

初期たわみを有する弾性円筒パネルの 円周方向面内力による非線形挙動

NONLINEAR BEHAVIOR OF ELASTIC CYLINDRICAL PANELS
WITH INITIAL DEFLECTIONS UNDER CIRCUMFERENTIAL INPLANE LOAD

三上 市藏* 矢部 幸男**
By Ichizou MIKAMI and Yukio YABE

Cylindrical panels subjected to circumferential inplane compression or tension are analyzed on the basis of nonlinear theory for thin shells. The panels are fixed or simply supported along both the straight edges and elastically restrained along both the curved sides. The finite difference method is used. Nonlinear behavior of the panels is discussed.

1. まえがき

箱断面アーチ部材のフランジ、縦断面内で曲率を有する箱桁上フランジ、テーバーの付いた箱桁下フランジなどは、板パネルが面外に曲率を有しており、円筒パネルとみなすことができる。これらの円筒パネルは曲率線方向の面内荷重を受けるため、同方向の直応力分布が不均一となるとともに、非線形挙動を生じる。また、初期たわみの影響も大であると思われる。

初期たわみを考慮に入れたシェルの非線形解析は、Donnell¹⁾の方程式を用いて行われた。DonnellとWan²⁾およびVan SloothenとSoong³⁾が円筒シェルの軸圧縮座屈を、TurulaとChu⁴⁾が円筒パネルの軸圧縮座屈を研究した。そのほか、Hutchinson⁵⁾が外圧を受ける球形シェルの初期たわみの影響を、植村⁶⁾が部分球形シェルの外圧による座屈をそれぞれ解析している。

円筒パネルが円周方向面内荷重を受ける場合については、線形挙動⁷⁾と非線形挙動⁸⁾が解析されているが、いずれも初期たわみのない場合に限られている。

本論文では、円筒パネルが両直線端辺で固定支持または単純支持され、両曲線側辺で弾性固定支持されており、初期たわみを有し、円周方向の面内圧縮力または面内引張力を受ける場合を解析する。Washizu⁹⁾の薄い弾性シェルに対する非線形理論を、初期たわみのある場合に拡張して適用する。

差分法を用いて、連立非線形偏微分方程式を連立非線形代数方程式に変換し、反復法により解を求める。その際、加速Jacobi法およびAitken外挿法を用いて解の収束を早める。

数値計算を行って、たわみ、膜応力、曲げ応力、等価応力、有効幅などに対する、パネルの縦横比、幅厚比、曲率パラメータ、周辺支持条件、初期たわみなどの影響を考察する。

* 工博 関西大学教授 工学部土木工学科 (〒564 吹田市山手町3丁目3番35号)

** 工修 清水建設株式会社土木本部設計部 (〒104 東京都中央区京橋2丁目17番1号)

2. 円筒パネルの弾性有限変形

Fig.1 に示すような弧にそった長さ a 、幅 b 、厚さ t 、中央面の曲率半径 R で、初期たわみ w_0 を有する等方性円筒パネルを解析する。荷重として、両直線辺に一樣な円周方向強制変位 v_m を与える。 v_m の値が正の場合は円周方向面内引張荷重が、負の場合は円周方向面内圧縮荷重が作用することになる。座標軸は Fig.1 のように設定し、正の変位および断面力を Fig. 2 のように定義する。

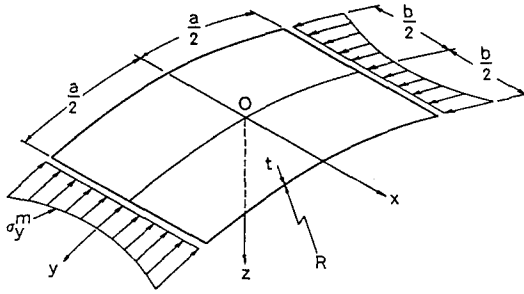


Fig.1 A cylindrical panel under circumferential compression

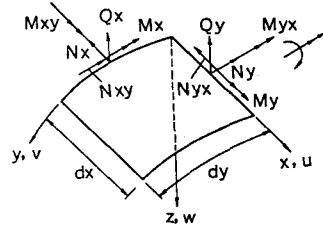


Fig.2 Positive displacements and stress-resultants

(1) 基礎方程式

Marguerre¹⁰⁾ が初期たわみのある等方性板の近似非線形理論をエネルギー法を使って展開したが、Chia¹¹⁾ がベクトル表示により非線形微分方程式の誘導過程を整理している。これに習って、Kirchhoff-Love の仮定を用いた Washizu の薄いシェルに対する非線形理論⁹⁾ を、初期たわみのある場合に拡張する。

中央面から z の位置におけるひずみ成分は次のようになる。

$$e'_x = e_x - z \kappa_x, \quad e'_y = e_y - z \kappa_y, \quad e'_{xy} = e_{xy} - z \kappa_{xy} \quad (1)$$

ここに、 e_x 、 e_y 、 e_{xy} は中央面のひずみ成分、 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} は曲率の変化量であり、次のようである。

$$e_x = \varepsilon_x + \frac{1}{2} (\varepsilon_x^2 + (\varepsilon_{xy} + \phi)^2 + \phi_x^2) + \phi_x \phi_{ox} \\ e_y = \varepsilon_y + \frac{1}{2} ((\varepsilon_{xy} - \phi)^2 + \varepsilon_y^2 + \phi_y^2) + \phi_y \phi_{oy} \quad (2)$$

$$e_{xy} = \varepsilon_{xy} + \frac{1}{2} (\varepsilon_x (\varepsilon_{xy} - \phi) + \varepsilon_y (\varepsilon_{xy} + \phi) + \phi_x \phi_y + \phi_x \phi_{oy} + \phi_y \phi_{ox})$$

$$\kappa_x = \phi_{x,x}, \quad \kappa_y = \phi_{y,y}, \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{2} (\phi_{x,y} + \phi_{y,x} + (\varepsilon_{xy} + \phi)/R) \quad (3)$$

ただし、 ε_x 、 ε_y 、 ε_{xy} は中央面の線形ひずみ成分、 ϕ_x 、 ϕ_y 、 ϕ は中央面の回転成分、 ϕ_{ox} 、 ϕ_{oy} は初期たわみによる中央面の回転成分で、変位を使って次のように表される。

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y} - w/R, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \quad (4)$$

$$\phi_x = w_{,x}, \quad \phi_y = w_{,y} + v/R, \quad \phi = \frac{1}{2} (v_{,x} - u_{,y}) \quad (5)$$

$$\phi_{ox} = w_{0,x}, \quad \phi_{oy} = w_{0,y} \quad (6)$$

応力とひずみの関係を次のように考える。

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (e'_x + \nu e'_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (e'_y + \nu e'_x), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} e'_{xy} \quad (7)$$

ここに、Eはヤング率、 ν はポアソン比である。

断面力と応力の関係は、曲率の影響を無視すると次のようになる。

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \quad (8)$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \quad (9)$$

式(8)および(9)に式(7)および(1)を代入して、積分を実行すると、断面力が中央面のひずみ成分と曲率変化量とを用いて次のように表される。

$$N_x = B [e_x + \nu e_y], \quad N_y = B [e_y + \nu e_x], \quad N_{xy} = N_{yx} = B (1 - \nu) e_{xy} \quad (10)$$

$$M_x = -D [\kappa_x + \nu \kappa_y], \quad M_y = -D [\kappa_y + \nu \kappa_x], \quad M_{xy} = M_{yx} = -D (1 - \nu) \kappa_{xy} \quad (11)$$

