

## 等価M- $\phi$ 関係を用いた平面骨組の一弾塑性解析

An Elasto-Plastic Analysis of Plane Steel Frames Using the Idea of Equivalent M- $\phi$  Relationship

\* 成行義文 平尾 潔 \*\* 児嶋弘行 \*\*\*

By Yoshifumi Nariyuki, Kiyoshi Hirao and Hiroyuki Kojima

In the case of plane steel frames subjected to proportional static load, many analytical methods considering spread of the plastic zone in members have been reported. Of these, the method in which the plastic zone of the member is divided into numerous elements is generally used. However, it is difficult to apply this method to the analysis of complicated frames and dynamic analysis, because large memory capacity and long computer time is required.

In this paper, we propose a practical method for this kind of analysis. To remove the above-mentioned faults, an equivalent linear moment-curvature relationship is introduced into this method, instead of a theoretical nonlinear one. The equivalent relationship is derived from the condition that rotations of both ends of the member obtained by using the equivalent one are equal to those from the theoretical one. Numerical examples on a few frames show that the method proposed here is practical.

### 1. まえがき

鋼構造骨組が過大荷重をうけると骨組の一部に塑性域が拡がり、断面力-断面変形関係（以下、M- $\phi$ 関係という）は非線形となる。このことは幾何的非線形性ととも、骨組の耐力等を大きく支配する要因となる。それゆえ、静的比例荷重（一定荷重も含む）をうける鋼平面骨組については、このような塑性域の拡がりに伴う非線形なM- $\phi$ 関係を考慮した種々の弾塑性解析法が研究され、a) 理論M- $\phi$ 関係式を直接用いた厳密解法<sup>2), 3)</sup>、b) 部材全体のM- $\phi$ 関係を積分可能な一つの直線式あるいは多項式で近似して解析する近似解析法<sup>4)~6)</sup>および、c) 部材の非弾性部分を適当な部材要素に分割し（あるいは、部材上に適当な数点を選び）、分割点（選点）<sup>7)~11)</sup>におけるM- $\phi$ 関係を数値積分等により求め、これらの値を用いて各要素内（選点間）のM- $\phi$ 関係を線形化して解析する分割法、など多くの解析方法が提案されている。

これらのうちで分割法は、断面のM- $\phi$ 関係を数値積分法で求めることにより、部材の断面形や応力-ひずみ特性にあまり左右されず、残留応力等の影響も考慮でき、また、部材の分割数を増すことにより比較的精度よく組織的な解析ができる点で他の解析法よりも優れている。しかしながら、この解析法は、断面ならびに部材の分割に起因して、計算機内に多大の記憶容量を要し、M- $\phi$ 関係を求めるための数値積分とか釣合方程式の求解に多くの演算時間を必要とするため、複雑な骨組とか地震等の動的荷重をうける骨組の解析には

\* 工修 徳島大学助手 工学部土木工学科 (〒770 徳島市南常三島町2-1)

\*\* 工博 徳島大学工業短期大学部教授 土木工学科 (同上)

\*\*\* 工修 徳島大学助教授 工学部土木工学科 (同上)

適していない。

一方、最近の多くの研究により、地震をうける構造物の耐震安全性は、その非弾性挙動（終局耐荷力、累積塑性変形、履歴吸収エネルギー等）と密接な関係にあることが明らかとなり、したがって、構造物の耐震安全性を解析的に検討するためには、精度よくその非弾性挙動が算定できる解析法の確立が必要となってきた。しかしながら、鋼平面骨組の全体系に対する応答解析では、多くの演算時間を要する関係で、前述のような骨組の変形挙動に大に関係する塑性域の拡がりを考慮した解析法はいまだ実用化されていない。

このような観点から、著者らは、塑性域の拡がりを考慮した実用的な一弾塑性応答解析法を確立するための基礎的研究として、上述の部材分割法における欠点を除去し、かつ、それと同等以上の精度を有する一弾塑性解析法について研究を進めてきている。この解析法の基本的な考え方は解析を複雑にする非線形な  $M-\phi$  関係を、部材端の変形が等しくなるような一本の直線式（これを等価  $M-\phi$  関係という）で近似することにある。このようにすれば、部材力式が比較的簡単に誘導でき、さらに、解析に際して、部材を要素に分割する必要がないため、分割法に比べ全体剛性行列の元数等が小さく、計算機内に要する記憶容量および演算時間の両面での改善が期待できる。本論文では、漸増荷重をうける平面骨組を対象として、その定式化について述べ、2・3の数値計算結果をもとに本解析法の実用性について検討している。

## 2. 非線形 $M-\phi$ 関係の等価線形化手法

ここでは、まず単一部材の両端のたわみ角を一般的に求め、それを用いて部材内の非線形な  $M-\phi$  関係を等価な線形関係に置換する手法について述べる。

### (1) 単一部材 $i-j$ の両端のたわみ角 $\theta_i, \theta_j$

図-1に示すような材端  $i, j$  に曲げモーメント  $M_i, M_j$  が作用し、各材端のたわみ角が  $\theta_i, \theta_j$  である長さ  $l$  の単一部材  $i-j$  を考える。

ここで、 $i$  端から  $x_0$  の距離にある点のたわみ角を  $\theta_{x_0}$  とし、部材内の任意の断面  $x$  の曲率を  $\phi_x$  とすると、両者の間には次式が成り立つ。

$$\theta_{x_0} = \int_0^l \phi_x \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx - \int_0^{x_0} \phi_x dx \quad (1)$$

式(1)は、周知の  $\phi$ -法公式 (formula of  $\phi$ -area method)<sup>19)</sup> であり、これより、 $\theta_i, \theta_j$  が、次のように得られる。

$$\theta_i = \int_0^l \phi_x \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx, \quad \theta_j = -\int_0^l \phi_x \frac{x}{l} dx \quad (2)$$

図-2は、降伏モーメント  $M_y$  あるいは降伏曲率  $\phi_y$  で正規化された一般的な曲げモーメント  $m$  ( $M/M_y$ ) と曲率  $\phi$  ( $\phi/\phi_y$ ) との関係を示したものである。ここで、 $M_p$  は塑性モーメント、 $E$  は弾性係数、 $I$  は断面2次モーメントを表わしている。一般に  $m-\phi$  曲線は弾性部分 ( $0 \leq m \leq 1$ ) と弾塑性部分 ( $1 < m \leq m_p$ ) とに区別され、さらに後者は異なる構成方程式で表わされる ( $n-1$ ) 個の領域 ( $m_k < m \leq m_{k+1}$ ,  $k=1, 2, \dots, n-1$ ) より成っている。

