

充実断面空間棒材の有限変位理論の一定式化

A FORMULATION OF FINITE DISPLACEMENT THEORY OF ROD

後藤芳顯* 松浦 聖** 長谷川彰夫***

By Yoshiaki GOTO, Sei MATSUURA and Akio HASEGAWA

The governing equations for the finite displacement beam theory are often formulated through the principle of virtual work by introducing the pertinent kinematic field with displacement components defined in terms of the coordinates fixed in the space. However, this formulation can hardly be applied for the theory of space beams without any restrictions on the magnitude of displacements, since the kinematical field becomes highly nonlinear largely due to the finite rotations in the space.

This paper presents a new formulation with the separation of rigid body displacements, in which deformation components are introduced instead of the ordinary displacement components. This new formulation considerably simplifies the derivations through the principle of virtual work and the exact governing equations for the theory of finite displacements with finite strains as well as those with small strains can be easily obtained by the usual procedures.

1. ま え が き

棒材の有限変位理論の定式化では、近年仮想仕事の原理が用いられることが多い。これは、適合条件式と統一のとれたつり合い式を得ることが可能であることの他に、変形状態における複雑な幾何学的考察なしに、一貫した数学演算のみで、つり合い式、力学的境界条件式を求めうることに起因している。しかしながら、変位の大きさに制限を付けない空間棒材の有限変位理論では、平面棒材と異なり、三次元的な有限回転を考慮せねばならず、定式化の過程はかなり複雑なものとなる。したがって、その定式化では、微小ひずみの条件に加えて、変位の大きさに制限を付け簡略化される場合が多く、また、変数として導入される部材^{1)~7)}の有限回転角の定義も各理論間で異なるなど、理論のみならず、定式化手法も確立されたものが必ずしもないというのが現状である。

従来の仮想仕事の原理による空間棒材の定式化手法^{2),4)~7)}では、まず、棒理論の仮定から、棒材軸線上の空間固定座標方向の並進変位3成分と、軸線まわりの一つの回転成分を独立成分として変位場が求められている。この回転成分の定義は各理論間で異なっているが、いずれも何らかの回転角で表現されているため、変位場は回転成分が連成した複雑な高次非線形式となっている。つぎに、変位場を仮想仕事の式に代入

* 工博 名古屋工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

** 工博 名古屋工業大学教授 工学部土木工学科 (〒466 名古屋市昭和区御器所町)

*** 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒133 東京都文京区本郷)

して、つり合い式と力学的境界条件式が求められるが、このとき多くは、通常^{2),4),5),7)}の微小変位理論のときと同様に、変位場を記述した独立な変位、回転成分を独立変分量に選り、変分と部分積分を行い、基本式を導く方法を採用している。しかし、先に述べたように、変位の大きさに制限を付けない場合の変位場は複雑なものである、これを用いた場合の仮想仕事の式における変分、部分積分の演算過程はさらに繁雑となり、つり合い式ならびに力学的境界条件式の誘導は非常に困難になる。このため、精度の良い変位場が求められている場合も、仮想仕事の式による演算過程で何らかの近似がなされ、結果として提示されているつり合い式、力学的境界条件式は2次、あるいは3次までの変位、回転成分の非線形項を考慮した変位の大きさに制限のある有限変位理論となっている。^{5),7)}一方、上述したような変位、回転成分を独立変分量とする通常の方法の他に、文献6)では仮想仕事の式における演算過程を簡素化する目的で、新たに導入した変位、回転成分とは異なる独立変分量を用い、ほぼ微小ひずみと各ひずみのオーダーが等しいとする近似条件のみで、基本式の誘導までに至っている。しかしながら、この場合、変位、回転成分を独立変分量として用いていないので、通常のつり合い式、力学的境界条件式が演算の結果として求められず、これらの式は新たに導入した独立変分量に対応したものとなる。したがって、求まった式は、さらに物理的考察に基づく変換手続により、通常のつり合い式、力学的境界条件式に構成し直す過程が必要である。このような手法では、新しい独立変分量の設定ならびに、基本式の再構成において必ずしも容易でない物理的考察と変換手続が伴うので、数学演算のみでつり合い式、力学的境界条件式が求められるという仮想仕事の原理による方法の大きな特徴の一つが失われることになる。

ここでは、空間棒材の最も簡単な場合である充実断面直線材を対象に、変位に制限を付けない有限変位理論の支配方程式を、仮想仕事の原理から、微小変位理論の場合と同様、比較的簡単な一貫した数学演算のみで求める新しい定式化手法ならびに厳密な支配方程式自体を提示することを目的としている。