ただし、 $B = E t / (1 - \nu^2)$ 、 $D = E t^3 / 12 (1 - \nu^2)$ である。

以上のひずみと応力を用いて、仮想仕事の原理を適用すると次のつりあい式が得られる。

$$N_{x,x} + N_{yx,y} + [N_x \varepsilon_x + N_{xy} (\varepsilon_{xy} - \phi)],_x + [N_{yx} \varepsilon_x + N_y (\varepsilon_{xy} - \phi)],_y = 0 \quad (12a)$$

$$N_{y,y} + [N_{xy} - M_{xy}/R],_x - Q_y/R + [N_{yx} (\varepsilon_{xy} + \phi) + N_y \varepsilon_y],_y + [N_x (\varepsilon_{xy} + \phi) + N_{xy} \varepsilon_y],_x - [N_{yx} (\phi_x + \phi_{ox}) + N_y (\phi_y + \phi_{oy})]/R = 0 \quad (12b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + [N_x (\phi_x + \phi_{ox}) + N_{xy} (\phi_y + \phi_{oy})],_x + [N_{yx} (\phi_x + \phi_{ox}) + N_y (\phi_y + \phi_{oy})],_y + [N_y + N_{yx} (\varepsilon_{xy} + \phi) + N_y \varepsilon_y]/R = 0 \quad (12c)$$

$$Q_x = M_{x,x} + M_{yx,y}, \quad Q_y = M_{y,y} + M_{xy,x} \quad (12d,e)$$

(2) 境界条件式

円筒パネルの対称変形を仮定して、1/4領域を解析対象とする。周辺の境界条件を次のように考える。まず、面外変位に関する境界条件として、側辺ではたわみは生じず、回転に対して弾性拘束を受けるものとする。端辺は単純支持されている場合と固定支持されている場合を考える。

$$x = 0 \quad \text{において} \quad w(x) = w(-x) \quad (13)$$

$$x = b/2 \quad \text{において} \quad w = 0, \quad M_y = K \phi_x \quad (14)$$

$$y = 0 \quad \text{において} \quad w(y) = w(-y) \quad (15)$$

$$y = a/2 \quad \text{において} \quad \text{単純支持の場合: } w = 0, \quad M_y = 0 \quad (16)$$

$$\text{固定支持の場合: } w = 0, \quad w_{,y} = 0 \quad (17)$$

ただし、Kは固定係数である。

面内変位に関する境界条件は次のように考える。側辺では法線および接線方向の応力が零であるとし、端辺では圧縮または引張の一樣強制変位 v_m を与える。

$$x = 0 \quad \text{において} \quad u(x) = -u(-x), \quad v(x) = v(-x) \quad (18)$$

$$x = b/2 \quad \text{において} \quad N_x = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (19)$$

$$y = 0 \quad \text{において} \quad u(y) = u(-y), \quad v(y) = -v(-y) \quad (20)$$

$$y = a/2 \quad \text{において} \quad v = v_m, \quad N_{xy} = 0 \quad (21)$$

(3) 無次元表示式

数値計算の便宜のため、以下の無次元量を用いて基礎微分方程式と境界条件式を無次元表示する。

$$\alpha = a/b, \beta = b/t, Z = b^2/tR, \xi = x/b, \eta = y/a, U = ub/t^2, V = vb/t^2, \\ W = w/t, W_0 = w_0/t, V_m = 2v_m/a, \tilde{\kappa} = b\kappa, \phi = bK/D.$$

式 (12) より Q_x と Q_y を消去し、次のように書ける。第1式と第2式の左辺には U と V の線形項のみを残し、他の項を右辺に移した。第3式の左辺には W の線形項のみを残し、他の項を右辺に移した。

$$U, \xi \xi + \frac{1-\nu}{2\alpha^2} U, \eta \eta + \frac{1+\nu}{2\alpha} V, \xi \eta = \nu ZW, \xi - \beta^2 \left[\bar{e}_x, \xi + \nu \bar{e}_y, \xi + \frac{1-\nu}{\alpha} \bar{e}_{xy}, \eta \right. \\ \left. + (e_x + \nu e_y) \varepsilon_x, \xi + (1-\nu) e_{xy} (\varepsilon_{xy}, \xi - \phi, \xi + \frac{1}{\alpha} \varepsilon_x, \eta) \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} (e_y + \nu e_x) (\varepsilon_{xy}, \eta - \phi, \eta) + \varepsilon_x (e_x, \xi + \nu e_y, \xi) \right. \\ \left. + (1-\nu) (\varepsilon_{xy} - \phi) e_{xy}, \xi + \frac{1-\nu}{\alpha} \varepsilon_x e_{xy}, \eta \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} (\varepsilon_{xy} - \phi) (e_y, \eta + \nu e_x, \eta) \right] \quad (22a)$$

$$\frac{1-\nu}{2} V, \xi \xi + \frac{1}{\alpha^2} V, \eta \eta + \frac{1+\nu}{2\alpha} U, \xi \eta = \frac{Z}{\alpha} W, \eta \\ - \frac{Z}{12\beta} \left[\frac{\nu}{\alpha} \tilde{\kappa}_x, \eta + \frac{1}{\alpha} \tilde{\kappa}_y, \eta + 2(1-\nu) \tilde{\kappa}_{xy}, \xi \right] \\ - \beta^2 \left[\frac{1}{\alpha} \bar{e}_y, \eta + \frac{\nu}{\alpha} \bar{e}_x, \eta + (1-\nu) \bar{e}_{xy}, \xi \right. \\ \left. + (e_x + \nu e_y) (\varepsilon_{xy}, \xi + \phi, \xi) + (1-\nu) e_{xy} (\varepsilon_y, \xi + \frac{1}{\alpha} \varepsilon_{xy}, \eta + \frac{1}{\alpha} \phi, \eta) \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} (e_y + \nu e_x) \varepsilon_y, \eta + (\varepsilon_{xy} + \phi) (e_x, \xi + \nu e_y, \xi) \right. \\ \left. + (1-\nu) \varepsilon_y e_{xy}, \xi + \frac{1-\nu}{\alpha} (\varepsilon_{xy} + \phi) e_{xy}, \eta + \frac{1}{\alpha} \varepsilon_y (e_y, \eta + \nu e_x, \eta) \right] \\ - \frac{Z}{\beta} \left[(1-\nu) e_{xy} (\phi_x + \phi_{ox}) + (e_y + \nu e_x) (\phi_y + \phi_{oy}) \right] \quad (22b)$$

$$W, \xi \xi \xi \xi + \frac{2}{\alpha^2} W, \xi \xi \eta \eta + \frac{1}{\alpha^4} W, \eta \eta \eta \eta = -\frac{Z}{\beta^2} \left[\frac{2-\nu}{\alpha} V, \xi \xi \eta + \frac{1}{\alpha^3} V, \eta \eta \eta \right] \\ + 12\beta^3 \left[(e_x + \nu e_y) (\phi_x, \xi + \phi_{ox}, \xi) + (1-\nu) e_{xy} \{ (\phi_y, \xi + \phi_{oy}, \xi) \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} (\phi_x, \eta + \phi_{ox}, \eta) \} + \frac{1}{\alpha} (e_y + \nu e_x) (\phi_y, \eta + \phi_{oy}, \eta) \right. \\ \left. + (\phi_x + \phi_{ox}) (e_x, \xi + \nu e_y, \xi) + (1-\nu) (\phi_y + \phi_{oy}) e_{xy}, \xi \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{\alpha} (\phi_x + \phi_{ox}) e_{xy}, \eta + \frac{1}{\alpha} (\phi_y + \phi_{oy}) (e_y, \eta + \nu e_x, \eta) \right] \\ + 12Z\beta^2 \left[(1-\nu) e_{xy} (\varepsilon_{xy} + \phi) + (e_y + \nu e_x) (1 + \varepsilon_y) \right] \quad (22c)$$

