

新離散化モデルによる基礎を考慮した骨組構造物の極限解析

LIMIT ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURE INCLUDING EFFECT OF THE FOUNDATION
USING NEW DISCRETE MODEL

* ** ***

三藤 正明 竹内 則雄 川井 忠彦

By Masaaki MITO, Norio TAKEUCHI and Tadahiko KAWAI

It has been already confirmed that the beam element of the new discrete model proposed by KAWAI is very useful for limit analysis of framed structure. This paper presents its application to the soil-structure interaction problem of such framed structures. The structure is discretized by using new beam elements and soil is assumed to be visco-elastic, visco-plastic foundation which are expressed as combination of springs, dashpots and sliders. In this model effect of soil reaction distributed along individual beam component is integrated and it is replaced by three different springs lumped at the center of a given beam. As a result, analysis of such non-linear problems can be simplified to great extent. The usefulness of this method will be discussed with some examples.

1. まえがき

実際の構造物の応力解析を行なうとき、その構造物を理想化し、梁要素で近似する場合がたびたびある。この梁要素は通常の骨組構造物のみならず、くいや矢板あるいは地下埋設管のように地盤中の梁としても多く用いられている。その際、地盤をHookeの法則に従う弾性体とし、地盤反力が梁のたわみに比例するという仮定は初めWinklerにより導入された。しかし、実際の地盤の物理的な性質はWinklerの仮定のような単純な数学的な関係で表わされるものは少なく、多かれ少なかれ、粘性的な性質あるいは粘性と塑性が混合した性質を導入せざるを得ない。このような観点から地盤の一般的な力学的モデルとして、Hookeの法則に従うバネとNewton流体を表わすダッシュポット、塑性を表わすスライダーを適当に組み合わせた各種地盤モデルが提案されている。この地盤モデルのうちで最も簡単なものとしては、定応力状態におけるクリープ現象を表わすのに適しているKelvinモデル、定ひずみ状態における応力緩和現象を表わすことができるMaxwellモデル、塑性流動を表現するBinghamモデルなどが考えられる。しかし、実際の地盤の力学的挙動は非常に複雑であり、Kelvinモデル、Maxwellモデル、Binghamモデルを適用できる例はごく一部でしかなく、一般にはさらに複雑なモデルが必要となる。

* 五洋建設株式会社 (〒112 東京都文京区後楽2-2-8)

** 工博 (株)国際テクノロジー・センター (〒101 東京都千代田区神田淡路町1-19)

*** 工博 東京大学生産技術研究所・教授 (〒106 東京都港区六本木7-22-1)

さて、通常の3次の変位関数を仮定する梁要素を用いて、Winkler 型の地盤を集中バネとして取り扱わず厳密に剛性行列を求めようとすると、剛性行列は複雑なものとなる。さらに、地盤の粘性、塑性をも考慮すれば、陽な型で剛性行列を得ることはほとんど不可能となる。ところが、新しい梁要素は剛体変位場を仮定しているため、分布している地盤の影響をあらかじめ積分することで支点バネ的に集中化でき、剛性行列も極めて簡単に求めることができる。^{1), 2)} このような利点を使用すれば、地盤の粘性、塑性といった性質も簡単に考慮できる。本論文の目的は、新しい梁要素をもちいることにより、従来の3次関数を仮定する梁要素では極めて複雑な式を用いなければ解析できなかった地盤の粘性、塑性といった問題が、簡単にしかも精度よく求まることを立証するものである。