この定式化では、従来の変位、回転パラメーターに代え、Love⁸⁾が軸線不伸張のRodの定式化に用いたような、部材軸線の変形を表す2方向の曲率、ねじり率に相当する成分の他に、伸び率を新たな基本パラメーターとして導入している。また、独立な仮想変位成分、すなわち、独立変分量としては、棒材が変形した状態から、さらに、微小に仮想変位した場合を想定し、剛体回転を除去した、棒の軸線上の微小変位、微小回転成分を採用している。そして、これらの諸量を仮想仕事の式に用いることで、仮想変位成分に対応する剛体回転を除去したつり合い式、力学的境界条件式を導いている。このような新しい定式化を用いると、次のような利点がある。まず、変形成分を用いることにより、複雑な定義と取扱いを要する有限回転角の導入ならびに変位場の誘導の過程が不要となり、直接ひずみ場が求まる。さらに、剛体回転を除去した仮想変位成分を用いることにより、仮想変位場、仮想ひずみ場が非常に簡素化される。以上から、従来の定式化手法に比べ、仮想仕事の式における演算過程が著しく容易になり、何の近似も導入することなく、一貫した数学演算のみで、つり合い式、力学的境界条件式の誘導が可能となる。この手法を充実断面直線材の有限変位理論の定式化に適用し、微小ひずみの場合のみならず、棒理論の仮定以外はなんら近似条件を用いない、いわゆる有限ひずみ・有限変位の場合の支配方程式を求め考察を行っている。また、本定式化で得られる剛体回転を除去したつり合い式と力学的境界条件式から、通常のLagrange流の定式化で用いられる空間固定座標方向成分で表現した式も導いている。このとき、剛体回転を除去した式を介することで、従来の仮想仕事の式による方法では求めることが困難であった厳密な式が単なる直交変換で容易に得られる。

さらに、変位成分の代わりに変形成分を基本パラメーターとして用いることが、数値解析手法である伝達マトリックス法における離散化式の誘導にも有効であることを示すために、微小ひずみの条件下の支配方程式から伝達式の定式化も行っている。

なお、ここで用いる棒理論の仮定とは、通常、充実断面棒材に用いられる断面不変の仮定とねじりによるそりを無視した平面保持、直角保持 (Bernoulli-Euler) の仮定とである。

2. 座標系と変形成分

座標系としては、Fig.1のように直交単位ベクトル(g_x, g_y, g_z)を基底ベクトルに持ち、 z 軸を変形前の棒材の軸線にそって選ぶ右手系直交直線座標(x, y, z)を用いる。そして、定式化手法は、変形前の棒材の位置座標(x, y, z)を独立変数とするLagrangeの方法による。

支配方程式を記述する幾何学的成分としては、支配方程式の簡素化を目的として、通常の並進変位、回転成分の代わりに、(x, y)座標原点における部材軸線上の変形成分を用いる。すなわち、棒理論の仮定から、互いに直交する部材軸線上の変形後の基底ベクトル($\hat{g}_x, \hat{g}_y, \hat{g}_z$)とこれを基準化した単位ベクトル($\hat{i}_{x0}, \hat{i}_{y0}, \hat{i}_{z0}$)をもとに、次式で定義される変形成分($\hat{\kappa}_x, \hat{\kappa}_y, \hat{\tau}, \sqrt{\hat{g}_0}$)を用いる。

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} \hat{i}_{x0} \\ \hat{i}_{y0} \\ \hat{i}_{z0} \end{Bmatrix} = [\hat{D}] \begin{Bmatrix} \hat{i}_{x0} \\ \hat{i}_{y0} \\ \hat{i}_{z0} \end{Bmatrix}, \quad [\hat{D}] = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\tau} & -\hat{\kappa}_y \\ -\hat{\tau} & 0 & \hat{\kappa}_x \\ \hat{\kappa}_y & -\hat{\kappa}_x & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{g}_{z0} = \sqrt{\hat{g}_0} \hat{i}_{z0} \quad (1 \text{ a \&v c})$$

物理的には、 $\hat{\kappa}_x/\sqrt{\hat{g}_0}$, $\hat{\kappa}_y/\sqrt{\hat{g}_0}$, $\hat{\tau}/\sqrt{\hat{g}_0}$ は変形後の部材軸線の2方向の曲率成分とねじり率を、また $\sqrt{\hat{g}_0}-1$ は軸線の伸び率を表している。

3. 変形成分とひずみテンソルの関係

まず、任意点の変形後の基底ベクトル($\hat{g}_x, \hat{g}_y, \hat{g}_z$)を部材軸線上の変形後の基底ベクトルを基準化した直交単位ベクトル($\hat{i}_{x0}, \hat{i}_{y0}, \hat{i}_{z0}$)および、先に定義した変形成分で表すことを考える。