ただし、式中の $\bar{e}_x$ 、 $\bar{e}_y$ 、 $\bar{e}_{xy}$ は次のように表される。

$$\bar{e}_x = \frac{1}{2} \{ \varepsilon_x^2 + (\varepsilon_{xy} + \phi)^2 + \phi_x^2 \} + \phi_x \phi_{ox} \quad (23a)$$

$$\bar{e}_y = \frac{1}{2} \{ (\varepsilon_{xy} - \phi)^2 + \varepsilon_y^2 + \phi_y^2 \} + \phi_y \phi_{oy} \quad (23b)$$

$$\bar{e}_{xy} = \frac{1}{2} [\epsilon_x (\epsilon_{xy} - \phi) + \epsilon_y (\epsilon_{xy} + \phi) + \phi_x \phi_y + \phi_x \phi_{oy} + \phi_y \phi_{ox}] \quad (23c)$$

境界条件式 (13) ~ (21) は次のようになる。

$$\xi = 0 \quad \text{において} \quad W(\xi) = W(-\xi) \quad (24)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \quad \text{において} \quad W = 0, \quad W, \xi \xi + \nu Z V, \eta / \alpha \beta^2 + \phi W, \xi = 0 \quad (25)$$

$$\eta = 0 \quad \text{において} \quad W(\eta) = W(-\eta) \quad (26)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \quad \text{において} \quad \text{単純支持の場合: } W = 0, \quad W, \eta \eta + Z V, \eta \alpha / \beta^2 = 0 \quad (27)$$

$$\text{固定支持の場合: } W = 0, \quad W, \eta = 0 \quad (28)$$

$$\xi = 0 \quad \text{において} \quad U(\xi) = -U(-\xi), \quad V(\xi) = V(-\xi) \quad (29)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \quad \text{において} \quad U, \xi + \nu V, \eta / \alpha = \nu Z W - \beta^2 [\bar{e}_x + \nu \bar{e}_y] \quad (30a)$$

$$U, \eta / \alpha + V, \xi = -2 \beta^2 \bar{e}_{xy} \quad (30b)$$

$$\eta = 0 \quad \text{において} \quad U(\eta) = U(-\eta), \quad V(\eta) = -V(-\eta) \quad (31)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \quad \text{において} \quad V = \frac{1}{2} \alpha \beta^2 V_m, \quad U, \eta / \alpha + V, \xi = -2 \beta^2 \bar{e}_{xy} \quad (32)$$

(4) 応力と有効幅

応力は無次元量 $\tilde{\sigma} = \sigma b^2 t / \pi^2 D$ で表すことにする。まず、膜応力は次式から求めることができる。

$$\tilde{\sigma}_x^m = N_x b^2 / \pi^2 D = (12 \beta^2 / \pi^2) (e_x + \nu e_y) \quad (33a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^m = N_y b^2 / \pi^2 D = (12 \beta^2 / \pi^2) (e_y + \nu e_x) \quad (33b)$$

$$\tilde{\tau}_{xy}^m = N_{xy} b^2 / \pi^2 D = (12 \beta^2 / \pi^2) (1 - \nu) e_{xy} \quad (33c)$$

ここに、 $\tilde{\sigma}_x^m$ 、 $\tilde{\sigma}_y^m$ は母線方向および円周方向の膜応力、 $\tilde{\tau}_{xy}^m$ はせん断膜応力である。

曲げ応力は次式から求める。

$$\tilde{\sigma}_x^b = 6 M_x b^2 / \pi^2 D = - (6 \beta / \pi^2) (\tilde{\kappa}_x + \nu \tilde{\kappa}_y) \quad (34a)$$

$$\tilde{\sigma}_y^b = 6 M_y b^2 / \pi^2 D = - (6 \beta / \pi^2) (\tilde{\kappa}_y + \nu \tilde{\kappa}_x) \quad (34b)$$

$$\tilde{\tau}_{xy}^b = 6 M_{xy} b^2 / \pi^2 D = - (6 \beta / \pi^2) (1 - \nu) \tilde{\kappa}_{xy} \quad (34c)$$

ここに、 $\tilde{\sigma}_x^b$ 、 $\tilde{\sigma}_y^b$ は母線方向および円周方向の曲げ応力、 $\tilde{\tau}_{xy}^b$ はねじり応力である。

円筒パネルの曲率外側表面応力 $\tilde{\sigma}_x^o$ 、 $\tilde{\sigma}_y^o$ 、 $\tilde{\tau}_{xy}^o$ と内側表面応力 $\tilde{\sigma}_x^i$ 、 $\tilde{\sigma}_y^i$ 、 $\tilde{\tau}_{xy}^i$ は膜応力と曲げ応力とから算定できる。

設計にあたって降伏の発生を照査する必要があるが、それに使われる次の von Mises の等価応力を検討する。

$$\sigma_e = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (35)$$

また、円筒パネルの任意横断面における平均円周方向膜応力 $\tilde{\sigma}_m$ は次式で表される。

$$\tilde{\sigma}_m = 2 \int_0^{1/2} \tilde{\sigma}_y^m d\xi = \frac{24 \beta^2}{\pi^2} \int_0^{1/2} (e_y + \nu e_x) d\xi \quad (36)$$

円筒パネルの任意横断面における有効幅 b_e は次のように定義される。

$$b_e / b = \tilde{\sigma}_m / (\tilde{\sigma}_y)_{x=b/2} \quad (37)$$

3. 数値計算法

基礎方程式 (22) と境界条件式 (24) ~ (32) を差分法を用いて解く。

(1) 初期たわみ

次の2種類の初期たわみ形状を仮定する。

①円周方向および母線方向に1半波の初期たわみ

$$W_0(\xi, \eta) = \omega \cos \pi \xi \cos \pi \eta \quad (38)$$

②円周方向に3半波、母線方向に1半波の初期たわみ

$$W_0(\xi, \eta) = -\omega \cos \pi \xi \cos (3\pi \eta - \pi) \quad (39)$$

仮定した初期たわみの妥当性を調べるため、曲りばりの実験¹²⁾において測定された初期たわみと比較するとFig.3 のようになる。 $\alpha = 1$ の場合、式 (38) の初期たわみが実測値とよく一致する。 $\alpha = 2$ の場合、式 (39) は実測されたの初期たわみの特徴をよく表現している。