2. 新しい梁要素の剛性行列

図1に示すような要素重心に剛体変位 ($\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\theta}$) を考える。ここで、上付きの-は局所座標系であることを示す。さて、要素Iと要素IIの接合部に(1)式で示される軸力、せん断、曲げモーメントに抵抗する3種類のスプリング (K_N , K_S , K_M) を設定する。

$$[D] = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_S & 0 \\ 0 & 0 & K_M \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$K_N = 2EA/(\ell_1 + \ell_2) \quad (2)$$

$$K_S = 2\alpha GA/(\ell_1 + \ell_2) \quad (3)$$

$$K_M = 2EI/(\ell_1 + \ell_2) \quad (4)$$

ここで、 ℓ_1 , ℓ_2 はそれぞれ部材長、 EI は曲げ剛性、 GA はせん断剛性、 EA は軸剛性である。また、 α は有効せん断係数を示す。ところで、この3種類のスプリングに貯えられるひずみエネルギーは(5)式のように表わされる。

$$V = V_N + V_S + V_M \quad (5)$$

$$V_N = K_N \cdot \delta_N^2 / 2 \quad (6)$$

$$V_S = K_S \cdot \delta_s^2 / 2 \quad (7)$$

$$V_M = K_M \cdot \phi^2 / 2 \quad (8)$$

ここで、 δ_N , δ_s , ϕ は相対変位ならびに相対回転角で、重心の剛体変位を用いてつぎのように書き表わすことができる。

$$\{\delta\} = [B] \{\bar{U}_i\} \quad (9)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\ell_1/2 & 0 & 1 & -\ell_2/2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\{\delta\}^t = [\delta_N, \delta_s, \phi] \quad (11)$$

$$\{\bar{U}_i\}^t = [\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{\theta}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{\theta}_2] \quad (12)$$

また、局所座標系と全体座標系の間には次の関係がある。

$$\{\bar{U}_i\} = [T] \{U_i\} \quad (13)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\{U_i\}^t = [u, v, \theta] \quad (15)$$

$$\{\bar{U}_i\}^t = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}] \quad (16)$$

従って、(1)式、(9)式、(13)式から(5)式のひずみエネルギーはマトリックスを用いて以下のように表わされる。

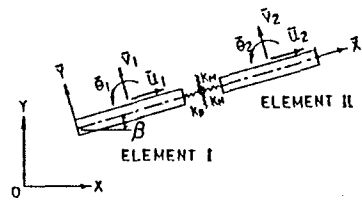


図-1 新しい梁要素

$$\begin{aligned}
 V &= 1/2 \{U_i\}^t \{T\}^t [B]^t [D][B][T] \{U_i\} \\
 &= 1/2 \{U_i\}^t [K] \{U_i\} \\
 (\because [K] &= [T]^t [B]^t [D][B][T])
 \end{aligned} \tag{17}$$

このようにして得られたひずみエネルギー(17)式にカスチリアーノの原理を適用すると、最終的に解くべき方程式が以下のように与えられる。

$$\frac{\partial V}{\partial \{U_i\}} = \{P\} = [K] \{U_i\} \tag{18}$$

ここで、 $\{P\}$ は外荷重ベクトルで以下に示す。

$$\{P\}^t = [X_1, Y_1, M_1, X_2, Y_2, M_2] \tag{19}$$

つぎに、塑性化後の梁の構成式について述べる。³⁾いま塑性ポテンシャル f を一般的に、

$$f(P, S, M) = 0 \tag{20}$$

とする。ここで、 P は軸力、 S はせん断力、 M は曲げモーメントである。さて、塑性流れ則に従うとつぎの関係式が得られる。

$$\Delta \varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{21}$$

$$\varepsilon^p = (\delta_N, \delta_S, \phi) \tag{22}$$

$$\sigma = (P, S, M) \tag{23}$$

ここで、上付きの(p) は塑性状態の量であることを示す。また上付きの(e) は弾性状態の量を表すものとすれば、

$$\Delta \varepsilon^e = \Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^p \tag{24}$$

となる。ここで、 Δ は増分量であることを意味する。さて、弾性時における断面力と相対変位の間にはつきに示される関係が成立している。

$$\Delta \sigma = [K^e] \cdot \Delta \varepsilon^e \tag{25}$$

従って、(21)式～(25)式を整理して、

$$\Delta \sigma = [K^e] \left(\Delta \varepsilon - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \tag{26}$$

なる、関係が得られる。さらに、(26)式を塑性条件

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot \Delta \sigma = 0 \tag{27}$$