今、このような  $m-\phi$  関係を有する断面より成る単純ばりに曲げモーメント  $M_i, M_j$  が作用した場合を考える (図-3(a))。ここで、 $m_{n-1} \leq m_i = M_i/M_y < m_p$  および、 $-m_{n-1} \geq m_j = -M_j/M_y > -m_p$

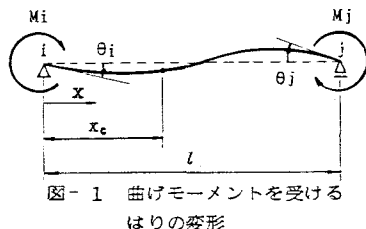


図-1 曲げモーメントを受けるはりの変形

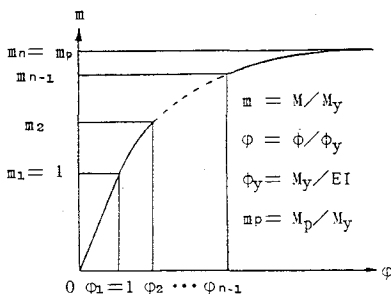


図-2  $m-\phi$  関係

とすると、このはりの曲げモーメント および曲率分布は、図-3 (b)および(c)のようである。ただし、以後の式等の表現を簡潔にするために、図中の  $f_k$  ( $k=1, 2, \dots, 2n$ ) は、材端でのモーメント ( $f_1 = m_i, f_{2n} = m_j$ ) ならびに図-2 に示したようなモーメントの各境界値 ( $f_k = m_{n-k+1}$  ( $k=2, 3, \dots, n$ ),  $f_{n+k} = -m_k$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ )) を表わしており、 $l_k$  ( $k=1, 2, \dots, 2n$ ) は  $i$  端から  $M_y f_k$  ( $k=1, 2, \dots, 2n$ ) の曲げモーメントの生じている断面までの距離を表わしている。また、 $\phi_{m,k}$  ( $k=1, 2, \dots, 2n-1$ ) は、 $l_k \sim l_{k+1}$  区間 ( $k=1, 2, \dots, 2n-1$ ) における曲率分布を表わしている。この場合のはり両端のたわみ角  $\theta_i, \theta_j$  (図-3 (a)) は、式 (2) より

$$\theta_i = \frac{\phi_y}{l} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \phi_{m,k} (l - x) dx,$$

$$\theta_j = \frac{-\phi_y}{l} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{l_k}^{l_{k+1}} \phi_{m,k} x dx$$

となるが、 $m_x = m_i + (m_j - m_i) x / l$  を考慮して、 $x \rightarrow m_x$  の置換を行うと次式が得られる。

$$\theta_i = \kappa (m_j S - D), \quad \theta_j = \kappa (m_i S - D) \quad (3)$$

ただし、 $\kappa = \phi_y l / (m_j - m_i)^2$  であり、また、 $S$  および  $D$  は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{f_k}^{f_{k+1}} \phi_{m,k} dm_x \\ D &= \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{f_k}^{f_{k+1}} \phi_{m,k} m_x dm_x \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、材端モーメント  $m_i, m_j$  が各々任意の領域 (図-2 参照) にある場合についても、同様にして  $\theta_i, \theta_j$  を求めることができるが、結果的には、式 (4) において不必要な領域を無視すればよい。例えば、 $m_i, m_j$  がそれぞれ  $m_{n-3} \leq m_i < m_{n-2}$ 、 $-m_{n-1} < m_j \leq -m_{n-2}$  の時には、式 (4) において、 $f_1 = f_2 = f_3 = m_i$  および  $f_{2n} = f_{2n-1} = m_j$  とおけば、この場合の  $\theta_i, \theta_j$  が求まる。また、 $m_i = m_j$  の場合には、式 (2) より直に、 $\theta_i = -\theta_j = \phi_y l \phi_{m,k} / 2$  ( $\because m_k \leq m_i < m_{k+1}$ ) として求まる。

モーメント分布が、図-3 (b) と逆のパターンの場合にも、モーメントの符号を適宜変えることにより  $\theta_i, \theta_j$  が式 (3), (4) より同様に得られる。

## (2) 等価線形 $m-\phi$ 関係

本研究では、図-4 の点線で示すような単一部材の非線形  $m-\phi$  関係 (理論式) を実線のような2つのパラメータ  $\alpha, \beta$  より決定される線形関係に変換している。以下、 $\alpha, \beta$  の決定方法について述べる。

単一部材  $ij$  の  $m-\phi$  関係が次のように表わされるとする。

$$\phi_m = \alpha + \beta m \quad (5)$$

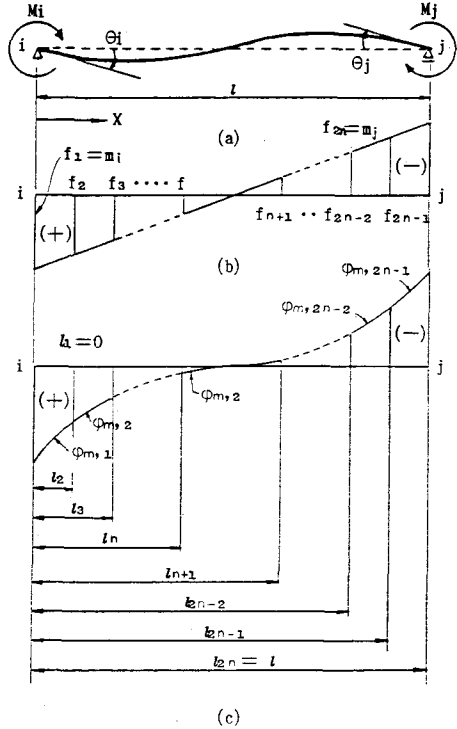


図-3 部材内の曲げモーメントおよび曲率分布

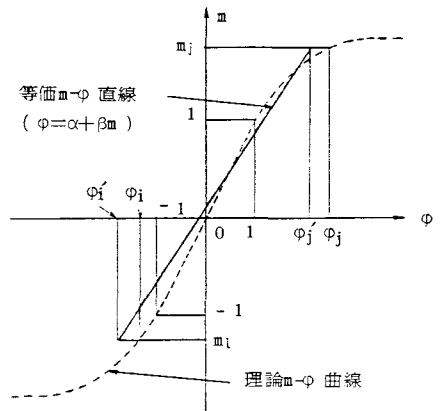


図-4 等価  $m-\phi$  関係

この場合の部材両端のたわみ角を  $\theta_{ei}$ ,  $\theta_{ej}$  とすると、これらは、式 (3), (4) および式 (5) より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ei} &= \kappa' \{ 3\alpha + (2m_i + m_j) \beta \} \\ \theta_{ej} &= -\kappa' \{ 3\alpha + (m_i + 2m_j) \beta \} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $\kappa' = \phi_y l / 6$  である。