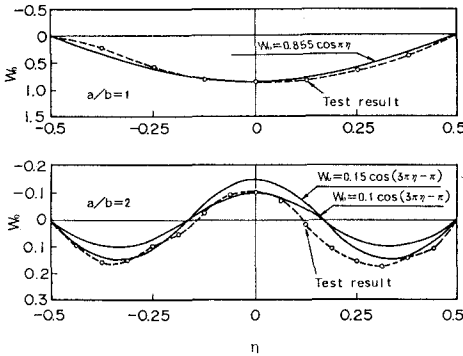


Fig.3 Distributions of initial deflection along circumferential center-line

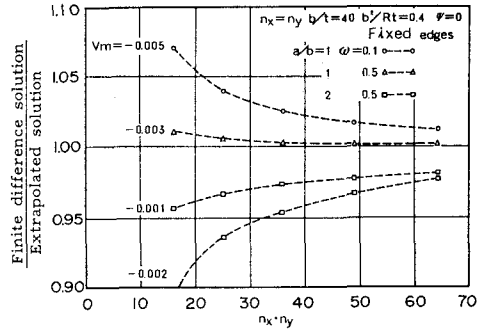


Fig.4 Accuracy of finite difference solutions

(2) 差分法による解法

1/4領域をx方向に n_x 分割、y方向に n_y 分割する。境界外側に仮想分点を設けない方式¹³⁾を採用し、基礎方程式は普通差分表示を、境界条件式は高精度差分表示を行い高精度解を得る。¹³⁾

仮定値UおよびVを用い、式 (22c) を解いてWを求める。次に式 (22a) および (22b) を解いてUとVを求める。この手順を繰り返す。加速Jacobi法、Aitken外挿法およびLagrange補間法を用いて、解の収束を早める。詳細は文献14)に譲る。

(3) 差分解の精度

差分解の精度と分割数の関係を種々の場合について調査した。 $\alpha = 1, 2, \beta = 40, Z = 0.4, \phi = 0$ 、固定支持端、初期たわみ形状①、 $\omega = 0.1, 0.5$ の場合の $W_0 + W = 1$ となる圧縮荷重 V_m に対する差分解と分割数との関係を例示するとFig.4 のようになる。図から分かるように、 $\alpha = 2$ の場合、荷重が大きくなると解の精度は悪くなる。 $\alpha = 1$ の場合に比べて $\alpha = 2$ の場合は解の精度は良くない。これは、たわみの円周方向分布が3半波になるなど、複雑な挙動をするためと思われる。また、初期たわみが大いほど解の精度は良い。調査結果から、電子計算機の記憶容量と計算時間を勘案して、以後の計算には分割 $n_x = n_y = 6$ を用いることにする。この場合、差分解の誤差は5%以下に留めることができるものと予測される。

4. 数値計算結果とその考察

引張または圧縮の円周方向面内荷重を受ける円筒パネルの非線形挙動を解析し、変位および応力を求めた。¹⁵⁾ 円筒パネルの形状寸法を表すパラメータとして縦横比 $\alpha = 1 \sim 3$ 、幅厚比 $\beta = 40, 80$ 、曲率パラメータ $Z = 0.4 \sim 5$ を選び、曲線側辺の弾性拘束を表す固定係数 $\psi = 0, 100$ 、直線端辺が単純支持 (S.S.) または固定 (Fixed) の場合で、強制変位は圧縮荷重の場合は $V_m = 0 \sim -0.01$ 、引張荷重の場合は $V_m = 0 \sim 0.01$ とし、ポアソン比 $\nu = 0.3$ について数値計算を行った。以下、主な結果のみを示す。

4.1 幅厚比と曲率パラメータ

始めに、幅厚比 β について検討する。 $V_m \beta^2$ の値が等しくなるような V_m と β の値を選んで、変位および応力を比較してみた。 $Z = 1$ 、 $\beta = 40, 80$ 、 $\alpha = 1$ 、初期たわみ形状①、 $\omega = 0.1$ 、 $\psi = 0$ 、固定支持端の円筒パネルの中央たわみ、膜応力、曲げ応力および等価応力の値を Table 1 に例示する。この例からも分かるように、 β の値が変わっても、 $V_m \beta^2 = 2 v_m b^2 / at^2$ の値が等ければ、変位と応力はほぼ等しくなり、パラメータ β を取り上げる必要はない。¹⁶⁾ これは式 (2)、(3) および (12) を文献14) のように簡略化してもよいことを示している。よって以後の数値計算は $\beta = 40$ に対して行う。

Table 1 Comparison of deflection and stresses

β	40	80
V_m	-0.004	-0.001
W	-0.587	-0.591
$\tilde{\sigma}_y^m$	-5.991	-5.989
$\tilde{\sigma}_x^m$	0.515	0.520
$\tilde{\sigma}_y^b$	-7.893	-7.943
$\tilde{\sigma}_x^b$	-5.338	-5.369
$\tilde{\sigma}_e$	6.265	6.265

4.2 圧縮荷重を受ける場合

円筒パネルが圧縮荷重を受ける場合について考察する。まず、端辺が固定支持され、側辺が単純支持 ($\psi = 0$) または固定支持 ($\psi = 100$) されて、初期たわみ形状①の場合について、たわみ、平均円周方向膜応力、膜応力、曲げ応力、有効幅および等価応力を議論する。次に端辺の支持条件と初期たわみ形状の影響を考察する。

(1) たわみ

単純支持側辺：荷重とパネル中央点のたわみとの関係を Fig. 5 に示す。パネルは曲率を有しているため、 $\omega = 0$ では外側へたわむ。しかるに、 $Z = 0.4$ の場合 $\omega \geq 0.1$ 、 $Z = 1$ の場合 $\omega \geq 0.15$ 、 $Z = 5$ の場合 $\omega \geq 0.8$ で内側へたわむ。すなわち、 ω がある正の値以上になると、たわみは逆転して内側へ増加する。この限

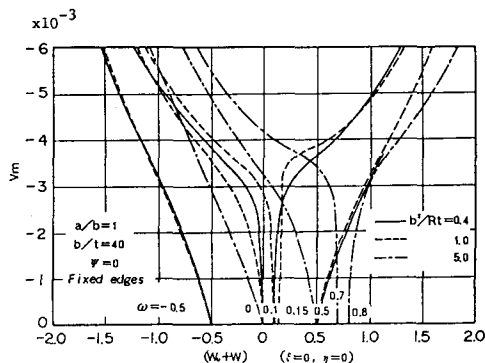


Fig.5 Relation between compelled displacement and center deflection

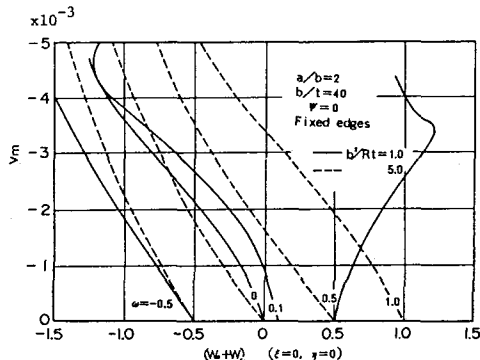


Fig.6 Relation between compelled displacement and center deflection

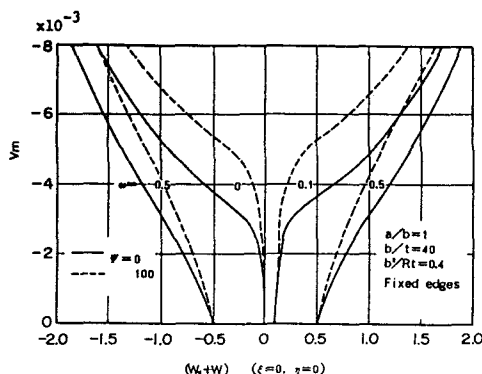


Fig.7 Relation between compelled displacement and center deflection

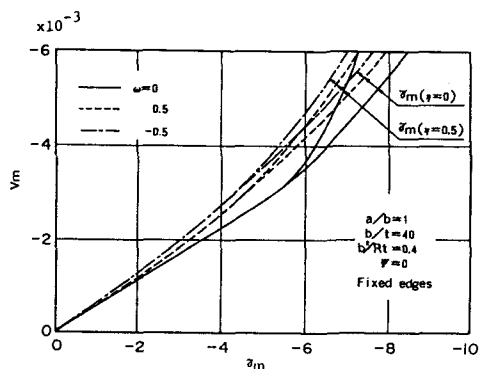


Fig.8 Relation between compelled displacement and average circumferential membrane stress