に代入して、 λ について解くと以下の関係式が得られる。

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot [K^e] \cdot \Delta \varepsilon}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot [K^e] \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \tag{28}$$

$$\text{ただし、} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot [K^e] \cdot \Delta \varepsilon > 0 \tag{29}$$

である。(28)式を(26)式に代入すれば、つぎのような関係式が得られる。

$$\Delta \sigma = \left[[K^e] - \frac{[K^e] \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot [K^e]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^t \cdot [K^e] \cdot \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \right] \Delta \varepsilon \tag{30}$$

さて、上記の関係に対し、以下の破壊基準を適用する。

$$f = \pm \left(\frac{M}{M_{px}} \right) + \left(\frac{P}{P_y} \right)^2 - 1 \quad (31)$$

ここで、

M_{px} : 全塑性曲げモーメント

P_y : 全断面塑性軸力

である。いま、塑性化後の構成式を

$$[D^{(p)}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{sym} & & k_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

と表わせば、それぞれの成分は(33)式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_N - \frac{1}{F} \left(\frac{2P}{P_y^2} \right)^2 K_N^2 \\ K_{22} &= K_s \\ K_{12} &= K_{23} = 0 \\ K_{33} &= K_M - \frac{1}{F} \left(\frac{1}{M_{px}} \right)^2 K_M^2 \\ K_{13} &= \mp \left(\frac{2P}{P_y^2} \right) \left(\frac{1}{M_{px}} \right) K_N K_M / F \\ F &= \left(\frac{2P}{P_y^2} \right)^2 K_N + \left(\frac{1}{M_{px}} \right)^2 K_M \end{aligned} \quad (33)$$

3. 粘弾性地盤上の梁の解析⁴⁾

新しい梁要素の精度の検討のため、粘弾性地盤上の梁の解析を行ない、理論解との比較を行なう。さて、粘弾性体は時間に依存する力学的特性をもち、バネとダッシュボットの組み合わせにより近似的に表現でき、その組み合わせによって数多くの構成式が提案されている。本節では、それらのうち図2に示す3種類の粘弾性地盤モデルを想定した。これらは、Freudenthal, Lorschによって線形粘弾性地盤上の梁の解析に用いられた Kelvin モデル、Maxwell モデル、Standard solidモデルである。⁵⁾ここで、図中の K, K_1, K_2 はバネ定数、 η は粘性係数、 P は力を表わす。Standard solid モデルは Kelvin モデルとMaxwell モデルを重ね合わせたものと考えられる。すなわち、図2(C)のバネ定数 K_1 が非常に大きければKelvin モデルと同様なものになり、バネ定数 K_2 が非常に小さければMaxwellモデルと同様なものになる。各モデルに対する力学的特性を明確にするために、一定の力が作用した場合の時間とたわみの関係を図3に示す。図より理解されるように、Kelvinモデルはたわみ速度が時間とともに減じてゆき、最終的にたわみはWinkler の値に収束する。それに対し、Maxwellモデルは力が作用した瞬間は弾性たわみを示すが、その後は時間に比例してたわみが線形増加をし定常クリープ現象となる。

一方、Standard solidモデルは力が作用した瞬間は弾性たわみを示しているが、その後はたわみ速度が時間とともに減じてゆき、Kelvinモデルと同様なたわみが一定値に収束する。つぎに、粘弾性地盤の取り扱い方をStandard solidモデルを用いて行なう。さて、増分力 $\dot{P}$ はMaxwell 要素とバネに配分される増分力 $\dot{P}_1, \dot{P}_2$ の和である。