また、理論  $m-\phi$  関係を用いた場合の部材両端のたわみ角も同様に式 (3), (4) から得られるが、これらを  $\theta_{ti}$ ,  $\theta_{tj}$  とすると、 $\theta_{ei} = \theta_{ti}$  かつ  $\theta_{ej} = \theta_{tj}$  という条件より、 $\alpha$  および  $\beta$  が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{(m_i - m_j)^3} \{ 2S(m_i^2 + m_i m_j + m_j^2) - 3D(m_i + m_j) \} \\ \beta &= \frac{6}{(m_i - m_j)^3} \{ 2D - S(m_i + m_j) \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$m_i = m_j$  の場合には、前述のように  $\theta_i = -\theta_j$  となり、一義的に  $\alpha, \beta$  が決定できない。そのため、ここでは便宜的に、微小量  $\Delta m_j$  を用いて  $m_{j0} = m_j + \Delta m_j$  および  $m_{j\infty} = m_j - \Delta m_j$  を設定し、それぞれ  $(m_i, m_{j0})$ , および  $(m_i, m_{j\infty})$  に対する係数  $\alpha_0, \beta_0$  および  $\alpha_\infty, \beta_\infty$  より次のようにして、 $\alpha, \beta$  を求めている。なお、本研究では、 $\Delta m_j = 0.01$  としている。

$$\alpha = \frac{\alpha_0 + \alpha_\infty}{2}, \quad \beta = \frac{\beta_0 + \beta_\infty}{2} \quad (8)$$

### 3. 矩形ならびに H 形断面の等価 $m-\phi$ 関係

等価  $m-\phi$  関係を導くのに必要な理論  $m-\phi$  関係は、断面形ならびに応力 ( $\sigma$ ) - ひずみ ( $\epsilon$ ) 関係等によって異なる。ここでは、本研究で用いた矩形ならびに H 形断面を対象として、それぞれの場合に対する式 (4) の  $S$  および  $D$  を求めている。

#### (1) 矩形断面

完全弾塑性型の  $\sigma-\epsilon$  関係を有する矩形断面の理論  $m-p-\phi$  関係は、図-2 において  $n=3$  の場合に相当し、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性域} & \quad \phi_{m,3} = m & |m| \leq m_1 \\ \text{1次塑性域} & \quad \phi_{m,2} = \frac{4m_1^3}{(3m_1 - |m|)^2} & m_1 < |m| \leq m_2 \\ \text{2次塑性域} & \quad \phi_{m,1} = \frac{1}{(3q - 2|m|)^{1/2}} & m_2 < |m| < m_3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、 $m_1 = 1 - p$ ,  $m_2 = 1 + p - 2p^2$ ,  $m_3 = 3(1 - p^2)/2$

$q = 1 - p^2$ ,  $p = |N/N_p|$  ( $\because N$ : 軸力,  $N_p$ : 全塑性軸力) である。

式 (9) を式 (4) に代入することによって、矩形断面の  $S$  および  $D$  が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} S &= (3q - 2f_1)^{1/2} - (3q - 2f_2)^{1/2} + 4m_1^3 \left\{ \frac{1}{3m_1 - f_3} - \frac{1}{3m_1 - f_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3m_1 + f_5} - \frac{1}{3m_1 + f_4} \right\} + \frac{1}{2} (f_4^2 - f_3^2) + (3q + 2f_5)^{1/2} - (3q + 2f_6)^{1/2} \\ D &= \frac{1}{3} \{ (f_4^3 - f_3^3) - (f_2 + 3q)(3q - 2f_2)^{1/2} + (f_1 + 3q)(3q - 2f_1)^{1/2} \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& - (f_6 - 3q)(3q + 2f_6)^{1/2} + (f_6 - 3q)(3q + 2f_5)^{1/2} \} + 4m_1^3 [ \\
& 3m_1 \{ \frac{1}{3m_1 - f_3} - \frac{1}{3m_1 - f_2} - \frac{1}{3m_1 + f_5} + \frac{1}{3m_1 + f_4} \} + \log |3m_1 - f_3| \\
& - \log |3m_1 - f_2| - \log |3m_1 + f_5| + \log |3m_1 + f_4| ]
\end{aligned}$$

## (2) H形断面

H形断面についても矩形断面と同様にして、理論 $m-p-\phi$ 関係を求めることができるが、式が非常に複雑になり、式(4)にもとづいて容易にSおよびDを求めることができない。そこで本研究では、式の形が簡単であり、厳密解と比較的良好に一致すると思われるChenの近似式<sup>20)</sup>を用いている。この場合も、図-2における $n=3$ の場合に相当している。

$$\left. \begin{aligned}
\text{弾性域} \quad \phi_{m,3} &= \frac{m}{a} \quad |m| \leq m_1 \\
\text{1次塑性域} \quad \phi_{m,2} &= \frac{C^2}{(b - |m|)^2} \quad m_1 < |m| \leq m_2 \\
\text{2次塑性域} \quad \phi_{m,1} &= \frac{g^{1/2}}{(m_3 - |m|)^{1/2}} \quad m_2 < |m| < m_3
\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、上式中のパラメーターは、以下のようである。

$$a = \frac{m_1}{d_1}, \quad b = \frac{m_2 - m_1(d_1/d_2)^{1/2}}{1 - (d_1/d_2)^{1/2}}, \quad C = \frac{m_2 - m_1}{1/d_1^2 - 1/d_2^2}$$

$$g = (m_3 - m_2)d_2^2, \quad m_1 = 1 - p, \quad d_1 = 1 - p$$

$$a) \quad 0 \leq p < 0.225$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 1 + 0.778p - 4.78p^2, \quad m_3 = 1.11 - 2.64p^2 \\
d_2 &= 1/(1 - 3.7p + 8.4p^2)
\end{aligned}$$

$$b) \quad 0.225 \leq p < 1$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 1.20(1 - p), \quad m_3 = 1.238 - 1.143p - 0.095p^2 \\
d_2 &= 2.20(1 - p)
\end{aligned}$$