界値 ω^* を境に、 ω が増加した場合と減少した場合とでは荷重—たわみ曲線はほぼ対称になる。 ω の値が限界値から離れるほど荷重—たわみ曲線に非線形性が早く現れる。

この限界値 ω^* を検討するため、パネル中央点のライズ f t を考えると、次のように表される。

$$f = \beta^2 / Z - \sqrt{(\beta^2 / Z)^2 - (\alpha \beta)^2} / 4 \quad (40)$$

$\alpha = 1$ の場合、 ω^* の値を詳細に調査すると、 $\omega^* = (1.1 \sim 1.2) f$ である。 $\alpha = 2$ の場合、荷重—たわみ曲線は Fig.6 のようになる。この場合の限界値は少し小さくなって $\omega^* = (0.5 \sim 0.6) f$ である。また、 $\alpha = 1$ の場合に見られなかった現象が現れる。すなわち、荷重の増加に伴って、たわみは増加するが、ある荷重を過ぎると逆に減少する。これは、円周方向のたわみ形状が 1 半波であったものが、3 半波に変化するためである。

$\alpha = 3$ の場合についても荷重—たわみ曲線を描いて調べると、限界値はさらに小さくなって、 $\omega^* = (0.3 \sim 0.4) f$ になる。そして、 Z の値が小さい場合、荷重が大きくなると円周方向に 3 半波のたわみ分布が生じる。

固定支持側辺： $\alpha = 1$ の場合の荷重とパネル中央点のたわみとの関係を Fig.7 に示す。図には側辺の拘束のない場合 ($\psi = 0$) の曲線も比較のために示してある。これから分かるように、側辺が拘束されるとたわみは小さくなるが、 $V_m - W$ 曲線の形は類似している。 Z の値が大きい場合について同様な荷重—たわみ曲線を描いて調べると、限界値 ω^* は側辺が拘束されるとわずかに小さくなることが分かる。

また、側辺が拘束されると、 α の小さい値 ($Z = 5$ 、 $\omega = 0.5$ では $\alpha = 2$) から円周方向 3 半波のたわみが生じる。

(2) 平均円周方向膜応力

端辺に加えられる強制変位 V_m によって載荷されるが、荷重強度としての任意断面における平均円周方向膜応力 $\tilde{\sigma}_m$ と V_m との関係を考察する。

単純支持側辺： $\alpha = 1$ の場合の $V_m - \tilde{\sigma}_m$ 関係を Fig.8 に示す。初期たわみがない場合、低い V_m の範囲では V_m と $\tilde{\sigma}_m$ は線形関係にあり、この範囲では面外変形と面内変形が相関していない。 V_m が大きくなって両変形が相関するようになると、 V_m と $\tilde{\sigma}_m$ の関係は非線形になる。そのとき、中央横断面に比べて、端辺で $\tilde{\sigma}_m$ が現象する。 Z が大きい場合には、 V_m が小さい段階から V_m と $\tilde{\sigma}_m$ の非線形関係が生じる。

初期たわみがある場合は、ない場合に比べて $\tilde{\sigma}_m$ の値は減少するが、 V_m にほとんど比例する。

Fig.9 は $\tilde{\sigma}_m$ の円周方向分布を示す。 V_m が増大すると、 $\tilde{\sigma}_m$ の分布は不均一になり、その値は端辺では小さくなるが、端辺に近い横断面で大きくなる。

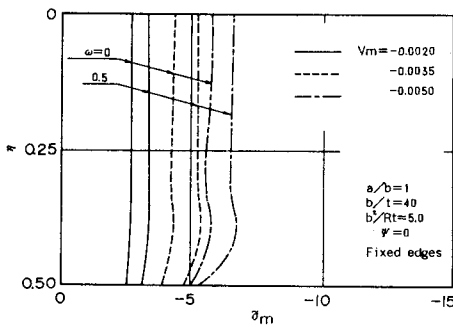


Fig.9 Distribution of average circumferential membrane stress along y-direction

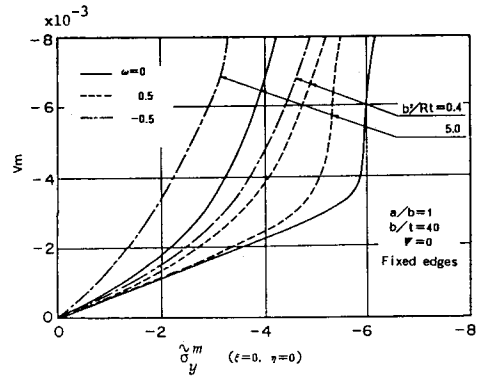


Fig.10 Relation between compelled displacement and circumferential membrane stress at center

固定支持側辺：この場合の $V_m - \bar{\sigma}_m$ 曲線を単純支持側辺の場合の曲線と比較すると、側辺の拘束によって初期たわみの影響が小さくなることが分かる。初期たわみが限界値に近いほど $\bar{\sigma}_m$ は減少しない。また、無拘束の場合と同様に、 $\bar{\sigma}_m$ の円周方向分布はたわみ波形に関係があり、1半波のたわみの場合は、 $\bar{\sigma}_m$ は端辺で小さく、端辺近傍で大きくなり、それ以外の断面ではほぼ均一である。たわみ波形が3半波の場合は、 $\bar{\sigma}_m$ は円周方向に複雑に変化する。

(3) 膜応力

円周方向直膜応力 $\bar{\sigma}_y^m$ と母線方向直膜応力 $\bar{\sigma}_x^m$ について考察する。

単純支持側辺：Fig.10に荷重とパネル中央点の $\bar{\sigma}_y^m$ の関係を示す。 $Z=0.4$ の場合、 $\omega=0$ が限界値に近く、 $Z=5$ の場合、 $\omega=0.5$ が限界値に近い。初期たわみが限界値に近いほど中央点の $\bar{\sigma}_y^m$ が大きくなる。

中央横断面における $\bar{\sigma}_y^m$ の分布はFig.11のようになる。パネル中央で減少が著しく、側辺に近づくほど大きくなる。荷重が大なるほど、中央部の応力減少の比率は大きい。

次に、 $\bar{\sigma}_x^m$ について考察する。この応力は設計上は望ましくないもので、小さい方がよい。Fig.12にパネル中央点の $\bar{\sigma}_x^m$ と強制変位の関係を示す。パネル中央点の $\bar{\sigma}_x^m$ の値は初期たわみが限界値に近いほど小さく、また、 Z の値が大きいと、荷重の小さい間はほとんど生じない。