ゆえに、

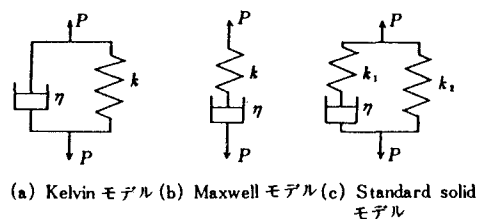


図-2 粘弾性モデル

$$\dot{P} = \dot{P}_1 + \dot{P}_2 \quad (34)$$

である。ここで、 $\dot{P}_1, \dot{P}_2$ は

$$\dot{P}_1 = K_1 \dot{y} - P_1 / \tau \quad (35)$$

$$\dot{P}_2 = K_2 \dot{y} \quad (36)$$

である。(35), (36)式を(34)式に代入すると、

$$\dot{P} = (K_1 + K_2) \dot{y} - P_1 / \tau \quad (37)$$

となる。ここで、 $\tau = \eta / K_1$, 上付きの $\cdot$ は時間による変化率を示す。(37)式を差分表示すれば、増分力 ΔP と増分変位 Δy の関係をつぎのように得ることができる。

$$\Delta P = (K_1 + K_2) \Delta y - P_1 \cdot \Delta t / \tau \quad (38)$$

さて、新しい梁要素では剛体変位場を仮定しているの、図4に示す様に要素重心での垂直変位を v 、回転を θ とすれば任意点におけるたわみ y は

$$y = v + \theta x \quad (39)$$

$$= B \cdot U$$

$$B = [1, x] \quad (40)$$

$$U^t = [v, \theta] \quad (41)$$

となる。増分外力を ΔF とし、仮想増分変位を $\delta \Delta U$ とすれば

$$\delta \Delta U^t \cdot \Delta F = \int \delta \Delta y \cdot \Delta P dx \quad (42)$$

$$= \delta \Delta U^t \int B^t (K_1 + K_2) B dx \Delta U - \delta \Delta U^t \int B^t P_1 \Delta t / \tau dx$$

$$\Delta F = \int B^t (K_1 + K_2) B dx \Delta U - \int B^t P_1 \Delta t / \tau dx \quad (43)$$