式(11)を式(4)に代入することによって、H形断面のSおよびDが次のように求まる。

$$\begin{aligned}
S &= -2g^{1/2} \{ (m_3 - f_2)^{1/2} - (m_3 - f_1)^{1/2} + (m_3 + f_6)^{1/2} - (m_3 + f_5)^{1/2} \} \\
&+ C^2 \{ \frac{1}{b - f_3} - \frac{1}{b - f_2} + \frac{1}{b + f_5} - \frac{1}{b + f_4} \} + \frac{1}{2a} (f_4^2 - f_3^2) \\
D &= \frac{2g^{1/2}}{3} \{ (f_1 + 2m_3)(m_3 - f_1)^{1/2} - (f_2 + 2m_3)(m_3 - f_2)^{1/2} + (f_5 - 2m_3) \\
&\cdot (m_3 + f_5)^{1/2} - (f_6 - 2m_3)(m_3 + f_6)^{1/2} \} + C^2 \{ b \left( \frac{1}{b - f_3} - \frac{1}{b - f_2} \right. \\
&- \frac{1}{b + f_5} + \frac{1}{b + f_4} ) + \log |b - f_3| - \log |b - f_2| - \log |b + f_5| \\
&+ \log |b + f_4| \} + \frac{1}{3a} (f_4^3 - f_3^3)
\end{aligned} \quad (12)$$

## 4. 変形法の基本式および解析方法

### (1) 変形法の基本式(部材力式)

本研究では、前述のように実際には非線形な部材内の $M-\phi$ 関係を、等価線形化により単一の線形関係に置

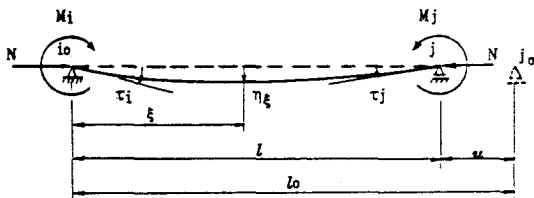


図-5 部材力と部材変形の正方向

| $k^*$             |                          |                          | $c^*$                    |
|-------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\frac{E A}{l_0}$ | 0                        | 0                        | 0                        |
| 0                 | $\frac{4 E I}{\beta l}$  | $-\frac{2 E I}{\beta l}$ | $-\frac{\alpha'}{\beta}$ |
| 0                 | $-\frac{2 E I}{\beta l}$ | $\frac{4 E I}{\beta l}$  | $-\frac{\alpha'}{\beta}$ |

表-1 剛性行列  $k^*$  と荷重項  $c^*$

き換えているため、理論  $M-\phi$  関係をそのまま用いる場合に比べ部材力式の誘導が容易である。以下にその誘導方法を簡単に示す。

図-5は部材  $ij$  の材端  $i, j$  に作用する曲げモーメント  $M_i, M_j$  および軸方向力  $N$  (これらを部材力とよぶ) と、これらに対応する接線回転角  $\tau_i, \tau_j$  および軸方向変形  $u$  (これらを部材変形とよぶ) を示している。各々図の矢印の方向を正とする。ここで、 $i$  端から  $\xi$  の距離にある点のたわみを  $\eta_\xi$ 、その点における曲率を  $\phi_\xi$ 、モーメントを  $M_\xi$  とし、前出の等価線形  $M-\phi$  関係 (式 (5)) を考慮すると曲げに関する微分方程式が次のように表わされる。ただし、 $\alpha' = My\alpha$  である。

$$\frac{d^2 \eta_\xi}{d\xi^2} = -\phi_\xi = -\frac{1}{EI}(\alpha' + \beta M_\xi) \quad (13)$$

式 (13) に、 $M_\xi = M_i + (M_j - M_i)\xi/l$  を代入し、 $\eta_\xi$ 、 $\eta_l$  を求め、 $i$  および  $j$  点における境界条件  $\xi = 0$  で  $\eta = \tau_i$ 、 $\eta = 0$ 、および  $\xi = l$  で  $\eta = -\tau_j$ 、 $\eta = 0$  を考慮すれば、 $(M_i, M_j)$  と  $(\tau_i, \tau_j)$  との関係式が容易に得られる。また、軸力  $N$  と軸方向変形  $u$  との関係は、 $A$  を部材の断面積とすると、周知のように  $N = EAu/l_0$  と表わされる。両端剛節部材の部材力  $S^* = \{N, M_i, M_j\}^T$  と部材変形  $u^* = \{u, \tau_i, \tau_j\}^T$  との関係を行列表示すれば次ようである。

$$S^* = k^* \cdot u^* + c^* \quad (14)$$

ここで、 $k^*$  および  $c^*$  は、表-1 に示すような剛性行列および荷重項である。式 (14) において、断面形あるいは材料特性等の違いは、表-1 中の非線形要素  $\alpha'$  および  $\beta$  (式 (7) 参照) に含まれる  $S$  および  $D$  で表わされており、各々の場合に対する  $S$  および  $D$  が求まれば、容易にその影響を解析に導入することができる。

また、本研究では、図-6 のように、微小荷重増分間では塑性モーメント  $M_p$  の大きさは一定であると仮定し、近似的に塑性流動則を満足するようにしている。したがって、塑性端部材の部材力式は、両端剛節部材の部材力式 (式 (14)) より容易に誘導できる。

本解析法との比較に用いた分割法の基本式も部材の分割要素内 (要素を1つの部材とみなす) では、曲率は線形的に変化するという仮定のもとに全く同様に誘導される (式 (14) と同型)。ただし、この場合には表-1 中の  $\alpha'$  および  $\beta$  は次のようである。