$\bar{\sigma}_x^m$ の分布を調べると、一般にパネル中央部で引張り、端部で圧縮が作用する。

固定支持側辺：側辺の拘束がある場合、たわみが小さくなるので、パネル中央部の $\bar{\sigma}_y^m$ はあまり減少しない。初期たわみの影響は無拘束の場合と同様で、限界値に近いほど $\bar{\sigma}_y^m$ の値は大きい。

$\bar{\sigma}_x^m$ は拘束のない場合よりも小さく、初期たわみが限界値に近いほど小さい。ただし、端部では無拘束の場合より大きい $\bar{\sigma}_x^m$ が生じることがある。

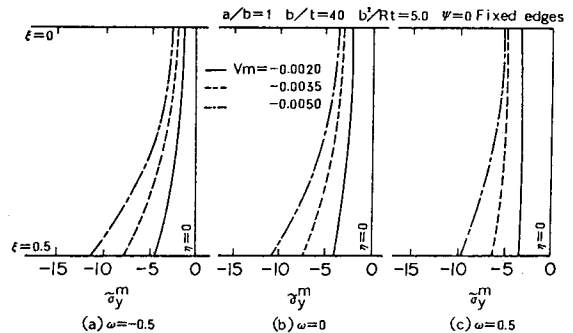


Fig.11 Distribution of circumferential membrane stress along central transverse section

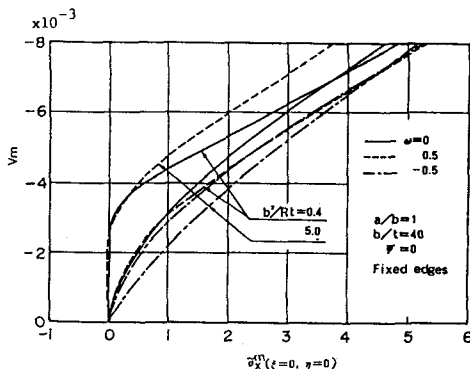


Fig.12 Relation between compelled displacement and membrane stress in x-direction

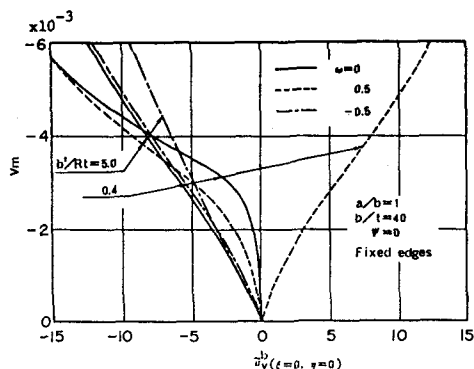


Fig.13 Relation between compelled displacement and bending stress in y-direction

(4) 曲げ応力

円周方向曲げ応力 $\tilde{\sigma}_y^b$ と母線方向曲げ応力 $\tilde{\sigma}_x^b$ について考察する。

単純支持側辺 : Fig.13は荷重とパネル中央点の $\tilde{\sigma}_y^b$ の関係を示す。曲率内側へたわむ $Z=0.4$ 、 $\omega=0.5$ の場合は正の曲げ応力が生じているが、曲率外側へたわむ他の場合は負の曲げ応力が生じる。 $Z=0.4$ の場合 $\omega=0$ が、 $Z=5$ の場合 $\omega=0.5$ が限界初期たわみに近いが、その場合は、面外変形と面内変形が関連しない低い荷重段階で曲げ応力は小さく、荷重が増すと急激に増大する。

Fig.14に荷重とパネル中央点の $\tilde{\sigma}_x^b$ の関係を示す。 $\tilde{\sigma}_y^b$ と同じ方向の $\tilde{\sigma}_x^b$ が生じるほか、同様な特徴がある。 $\tilde{\sigma}_x^b$ の $\xi=0$ 断面に沿った分布は、パネル中央部が端辺より小さい。

固定支持側辺 : 無拘束の場合とほぼ同様な傾向がみられる。ただし、側辺の拘束のために、パネル中央の $\tilde{\sigma}_y^b$ が小さく、側辺で中央部より大きい負の $\tilde{\sigma}_x^b$ が生じる。

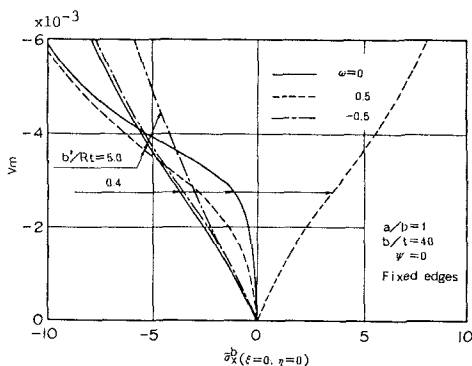


Fig.14 Relation between compelled displacement and bending stress in x-direction

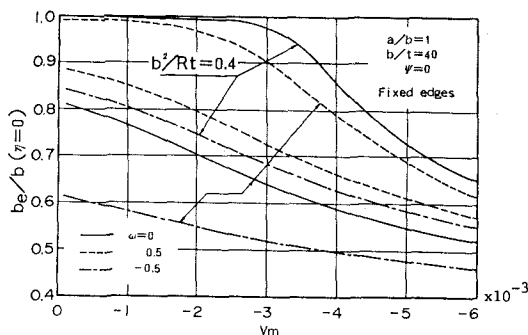


Fig.15 Relation between compelled displacement and effective width at center transverse section

(5) 有効幅

単純支持側辺 : Fig.15に荷重と中央横断面の有効幅 b_e/b の関係を示す。この関係は荷重とたわみの関係に類似している。初期たわみが限界値に近い場合、有効幅はある範囲の荷重に対して減少しないが、荷重が大きくなると急激に減少する。初期たわみが限界値から離れたと、有効幅は荷重の増加とともに漸減してゆく。

固定支持側辺 : 側辺が拘束されると有効幅の減少の程度が小さくなる。

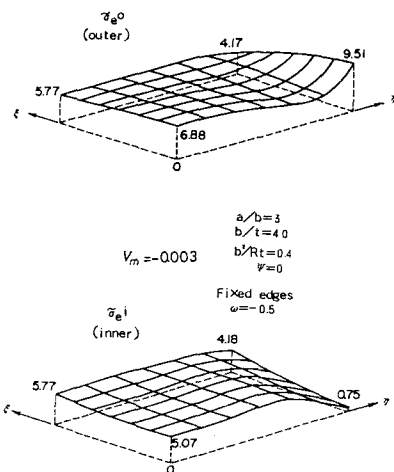


Fig.16 Equivalent stress distribution

の等価応力 $\tilde{\sigma}_e^o$ と $\tilde{\sigma}_e^i$ を計算し、応力の卓越する位置を検討する。

単純支持側辺: Fig.16に等価応力の分布を示す。これから、 $\tilde{\sigma}_e$ が最大になる位置は、端辺中央点、側辺中央点、パネル中央点のいずれかであることが分かる。

Fig.17はこれら3点と隅点の計4点における等価応力と荷重の関係を示す。この場合、端辺中央内側表面の応力が卓越している。しかし、 $Z=5$ の場合を調べると、同じ位置の外側表面の応力が卓越する。これは荷重に伴うたわみの増加方向と関連する。たわみが内側へ増加する場合は端辺中央の内側表面で、反対にたわみが外側へ増加する場合は同じ位置の外側表面で等価応力が最大となる。

固定支持側辺: 側辺の拘束が等価応力に与える影響を調べた。側辺無拘束の場合、端辺の固定支持の影響が大きく、ほとんど端辺中央点に最大等価応力が生じた。これに対して、側辺が拘束されると、側辺中央点の等価応力も大きくなり、しばしば端辺中央点のものより大きくなる。

