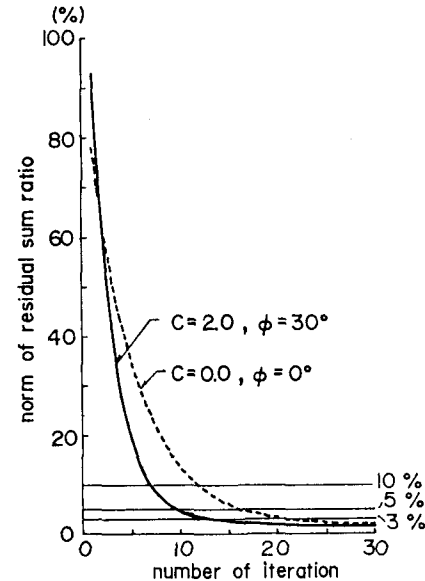


Fig. 8 Processes of convergence

応力分布はジョイント要素を入れた場合を実線で示し、これと比較するためにジョイント要素を入れない場合の結果を破線で示した。いずれの図においても、 $\theta = \pi$ 断面では剥離が生じ、ジョイント要素を入れた場合に杭の外側で引っ張り応力の分布が不連続となっている。ジョイント要素を入れない場合 (破線) と比較すれば、応力が伝達されていない状態をよく理解できる。

Fig. 7では、 $\theta = \pi$ 断面で剥離が生じたことにより、全体として、テコと同様の支持状態となっていることがよく理解できる。また、 $\theta = 0$ 断面のフーチング下面近傍においては、滑りが生じておらず、フーチングの捲き込みによるため σ_r はあまり増加しない。

つぎに、Fig. 8には、上述の解析例に用いたモデルに対して、ジョイント要素が、滑りが生じない場合 ($c = 2.0, \phi = 30^\circ$) および、全く摩擦が無い場合 ($c = 0.0, \phi = 0^\circ$) に関して、反復回数と解の収束状況との関係を示し

た。Fig. 8 には、すべりが生じない場合を実線で、全く摩擦が無い場合を破線で表しているが、いずれの場合にも、最大残差力ノルム比 (Eq. (12) の左辺の値) は、ほぼ20%までは直線的に減少するが、その後急激に減少傾向は鈍り、全体としては双曲線的な変化の傾向であり、3%以下の収束限界を与えた場合には、かなりの回数の反覆計算が必要となる。また、滑りが生じない場合の方が応力の開放が少ないので収束に必要な反覆計算の回数は幾分少ない。部分的に滑りの生ずる場合には、2つの曲線の間での収束傾向を示すことになる。

4. むすび

Goodmanらが文献1)で提案したジョイント要素を発展させて、非軸対称荷重を受ける軸対称体の有限要素解析に適用可能なジョイント要素を提案するとともに、解析例を示し、その有効性を検討した。

ここで提案したジョイント要素は、剥離や滑りをうまく表現することができた。また、本報告では、ジョイント要素の構成関係を引っ張り強度0として与えたが、もちろん、初期にはある程度の引っ張り強度をもち、剥離の発生後に引っ張り強度0となるような構成関係を与えることによる剥離、滑りの発生過程の追跡も可能であり、このジョイント要素の実用性は高いと考えられる。

最後に、本報告で示した数値計算例は、金沢大学計算機センター設置のFACOM M-170Fで行ったこと、および、使用プログラムは、文献8)、9)を参考に改良を加えたものを使用したことを付記する。

参考文献

- 1) R.E.Goodman, R.L.Taylor, T.L.Brekke : "A MODEL FOR MECHANICS OF JOINT ROCK", Proc. of ASCE, vol.94, SM3, pp. 637~659, 1968
- 2) J.Ghaboussi, E.L.Wilson, J.Isenberg : "FINITE ELEMENT FOR ROCK JOINTS AND INTERFACES", Proc. of ASCE, vol.9, SM10, pp.833~849, 1973
- 3) F.E.Heuze, T.G.Barbour : "NEW MODELS FOR ROCK JOINTS AND INTERFACES", Proc. of ASCE, vol. 108, GT5, pp.757~776, 1982
- 4) 佐々木松典, 中井照夫 : "周面摩擦を考慮した杭の支持力問題の有限要素解析", 土木学会全国大会学術講演会講演概要集 III-245, pp.487 ~488, 1982
- 5) O.C.Zienkiewicz 著, 吉識雅夫, 山田嘉昭 監訳 : "基礎工学におけるマトリックス有限要素法", pp. 255~273, 培風館, 1975
- 6) 土岐憲三, 佐藤忠信, 三浦房紀 : "強震時における地盤と構造物の間の剥離と滑動", 土木学会論文報告集, 第302号, pp. 31~41, 1980
- 7) O.C.Zienkiewicz, S.Valliapan, I.P.King : "STRESS ANALYSIS OF ROCK AS A 'NO TENSION' MATERIAL", Geotechnique, vol.18, pp. 56~66, 1968
- 8) D.R.J.Owen, E.Hinton : "FINITE ELEMENTS IN PLASTICITY THEORY AND PRACTICE", pp.157~269, PINERIDGE PRESS, 1980
- 9) 小堀為雄, 吉田博 : "有限要素法による構造解析プログラム", pp.218~220, 251~257, 丸善, 1980