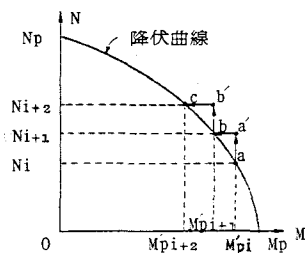


図-6 本研究で用いた簡易塑性流動則

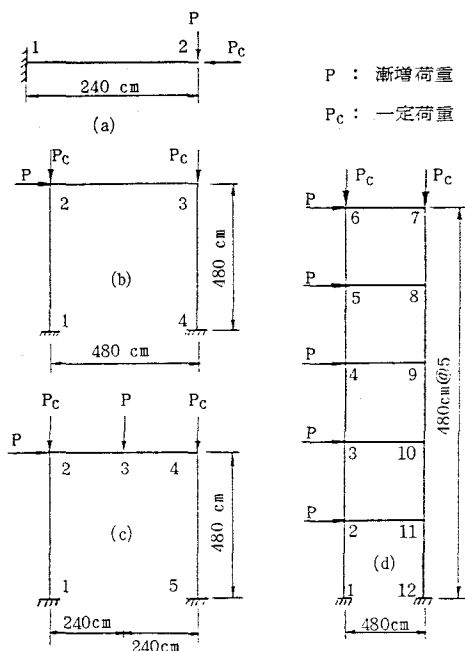


図-7 解析の対象とした骨組と載荷方法

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= \frac{EI(\phi_i M_j - \phi_j M_i)}{M_j - M_i} \\ \beta &= \frac{EI(\phi_j - \phi_i)}{M_j - M_i} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

以上のような部材力式を部材座標系に対する変換行列  $B$  および座標変換行列  $R$  を用いることにより、基準座標系に対する基本式に変換することができる。また、収束計算に必要な増分基本式としては、式 (14) 中の非線形パラメーター  $\alpha', \beta$  を微小荷重増分間で一定とみなした次式を用いている。

$$\Delta S^* = K^* \cdot \Delta u^* \quad (16)$$

## (2) 解析方法

本研究では、解析に際して次のように仮定を設けた。

- 1) 部材はすべて一定断面を有する直線材とする。
- 2) 断面は変形後も平面を保持するものとする。
- 3) 材料の応力-ひずみ関係は完全弾塑性型であるとする。
- 4) 降伏条件式には、曲げモーメントと軸力との組合せだけを考え、せん断力の影響は無視する。
- 5) 荷重は節点に作用する比例漸増荷重、および、一定荷重とする。
- 6) 幾何的非線形性は無視する。

本解析では、任意の荷重  $P$  に対する収束変位  $u$  は式 (14), (16) を用いた Newton-Raphson 法と等価な接線剛性法により求めており、任意の荷重に対する収束変位が求まるたびに、すべての部材端に対して、弾性限界式 ( $f(m, p) = |m| - m_1 = 0$ ) および降伏条件式 ( $F(m, p) = |m| - m_3 = 0$ ) を用いて、材端モーメントを照査し、もし新たにどこかの材端において  $f(m, p) > 1 + e_y$  あるいは  $F(m, p) > 1$  となる場合には荷重増分を半分に damping し、前ステップから解き直すという反復計算を行ない、 $1 - e_y \leq f(m, p) \leq 1 + e_y$  あるいは  $1 - e_p \leq F(m, p) < 1$  を満たした段階で、新たな弾塑性端あるいは塑性端が発生したとみなして材端条件を変更して次のステップに進むようにしている。ただし、 $e_y$  および  $e_p$  は、弾性限界および降伏条件に対する判定誤差であり、ここでは、それぞれ  $0.1 \times 10^{-3}$  および  $0.2 \times 10^{-3}$  を用いている。そして、構造物全体の接線剛性行列のデターミナントが 0 以下になった時点で、構造物は崩壊したものとみなして全解析を終了するようにしている。

## 5. 解析結果の比較と考察

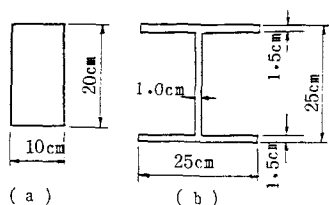


図-8 (a) 矩形断面 (b) H 形断面

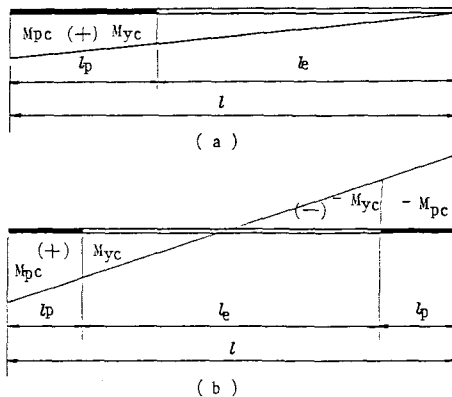


図-9 分割法を用いる場合の部材分割方法

| case | 解 析 法      |       |
|------|------------|-------|
| A    | 本解析 (非分割法) |       |
| B    | 理論解        |       |
| C    | 塑性関節法      |       |
| (1)  | n=1        | 分 割 法 |
| (2)  | n=2        |       |
| (3)  | n=3        |       |
| (4)  | n=4        |       |
| (5)  | n=5        |       |

表-2 各解析法の簡易表現

本研究では、本法（非分割法）の精度ならびに演算時間等を検討するために、図-7に示すような片持ばり((a)), 1層門型ラーメン((b), (c))および、5層門型ラーメン((d))を対象として、本法および分割法による解析を行ない、両者の結果を比較した。また、骨組を構成する部材はすべて同一断面を有するものとし、断面形は図-8に示すような矩形あるいはH形断面とした。応力-ひずみ関係は、前述のように完全弾塑性型とし、降伏応力 $\sigma_y$ は $2400\text{kg/cm}^2$  ( $235.20\text{MPa}$ )、弾性係数 $E$ は $2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2$  ( $206.00\text{GPa}$ )とした。

また、比較に用いた分割法では解析に先だって、部材を図-9(a), (b)に示すように、まず、弾性部分( $l_e$ )と非弾性部分( $l_p$ )とに分割し、さらに非弾性部分を同図(c)のように $n$ 等分割している。図中、 $M_{yc}$ および $M_{pc}$ は軸力の影響を考慮した場合の降伏モーメントおよび塑性モーメントである。

以下の計算例において、解析法に関する表現を簡単にするために、本法ならびに比較に用いた各種解析法を表-2に示すような記号で区別するものとする。

### (1) 精度に関する比較と考察

本節では、荷重( $P$ )-変位( $\delta$ )曲線をもとに本法の精度について若干の比較と考察を行なう。図はすべて縦軸に一定荷重 $P_c=0$ の場合の降伏荷重 $P_y$ で正規化された荷重 $\bar{P}$ を、横軸に同様に降伏変位 $\delta_y$ で正規化された変位 $\bar{\delta}$ をとっている。なお、本研究で得られた各々の場合の $\bar{P}$ - $\bar{\delta}$ 曲線は全て類似な傾向を示しているのので、ここでは、代表的な2・3の計算例を示すことにする。