(7) 端辺が単純支持の場合

実際のパネルの多くは両端辺固定支持されていると考えられる。しかし、部材端に接するパネルで、横補剛材または隔板の拘束が無視できる場合は、端辺単純支持とみなせる。そこで、端辺単純支持の場合についても数値計算を行った。

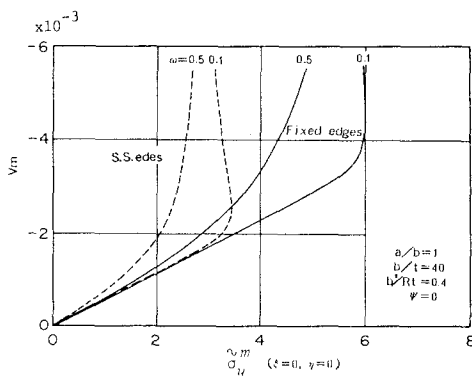


Fig.18 Relation between compelled displacement and membrane stress in y-direction

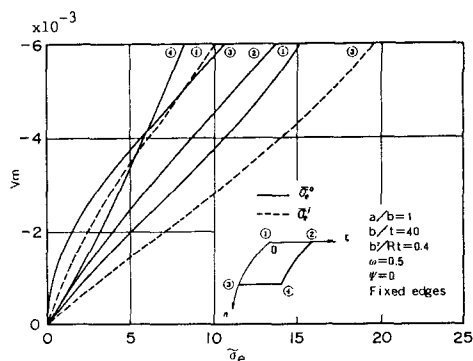


Fig.17 Relation between compelled displacement and equivalent stresses

(6) 等価応力

パネルは曲げによって生じる応力 σ_x^b や σ_y^b のために、局所的に応力が卓越する。以下に曲率外側表面と内側表面

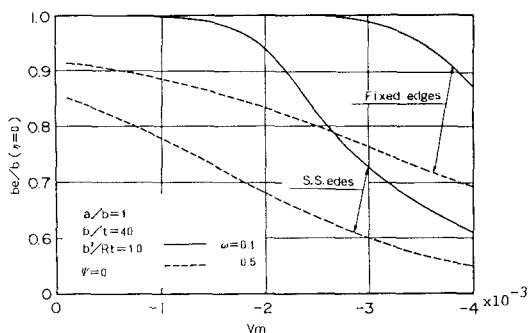


Fig.19 Relation between compelled displacement and effective width at center transverse section

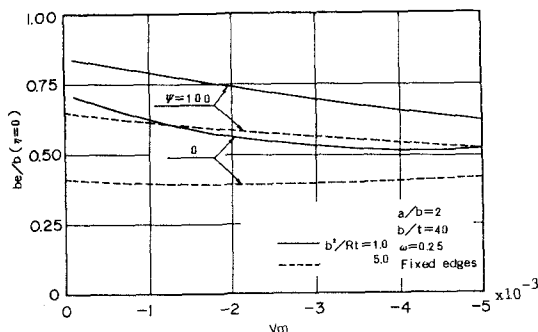


Fig.20 Relation between compelled displacement and effective width at center transverse section

Fig.18は強制変位とパネル中央点の円周方向膜応力 $\tilde{\sigma}_y^m$ との関係を、限界値に近い初期たわみを有する場合について調べたものである。端辺単純支持の場合、小さい荷重で $\tilde{\sigma}_y^m$ が増加しなくなる。

Fig.19は強制変位とパネル中央横断面の有効幅との関係を示す。端辺単純支持の場合は、荷重の増加とともに有効幅は漸減する。

(8) 初期たわみ形状の影響

これまで、初期たわみ形状①の場合に限って論じてきた。ここでは、初期たわみ形状②に対して数値計算を行い、初期たわみ形状の影響を考察する。 α が小さいと3半波の初期たわみが発生しないと考えられるので数値計算は $\alpha=2$ の場合について行う。

有効幅 Fig.20に強制変位と中央横断面の有効幅との関係を示す。側辺の拘束の有無に関係なく、有効幅は荷重の増加とともに若干減少するが、それぞれほぼ一定値に収束する。 $Z=1$ の場合、たわみは3半波のまま進行し、 $Z=5$ の場合、1半波のたわみ波形が成長するのであるが、前者の場合、有効幅は大きい。

曲げ応力 設計上、重要な母線方向曲げ応力の分布を調べると、パネル中央と端辺で負、その中間で正の値を取る。すなわち、初期たわみ形状に影響されており、1半波の初期たわみの場合よりもこの応力は小さい。

等価応力 最大等価応力が生じる位置は初期たわみ形状②の場合も端辺中央点、側辺中央点、パネル中央点のいずれかである。たわみ波形が3半波のまま進行する場合は端辺中央点で、1半波のたわみ波形が成長する場合は側辺中央点で等価応力が最大となることが多い。

4.3 引張荷重を受ける場合

(1) たわみ

Fig.21に強制変位とパネル中央のたわみの関係を示す。引張荷重の場合、圧縮荷重の場合と違ってたわみは正の方向に増加し、ある程度の荷重ではほぼ一定となる。たわみの増加量は実質的なライズ $(f-\omega)t$ の値に比例する。すなわち、ほとんどの場合、 $W=(0.5 \sim 0.8)(f-\omega)$ 以上に増加しない。 $Z=0.4 \sim 1$ の場合、曲率が小さいので、 $\omega=0.5$ であると実質的なライズが負になる。そのため、引張りを受けて負のたわみを生じることになる。

(2) 有効幅

Fig.22は強制変位と中央横断面の有効幅の関係を示す。引張荷重の場合、荷重の増加に伴い有効幅は増加する。これは圧縮荷重の場合とは逆の傾向である。実質的なライズが小さいほど有効幅は大きくなる。また、側辺が拘束されると有効幅は増加する。

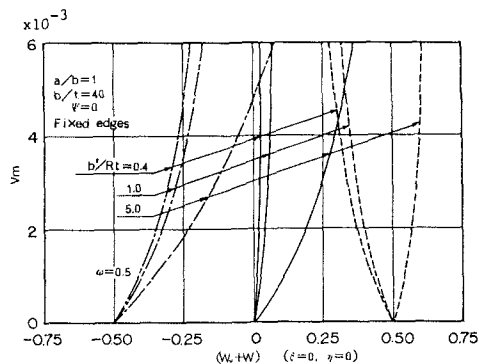


Fig.21 Relation between compelled displacement and center deflection

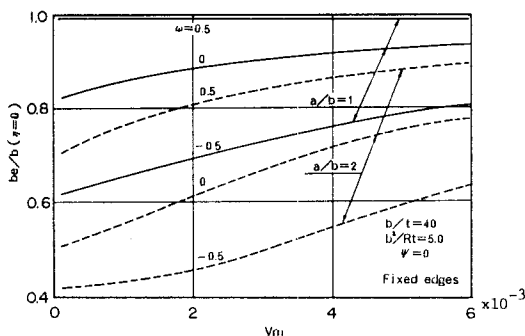


Fig.22 Relation between compelled displacement and effective width at center transverse section