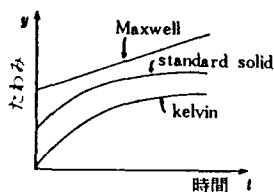


図-3 一定応力作用下のたわみ・時間の関係

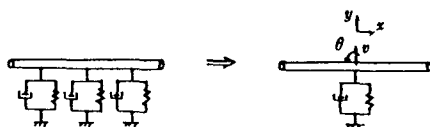


図-4 粘弾性地盤上の新しい梁要素

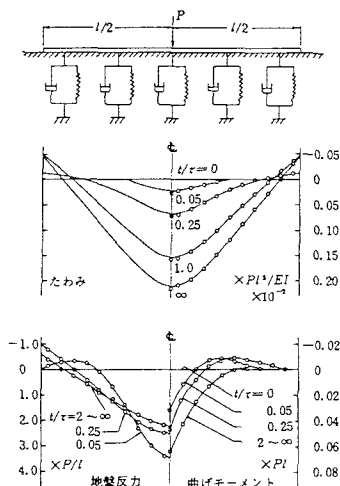


図-5 Kelvinモデルに対する解析解との比較

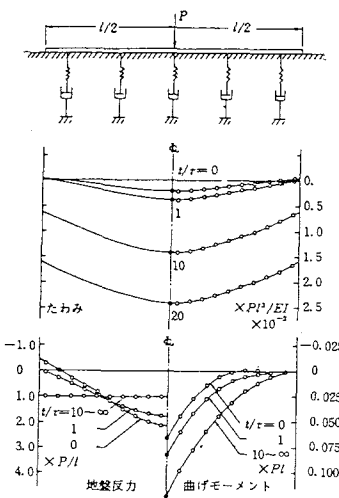


図-6 Maxwellモデルに対する解析解との比較

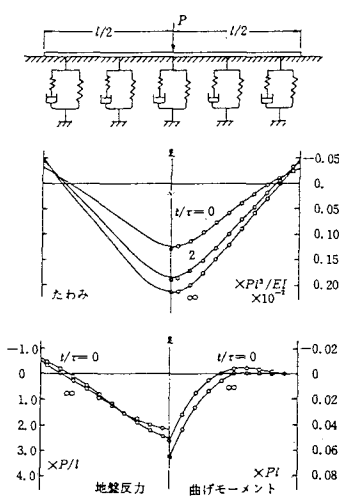


図-7 Standard solidモデルに対する解析解との比較

の関係が得られる。以上により増分外力と増分変位の関係が求まった。

(17)式で示す新しい梁要素剛性行列に(43)式で示したバネ剛性を重ね合わせ、これに初期ひずみ法を適用して任意時刻の解を求める。また、

$$\int B^T (K_1 + K_2) B dx$$

$$= (K_1 + K_2) \begin{bmatrix} l & 0 \\ 0 & l^3/12 \end{bmatrix} \quad (44)$$

となり、分布地盤反力の影響が要素重心に集中化できることがわかる。

さらに、Maxwellモデル、Kelvinモデルについては、 K_1 と K_2 の値を操作することにより、求めることができる。すなわち、Maxwellモデル $K_2 = 0$ とすれば良い。また、Kelvinモデルは K_1 の値を K_2 に比べてかなり大きな値を用いれば良い。

さて、つぎに、本モデルを用いた場合の分布荷重の取り扱いについて説明する。いま、 $q = w_0 + w_1 x$ なる等変分布荷重が作用したとすると、 q のなす増分仮想仕事量は

$$\int \delta \Delta y \cdot q dx = \delta \Delta U^T \int B^T \cdot (w_0 + w_1 x) dx \quad (45)$$

となり、結局増分外力 ΔF は以下のように求まる。

$$\Delta F = \begin{Bmatrix} w_0 l \\ \frac{w_1}{12} l^3 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

本モデルの有効性を検討するため、両端自由な一様断面梁の中央に集中荷重が作用した場合を解析する。用いた断面定数は $(EI/K)/l^3 = 10^{-3}$ になるよう求めた。ここに、 I は断面二次モーメント、 E は弾性係数である。計算に用いた時間きざしはKelvinモデルは $\Delta t/\tau = 0.005$ 、Maxwellモデル、Standard Solidモデルでは $\Delta t/\tau = 0.5$ である。計算ケースとしては梁の分割数と解の収束性を調べるため、半梁長を5, 10, 15, 20分割の合計4ケース行った。

図5, 6, 7は $t/\tau = 0$ から $t/\tau = \infty$ における各モデルのたわみ、曲げモーメント、地盤反力を園田らの解析解と比較したものである。⁶⁾ 図は10分割の例で、実線が園田らの解、○印が本モデルによる計算結果を表わしている。たわみは中央点でやや大きな値を示しているが、全体的に見ればきわめて良好な精度で解が求まっている。また、曲げモーメント、地盤反力は梁全体を通して良好な結果を示している。図8, 9, 10は各モデルの中央点のたわみ、曲げモーメントの誤差および中央点付近の地盤反力の誤差と分割数との関係を、 $t/\tau = 0$ から $t/\tau = \infty$ までの各時刻に対してプロットしたものである。たわみと地盤反力の誤差は分割数が多くなるにつれて減少し、また時間の経過とともに減少することがわかる。曲げモーメントは分割数が増すにつれて高めの解に収束し、時間の経過とともにこの値は減少する。しかし、誤差は正解に対して1~2%であるため、工学的にはほとんど問題にならないものと思われる。

4. 粘塑性地盤を考慮した骨組構造物の極限解析⁷⁾

図11に示す弾塑性体は時間の考慮がなされておらず載荷直後すぐに塑性平衡状態になるものとしている。さらに、第3節で示した粘弾性体は、時間の項は考慮されているものの地盤の降伏は無視している。この弾