図-10は、矩形断面よりなる片持ばりを対象とし、一定荷重 $P_c$ を、 $0$ ,  $0.3N_p$ ,  $0.5N_p$ および $0.8N_p$ とした場合のそれぞれの $\bar{P}$ - $\bar{\delta}$ 曲線を示したものである。ここで、 $N_p$ は全塑性軸力であり、矩形断面(図-8(a))の場合 $480t$  ( $4.70\text{MN}$ )である。また、分割法では、前述のように図中の黒塗の部分( $l_p$ )を $n$ 等分割(case (n))しており、以下の例でも同様である。

図-10よりわかるように、本法(case A)による結果は $P_c$ の大小(部材内の塑性域の長さ)にかかわらず、理論解(case B)と一致しており、また分割法では $n=5$ の場合(case (5))が、それらと同等の精度を有して

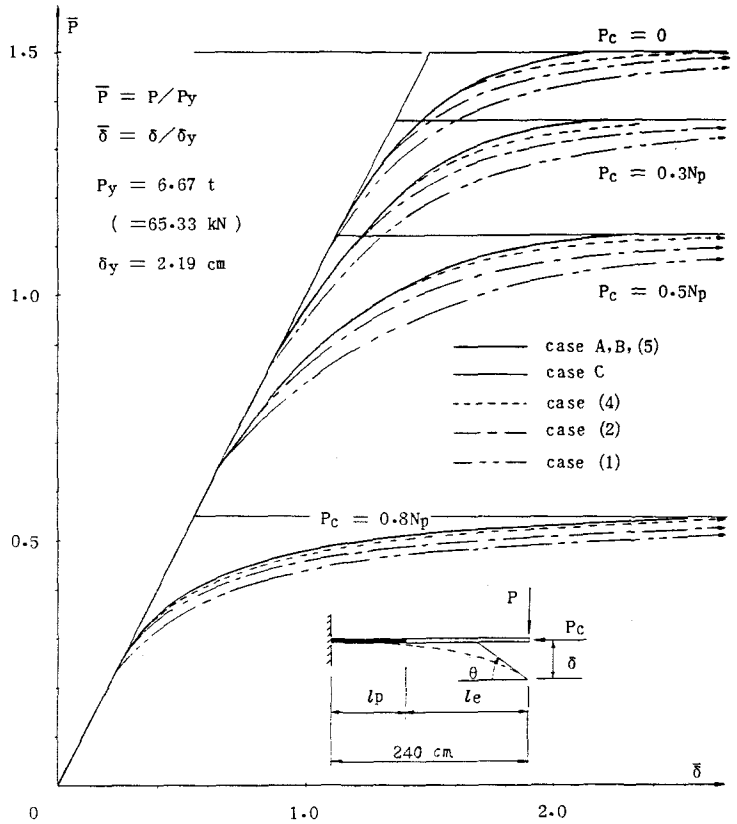


図-10  $\bar{P}$ - $\bar{\delta}$  曲線 (片持ばり, 矩形断面)

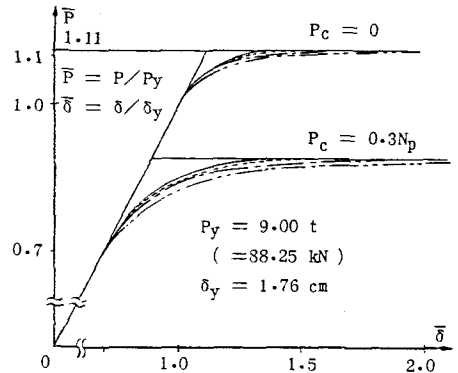


図-11  $\bar{P}$ - $\bar{\delta}$  曲線 (片持ばり, H形断面)

いる。なお、本例では $\bar{P}-\bar{\theta}$  (自由端のたわみ角)関係についても比較したが、 $\bar{P}-\bar{\delta}$  関係と全く同様の傾向を示している。また、図-11は、同様にH形断面(図-8(b)参照,  $N_p = 232.3t(2.28MN)$ )より成る片持ばりを対象とした場合の $\bar{P}-\bar{\delta}$ 曲線であり、各曲線が表わす解析法は図-10と同じである。これも矩形断面の場合と同じ傾向を示しているが、断面形の相異により $m-\phi$ 関係の構成式が異なるだけであるので当然のことと思われる。したがって、以下では、比較のしやすい矩形断面を対象とした場合の計算例を用いて比較することにする。

図-10,11より、本法は単一部材を対象とした場合、精度的に非常に良好であり、分割法により同程度の精度を得るためには、 $n \geq 4 \sim 5$  としなければならないことがわかる。

図-12は、1層ラーメン(図-7(c))を対象として同様な比較を行なったものである。本例では骨組を構成する各部材の曲げモーメント分布が異なる場合の本法の精度を検討するため、図のように柱頭部および梁中央部にそれぞれ漸増荷重  $P$  を作用させている。この場合、各部材のモーメント分布は図の斜線部がほぼ平行な分布、他の部材は両端異符号の直線分布となる。また、 $P$  の漸増により各節

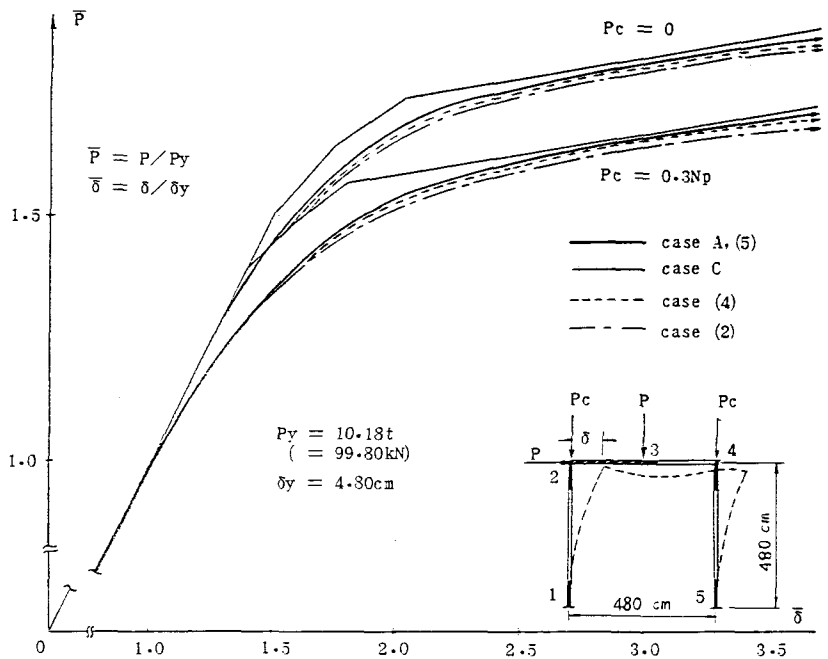


図-12  $\bar{P}-\bar{\delta}$  曲線 (1層ラーメン(図-7(c)), 矩形断面)