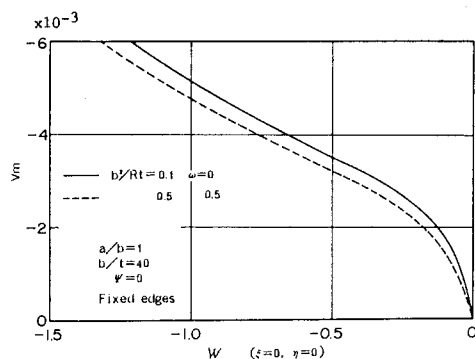


Fig.23 Relation between compelled displacement and center deflection

(3) 曲げ応力

設計に当たって重要な母線方向曲げ応力を調べてみると、 $f - \omega$ の値が小さい場合には小さく、側辺が拘束されている場合にも小さくなる。

(4) 等価応力

圧縮荷重の場合はパネル中央点に最大等価応力が生じることもあったが、引張荷重の場合は、端辺中央点または側辺中央点のいずれかで等価応力は最大となる。

(5) 端辺が単純支持の場合

以上では、端辺が固定支持されている場合に限って論じてきた。端辺が単純支持の場合について考察すると、固定支持の場合に比べてたわみは大きくなり、中央横断面の有効幅は小さくなる。 $f - \omega$ の値が小さい場合、有効幅は大きい。

(6) 初期たわみ形状の影響

以上では、初期たわみ形状①の場合に限って考察してきた。ここで、 $\alpha = 2$ 、初期たわみ形状②の場合を検討すると、有効幅は初期たわみ形状の影響は受けないようである。最大等価応力の生じる位置は荷重の大きさによって変化し、パネル中央点、端辺中央点、側辺中央点のいずれかである。1半波初期たわみの場合との相違点は、パネル中央点の等価応力にも注意しなければならないことである。

4.4 曲率パラメータと初期たわみ

円筒パネルが $\omega < f$ の範囲の初期たわみを有する場合、実質的に曲率に変化したのと同様の意味を持つ。初期たわみによって厳密な円弧とはならないが、パネル中央点を通る円弧を仮定し、元の曲率パラメータ Z が Z' になったものとみなす。式 (40) から次の関係が得られる。

$$Z = 2 f \beta^2 / \{f^2 + (\alpha \beta)^2 / 4\} \quad (41)$$

$$Z' = 2 (f - \omega) \beta^2 / \{(f - \omega)^2 + (\alpha \beta)^2 / 4\} \quad (42)$$

いま、 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 40$ 、 $Z = 5$ の場合を考える。 $f = 0.625$ であるから、初期たわみが $\omega = 0.5$ であれば $Z' = 1$ となる。すなわち、初期たわみのある $Z = 5$ 、 $\omega = 0.5$ の円筒パネルと、初期たわみのない $Z = 1$ 、 $\omega = 0$ の円筒パネルとが等価であると考えられる。そこで、両パネルを圧縮荷重のもとで解き、パネル中央点の付加たわみを比較すると、Fig.23のようになる。図から分かるように、両パネルはほぼ同じ挙動をしている。このことは、引張荷重の場合でも成り立つ。すなわち、初期たわみを有する円筒パネルの挙動は、その中央点を通る円弧を仮定した場合の初期たわみのない円筒パネルの挙動から推定できる。

5. あとがき

初期たわみを有する円筒パネルを、Washizuの薄いシェルに対する非線形理論を初期たわみのある場合に拡張して適用し、その非線形挙動を差分法を用いて数値的に解析した。円筒パネルは両端の強制面内変位によって面内の引張または圧縮荷重を受ける。数値計算結果から、円筒パネルの面外変位、膜応力、曲げ応力、等価応力および有効幅に対する、初期たわみの形状と大きさ、荷重、縦横比、幅厚比、曲率、周辺支持条件などの影響を考察した。

1) 荷重の無次元量を適当に定めることにより、変位や応力が幅厚比と無関係になる。

2) 圧縮荷重の場合、初期たわみの限界値を考えることができる。これを境にして、荷重に伴うたわみの増加方向が逆になる。

3) 円周方向膜応力は、曲率に伴うたわみのために横断面中央部分で減少する。圧縮荷重の場合、初期たわみが限界値に近いと、また、引張荷重の場合、初期たわみがライズに近いと、ともに応力減少は少ない。そして、有効幅は大きくなる。

4) 等価応力は、端辺中央点、側辺中央点、パネル中央点のいずれかで最大になる。

5) 初期たわみを有する円筒パネルを、実質的な曲率を考えることにより、初期たわみのない円筒パネルに置き換えることができる。

6) 3半波の初期たわみの場合について考察した。圧縮荷重の場合、初期たわみの限界値があり、それを境に、3半波のたわみ波形が進行する場合と、1半波のたわみ波形が成長する場合とに別れる。

数値計算には関西大学の FACOM M-160F および大阪大学大型計算機センターの ACOS 900 を使用した。

参考文献

- 1) Donnell, L.H. : A new theory for the buckling of thin cylindrical shells under axial compression and bending, ASME Transactions, Vol.56, pp.795-806, Nov., 1934.
- 2) Donnell, L.H., and Wan, C.C. : Effect of imperfections on buckling of cylinders and columns under axial compression, Jour. of Applied Mechanics, Vol.17, pp.73-83, 1950.
- 3) Van Slooten, R.A., and Soong, T.T. : Buckling of a long, axially compressed, thin cylindrical shell with random initial imperfections, Jour. of Applied Mechanics, Vol.39, pp.1067-1071, Dec., 1972.
- 4) Turula, P., and Chu, K.H. : Buckling of open cylindrical shells with imperfections, Proc. of ASCE, Vol.96, No.EM6, pp.1125-1142, Dec., 1970.
- 5) Hutchinson, J.W. : Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells, Jour. of Applied Mechanics, Vol.34, pp.49-55, Mar., 1967.
- 6) 植村益次 : 初期たわみを有する浅い部分球かくの外圧による座屈、日本機械学会論文集、Vol.35, pp.1617-1623, 1969-8.
- 7) 三上市蔵・米澤 博 : 曲りばり円筒フランジの応力分布と有効幅、土木学会論文報告集、No.315, pp.13-26, 1981-11.
- 8) Mikami, I., and Yonezawa, H. : Nonlinear cylindrical flanges of vertically curved beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.27, Univ. of Tokyo Press, pp.143-153, 1977.
- 9) Washizu, K. : Variational Method in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
- 10) Marguerre, K. : Zur Theorie der Gekrummten Platte Grosser Formänderung, Proc. of 5th Int. Cong. Applied Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., pp.93-101, 1938.
- 11) Chia, C.Y. : Nonlinear Analysis of Plates, McGraw-Hill, Inc., 1980.
- 12) 岡山正行 : π 型断面曲り梁の有効幅に関する研究、関西大学大学院修士論文、1978-3.
- 13) 三上市蔵 : "差分法を用いた板の非線形解析"への討議、土木学会論文報告集、No.265, pp.147-150, 1977-9.
- 14) 三上市蔵・古西和夫・米澤 博 : 曲げを受ける円筒腹板パネルの非線形挙動、土木学会論文報告集、No.299, pp.23-34, 1980-7.
- 15) 矢部幸男 : 円周方向面内力を受け、初期たわみを有する円筒パネルの弾性有限変形に関する研究、関西大学大学院修士論文、1982-3.
- 16) Mikami, I., and Harada, M. : Nonlinear analysis of orthotropic cylindrical panels under circumferential in-plane loading, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.33, Univ. of Tokyo Press, 1985 (印刷中) .