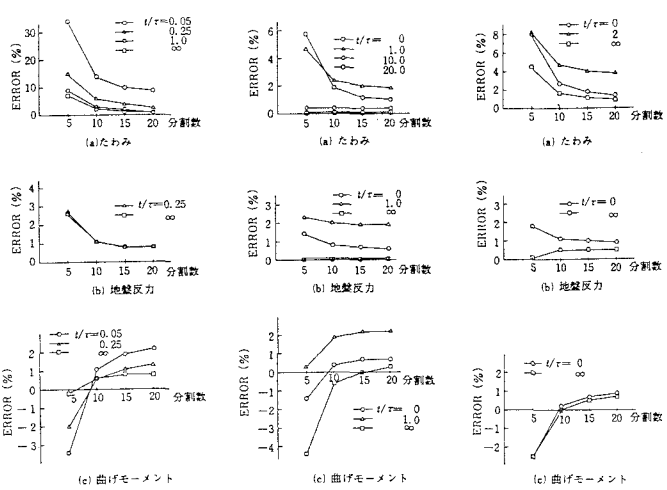


図8 Kelvinモデルに関する梁の中央点の誤差評価

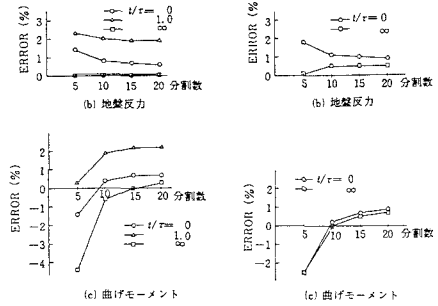


図9 Maxwellモデルに関する梁の中央点の誤差評価

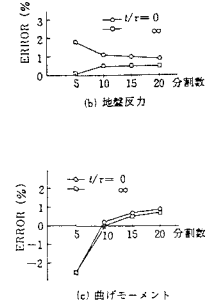


図10 Standard solidモデルに関する梁の中央点の誤差評価

塑性体と粘弾性体の両者を兼ね備えたモデルが粘塑性モデルである。実際の地盤でも地盤が降伏すると回復不可能なクリープ変位が生じるし、さらに、載荷速度を変化させて載荷した場合、急速載荷した方が緩やかに載荷した場合より初期の段階において大きな荷重まで載荷することができる。そこで、ここでは図11に示す降伏後線形クリープ現象を表現するBingham型の粘塑性モデルを用いた。⁸⁾

さて、粘塑性モデルの定式化について説明する。全変位増分量 $\dot{y}$ は、弾性変位増分 $\dot{y}^e$ と粘塑性変位増分 $\dot{y}^p$ の和で表される。

$$\dot{y} = \dot{y}^e + \dot{y}^p \quad (47)$$

ここで、 K をバネ定数とすれば弾性変位増分 $\dot{y}^e$ は

$$\dot{y}^e = \dot{P}/K \quad (48)$$

である。粘塑性変位増分 $\dot{y}^p$ は

$$\dot{y}^p = \langle P - P_y \rangle / \eta \quad (49)$$

$$\langle P - P_y \rangle = \begin{cases} 0 & |P_y| \geq |P| \\ P - P_y & |P_y| < |P| \end{cases}$$

となる。ここで、 P_y は降伏応力を表す。(49)式より作用応力が降伏応力と等しくなれば変位速度は0となり、塑性平衡状態に達する。(48)，(49)式を(47)式に代入し、 Δt を増分時間として差分表示すれば

$$\Delta P = K \Delta y - \langle P - P_y \rangle K \Delta t / \eta \quad (50)$$

となり、増分荷重 ΔP と増分変位 Δy の関係が求まる。ここで、増分形仮想仕事式を用いると以下の関係式が求まる。

$$\Delta F = \int B^t \cdot K \cdot B \, dx \, \Delta U - \int B^t \cdot \langle P - P_y \rangle K \Delta t / \eta \, dx \quad (51)$$

このようにして得られた(51)式を基に、後は粘弾性と同じ手順に従って数値解析を行えばよい。なお、梁要素については第2節で示すような塑性流れ則に従い、完全弾塑性体として扱うものとした。