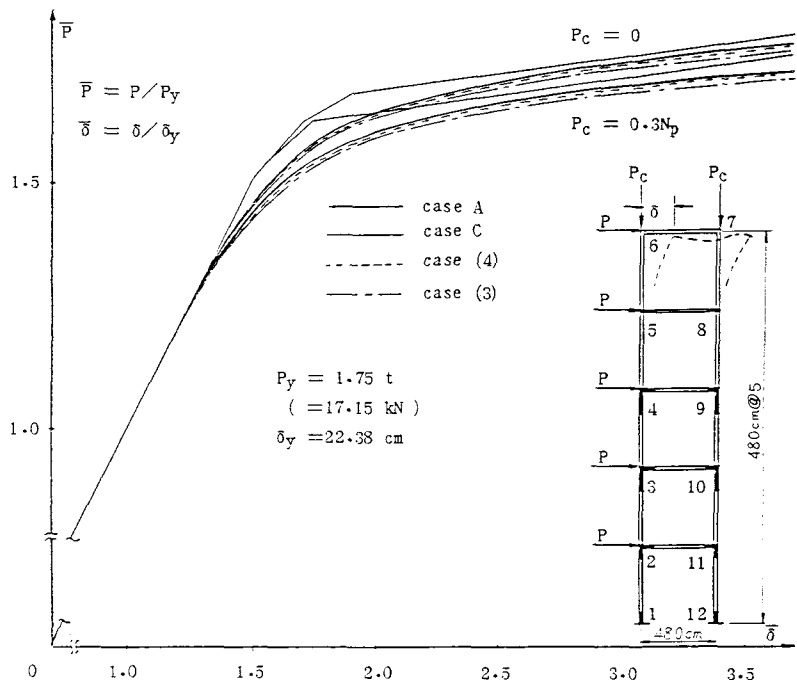


図-13  $\bar{P}-\bar{\delta}$  曲線 (5層ラーメン, 矩形断面)

点にヒンジが発生（節点 2・3 はほぼ同時）し、組合せ形式で機構崩壊する。本例も前出の片持ばり（図-10, 11）の場合と同じ傾向を示しており、本法は不静定骨組に対しても精度の良い解析法であることがわかる。

図-13は、同様に矩形断面より成る 5 層ラーメン（図-7（d））を対象とした場合の  $\bar{P}-\bar{\delta}$  曲線を示したものである。本例では計算機の記憶容量の都合上、分割法では  $n=4$  までしか解析できていないが、図よりわかるように case（4）は非常に case A に近づいており、case（5）が求めれば、それは case A にほぼ重なるものと思われる。この図より、本法は、このような多部材より成る骨組を対象とした場合にも比較的精度のよい結果が得られることがわかる。また、図-10～13 には塑性関節法による解（case C）も付されているが、それらを非分割法による解と比較すると最高荷重は一致しているものの、同一荷重  $P$  に対する変位  $\delta$  は過小評価となっており、一定荷重  $P_c$  が大きいもの程顕著になる傾向がみられる。

## （2） 演算時間に対する比較と考察

本節では、前出の図-7 に示した各構造物に対する解析結果を演算時間の面から比較検討する。

図-14 は横軸に分割法における非弾性域の分割数  $n$ 、縦軸に分割法（ $n$  等分割）による演算時間  $T$  を非分割法による演算時間  $T_0$  で正規化した値  $\nu (= T/T_0)$  をとり、各構造形についてそれぞれ示したものである（ $T, T_0$  ともに  $P_c=0$  の場合）。また各構造形における  $T_0$  は、片持ばりの場合の演算時間（ $T_0=0.228s$ ）で正規化（ $t$ ）して表-3 に示している。また、任意の荷重に対する変位を求めるための収束回数は分割法、非分割法ともに 3 回程度であった。

図-14 より、 $\nu$  は各場合とも当然のことながら  $n$  の増加に伴ない増大し、一般に骨組を構成する部材数が多いほどその増加率は大きい。前節での比較より、分割法において実用的に非分割法と同程度の精度を有すると考えられる  $n=4$  の場合、 $\nu$  の大きさは、片持ばり（a）、1 層ラーメン（b）、および（c）、5 層ラーメン（d）についてそれぞれ約 2.5, 19, 13, 25 となっている。また、同じ荷重増分を用いた場合の塑性関節法（case C）と、本法（case A）との演算時間の比（case A/case C）は、各骨組とも約 1.6 であった。これらのことより、本法は演算時間の面で大変実用的な解析法であると思われる。

## （3） 計算機内に要する記憶容量に関する考察

本研究における数値計算はすべて徳島大学中型計算機 FACOM-M360 を利用し、一般ジョブの C クラス（region size=1024KB）によって計算した。

前述のように、本研究で解き得た最大の部材数は、5 層ラーメンを分割法により  $n=4$  として解析した場合のもので、79 部材である。このことより、本計算機を用いて分割法で解き得る最大部材数  $n_a$  は、 $79 \leq n_a < 95$  の範囲にあることがわかる。ここで、非分割法と分割法の部材数および節点数に関する各プログラム中の配列の大きさを同じにすれば、両者とも計算機内に要する記憶容量はほぼ等しいことより、節点数との関係もあるが、大旨非分割法で解き得る 1 スパン多層ラーメンの最大層数は、約 26～31 程度であると思われる。これらのことより、本法は分割法に比べ、計算機内に要する記憶容量の面でも実用的である。

以上（1）～（3）より、本法はより複雑な（部材数等の多い）骨組の解析にも適用できるものと思われる。また、本法を多くの荷重ステップと大きな記憶容量を必要とする動的応答解析に適用できるように拡張することも可能であると思われる。