まず簡単な例として地中の単ぐいの問題を取り上げ、本論文で用いた粘塑性解と弾塑性解とを比較することにより本モデルの有効性について論じる。図12に計算に用いたモデルを示す。また、短いくいと長いくいでは崩壊のパターンが異なるため、くい長が3m、6mの2ケースについて計算を行った。粘性係数は地盤のバネと同じ値を用いた。また、地盤モデルは粘性地盤を想定し、極限地盤反力はBromsの仮定より求めた。⁹⁾この解析モデルの場合、短かくいには6分割、長いくいには12分割を行い離散化した。図13は短かくいについて、くい頭の変位を時刻ごとにプロットしたものである。図からも理解されるように崩壊荷重は20t~25tの間にある。同じモデルを弾塑性解で求めると崩壊荷重は21tであった。図14は長いくいについてプロットした図である。弾塑性解で崩壊荷重は51tであり、ほぼ妥当な解だと思われる。また、くいの塑性ヒンジの発生する位置も弾塑性解と同じであった。なお、弾塑性解についても本モデルを用いて求めた。

つぎに、図15に示すような同一部材で形成された骨組構造物の極限解析例を示す。部材、地盤の取り扱いについては、

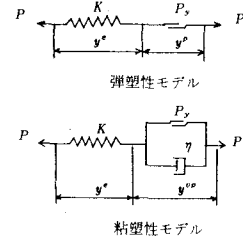


図-11 地盤モデル

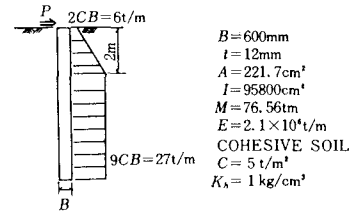


図-12 地中ぐいモデルと材料定数

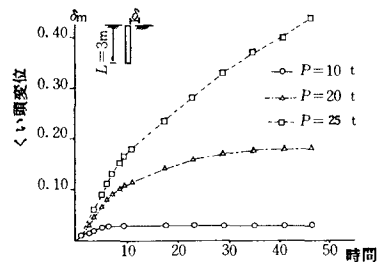


図-13 くい頭変位の経時変化(短いくい)

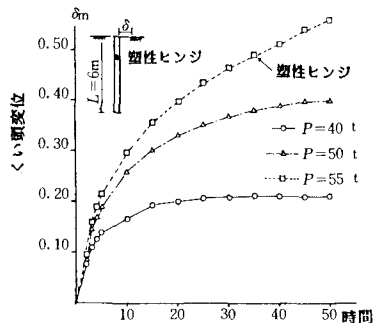


図-14 くい頭変位の経時変化(長いくい)

単ぐいと同じものを用いた。また、分割数としてはくい部は22分割、梁部は8分割である。図16に弾塑性解を示す。なお、図中の番号は破壊の順番を示す。まず地盤の上部が破壊し、さらにくい頭に塑性ヒンジが発生する。その後、地盤の破壊が下方向に進行し、最終的にくいの地中部に塑性ヒンジが発生して崩壊することがわかる。このときの崩壊荷重は51tであった。右図は崩壊時の変形モードを示したものである。さて、つぎに粘塑性の解析結果について説明する。荷重ケースとしては、急速に載荷した場合と緩やかに載荷した場合の2ケース行った。図17, 図18は、載荷速度が異なる場合のくい頭の変位と時間の関係をプロットしたものである。いずれも55tで崩壊モードを示していることがわかり、弾塑性解での51tと比較して、ほぼ妥当な解であることがわかる。また、くい部については、いずれの荷重ケースに対しても塑性ヒンジの発生する位置ならびに順序とも弾塑性解と同じであった。図19, 20は最上層の変位と地盤反力の関係を各荷重に対してプロットしたものである。図中、破線が弾性解析、実線が弾塑性解析による結果である。急速に載荷した方が載荷直後において大きな地盤反力を受けもっていることがわかる。また、くい頭変位が最終的に収束する荷重の場合、急速載荷、緩速載荷をとわず地盤反力が最終的には極限地盤反力内におさまっていることがわかる。