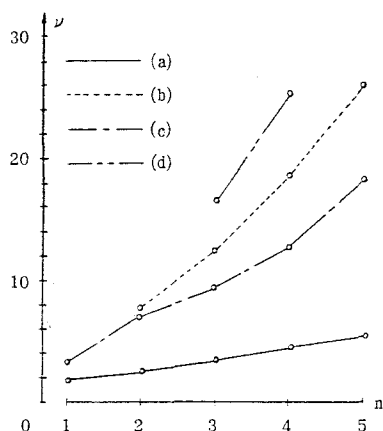


図-14 演算時間の比較  
（a）～（d）は図-7参照）

|   | (a) | (b) | (c) | (d) |
|---|-----|-----|-----|-----|
| t | 1   | 3   | 5   | 22  |

表-3 非分割法による演算時間の比  
（（a）～（d）は図-7の対応する骨組を表す。）

## 6. 結論

本研究では、骨組の耐力、変形挙動等を支配する一つの大きな要因である塑性域の拡がりの影響を、精度よく解析に導入する際に問題となる非線形な  $M-\phi$  関係の取扱ひ方に注目して、その等価線形化を試み、部材を分割せずに塑性域の拡がりを考慮し得る実用的な一弾塑性解析法を導き、その精度、演算時間および計算機内に要する記憶容量等について既往の代表的な解析法である分割法による結果と比較し、若干の検討を行なった。今回得られた結果を要約すると次のとおりである。

- (1) 本法（非分割法）による解析結果は、塑性域の拡がりの程度に関係なく理論解および部材の非弾性部分を4～5等分した分割法による結果とよく一致しており、本法の精度は良好である。
- (2) 本法は演算時間の面で分割法に比べ非常に有利であり、その傾向は骨組を構成する部材数（節点数）が多くなるほど、顕著になる。ちなみに、1層5スパンラーメンを対象とした場合には、本法による演算時間は分割法の約  $1/25$  であった。
- (3) 本法は分割法に比べ計算機内に要する記憶容量が小さいため、部材数等の多い骨組の解析に有利であり、中型計算機 FACOM-M360(Cクラス)で、30層前後の1スパンラーメンの解析が可能である。
- (4) (1)～(3)より、本法は比較の実用的な解析法であると思われる。

なお、骨組の非線形挙動等をより正確に算定するためには、さらに幾何的非線形性の影響をも考慮する必要があるが、ここでの等価  $M-\phi$  関係は著者の一人が先に分割法による複合非線形解析で用いたもの<sup>ii)</sup>と同形であり、本解析法を幾何的非線形性を考慮した複合非線形解析法に拡張することは比較的容易と考えられる。また、本法をさらに汎用性のあるものにするためには、各種断面形の断面力-断面変形関係を残留応力ならびにひずみ硬化を考慮した場合も含めて簡単な形に定式化するとともに、繰返し荷重ならびに動的荷重をうける場合についても適用できるように拡張する必要があるものと思われるが、これらについては、現在検討中である。

## 参考文献

- 1) T.V. Galambos 著、福本・西野共訳：鋼構造部材と骨組－強度と設計－、丸善、1970年10月、pp.9～10.
- 2) L.W. Lu and M.Ojalvo: Analysis of Frames into the Plastic Range, Proc.of ASCE, Vol.87, No. EM4, 1961.
- 3) S.Kuranishi and L.W. Lu: Load Carrying Capacity of Two Hinged Steel Arches, Proc.of JSCE, No.204, August, 1972, pp.129～140.
- 4) 山崎・太田・石川：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第134号，1966年10月，pp.14～32.
- 5) J.L. Bockhold: Inelastic Analysis of Tier Buildings, Ph.D.Dissertation, Univ. of Stanford, May, 1972.
- 6) 平尾・児嶋・木野戸：Ramberg-Osgoodの  $M-\phi$  関係式を用いた平面骨組の一弾塑性解析，徳島大学工学部研究報告，第22号，1977年3月，pp.27～40.
- 7) T.Ohta and T.Yamasaki: Elasto-Plastic Analysis of Steel Structures Considering the Effects of Residual Stress and Finite Deformation, Proc.of JSCE, No.194, October, 1971, pp.151～161
- 8) 藤本・和田・白方・小杉：筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究，建築学会論文報告集，第209号，1973年7月，pp.41～51.

- 9) 児嶋・平尾・武智：塑性域の拡がりを考慮した鋼構造平面骨組の一弾塑性解析，徳島大学工学部研究報告，第21号，1976年3月，pp.1～16.
- 10) 平尾・児嶋・成行：鋼構造平面骨組の材料の非線形性に関する2・3の考察，徳島大学工学部研究報告，第25号，1980年3月，pp.99～114.
- 11) 平尾 潔：鋼構造平面骨組の非線形挙動と終局耐荷力に関する研究，京都大学学位論文，第1313号，1980年7月.
- 12) 加藤 勉著：鉄骨構造の耐震設計，丸善，1983年1月.
- 13) R. Riddell and N. M. Newmark: Statistical Analysis of The Response of Nonlinear Systems Subjected to Earthquakes, department of Civil Engineering University of Illinois at Urbana-Champaign Urbana Illinois, August, 1979.
- 14) 武藤 清著：構造物の動的設計・耐震設計シリーズ／応用編，丸善，1977年1月.
- 15) J. R. Pique: On The Use Simple Model In Nonlinear Dynamic Analysis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Civil Engineering Constructed Facilities Division, Cambridge, September, 1976.
- 16) 成行・平尾・児嶋・浜崎：等価曲率を用いた平面骨組の弾塑性解析に関する研究－その2－，土木学会第37回年次学術講演会講演概要集 I - 150，1982年10月.
- 17) 成行・平尾・児嶋：等価曲率を用いた平面骨組の一弾塑性解析，徳島大学工学部研究報告，第29号，1984年3月，pp.1～13.
- 18) 児嶋・平尾・成行・三浦：等価M- $\phi$ 関係を用いた平面骨組の弾塑性解析に関する基礎的研究，土木学会第39回年次学術講演会講演概要集 I - 77，1984年10月
- 19) 太田俊明著：構造物の非弾性解析，技報堂出版，1980年1月，pp.90.
- 20) 小西一郎編：鋼橋基礎編 I (1977)，丸善，pp.576～582, 595～602.
- 21) 土木学会編：土木工学における数値解析／変形応力解析編，サイエンス社，1974年11月，pp.120～125.