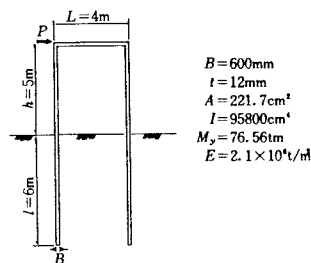


図-15 門型ラーメンモデル

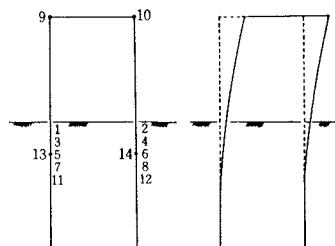


図-16 弾塑性解による破壊状況と最終変位

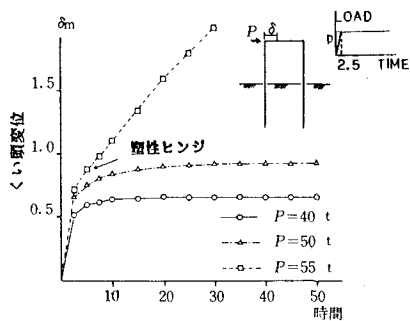


図-17 くい頭変位の経時変化(急速に載荷)

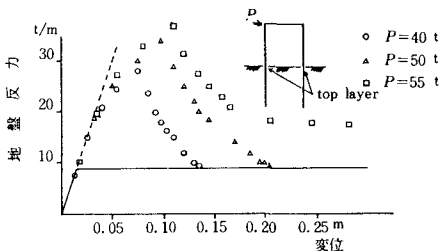


図-19 最上層の変位と地盤反力の経時変化(急速に載荷)

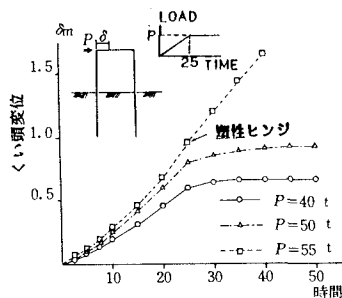


図-18 くい頭変位の経時変化(緩やかに載荷)

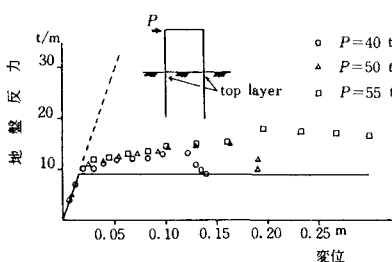


図-20 最上層の変位と地盤反力の経時変化(緩やかに載荷)

5. まとめ

川井によって提案された新離散化モデルの梁要素を用い、地盤を考慮した骨組構造物の解析を行った。地盤に関しては、バネとダッシュポットとスライダーにより近似的なモデル化をした。本論文に述べた解析方法によれば、従来の有限要素では解析が困難だと思われる地盤の粘弾性、粘塑性を考慮した骨組構造物の解析が容易にできることがわかった。

参 考 文 献

- 1) Kawai T. : 'New element models in discrete structural analysys', 日本造船学会論文集、第141号 (1977)
- 2) 竹内則雄、神尾洋一、川井忠彦 : '新しい梁モデルによる弾性床上の梁の解析', 生産研究, Vol. 33 No. 1 (1981)
- 3) 山田嘉昭 : '塑性-粘弾性 有限要素法の基礎と応用シリーズ 6', 培風館
- 4) 竹内則雄、三藤正明、川井忠彦 : '新離散化モデルによる粘弾性地盤上の梁の解析', 生産研究, Vol. 34, No. 11 (1982)
- 5) A.M.Freudenthal and H.G.Lorsch : 'The infinite elastic beam on a linear viscoelastic foundation', J. of the Engineering Mechanics Division, Proc. of A.S.C.E., Vol. 83, EM1, (1982)
- 6) 園田恵一郎、小林治俊、石尾年光 : '線形粘弾性基礎上のはりの解析', 土木学会論文報告集, 第247号 (1976)
- 7) 竹内則雄、三藤正明、川井忠彦 : '新離散化モデルによる粘塑性地盤上の梁の解析', 生産研究 Vol. 35, No. 5 (1983)
- 8) O.C.Zienkiewicz and I.C.Corneau : 'Visco-Plasticity, Plasticity and Creep in elastic Solid, A Unified Numerical Solution Apporoach', Int.J.Num.Eng., vol. 8, (1974)
- 9) 横山幸満 : 'くい構造物の計算法と計算例', 山海堂, (1977)