変形後の部材軸線的位置を表すベクトルを $\hat{R}_0$ とすると、任意点の位置ベクトル $\hat{R}$ は断面不変と平面保持、直角保持の仮定から

$$\hat{R} = \hat{R}_0 + x \hat{i}_{x0} + y \hat{i}_{y0} \quad (2)$$

と表され、任意点の変形後の基底ベクトルは式(1)から次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{g}_x &= \partial \hat{R} / \partial x = \hat{i}_{x0} \\ \hat{g}_y &= \partial \hat{R} / \partial y = \hat{i}_{y0} \\ \hat{g}_z &= \partial \hat{R} / \partial z = -y \hat{\tau} \hat{i}_{x0} + x \hat{\tau} \hat{i}_{y0} + (\sqrt{\hat{g}_0} - x \hat{\kappa}_y + y \hat{\kappa}_x) \hat{i}_{z0} \end{aligned} \quad (3 \text{ a \&v c})$$

Greenのひずみテンソルの定義から、零でないひずみテンソルと変形成分の関係は、式(3)を用いれば、次のように求まる。

$$\begin{aligned} e_{zz} &= (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_z - g_z \cdot g_z) / 2 \\ &= (\hat{g}_0 - 1) / 2 - x \sqrt{\hat{g}_0} \hat{\kappa}_y + y \sqrt{\hat{g}_0} \hat{\kappa}_x + (x \hat{\kappa}_y - y \hat{\kappa}_x)^2 / 2 + (x^2 + y^2) \hat{\tau}^2 / 2 \\ e_{zx} &= (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_x - g_z \cdot g_x) / 2 = -y \hat{\tau} / 2, \quad e_{zy} = (\hat{g}_z \cdot \hat{g}_y - g_z \cdot g_y) / 2 = x \hat{\tau} / 2 \end{aligned} \quad (4 \text{ a \&v c})$$

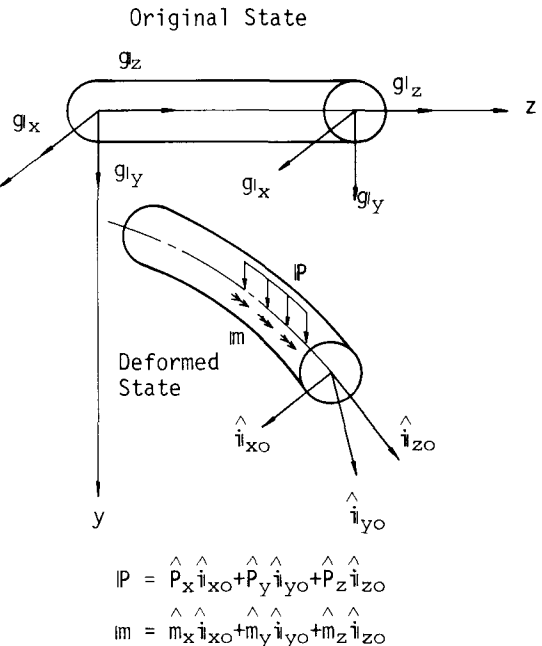


Fig.1 Coordinate

4. 仮想仕事の原理によるつり合い式と力学的境界条件式の誘導

(1) 棒理論の仮定のみを導入した場合

両端の z 座標値が z_1, z_2 である棒要素1, 2に外力として、部材軸線上に分布力 P と分布モーメント m さらに要素の1, 2断面に表面力 $\sigma_s^\alpha (\alpha=1, 2)$ が作用してつり合っている状態を考える。この状態から棒要素が微小な仮想変位 δd をした場合の仮想仕事の式よりつり合い式、および力学的境界条件式を導く。このとき、分布外力ベクトル P 、表面力ベクトル σ_s^α 、分布モーメントベクトル m 、および仮想の微小変位ベクトル δd は (x, y) 座標原点での変形後の基底ベクトルを基準化した直交単位ベクトル $(\hat{u}_{xo}, \hat{u}_{yo}, \hat{u}_{zo})$ 方向へ展開した成分で表示する。

すなわち、分布外力、分布モーメントおよび表面力の成分を

$$P = \hat{P}_x \hat{i}_{xo} + \hat{P}_y \hat{i}_{yo} + \hat{P}_z \hat{i}_{zo}, \quad m = \hat{m}_x \hat{i}_{xo} + \hat{m}_y \hat{i}_{yo} + \hat{m}_z \hat{i}_{zo} \quad (5 \text{ a/c})$$

$$\sigma_s^\alpha = \sigma_{sx}^\alpha \hat{i}_{xo} + \sigma_{sy}^\alpha \hat{i}_{yo} + \sigma_{sz}^\alpha \hat{i}_{zo}$$

また、仮想の微小変位成分については、任意点の並進変位ベクトル δd の成分の他に、部材軸線上の、並進変位ベクトル δd_o ならびに、微小回転ベクトル $\delta \alpha$ の成分を含めて次のように定義する。なお、明らかなように仮想回転ベクトル $\delta \alpha$ は微小であるので、その回転成分に関してはベクトル則が成立する。

$$\delta d = \delta u \hat{i}_{xo} + \delta v \hat{i}_{yo} + \delta w \hat{i}_{zo}, \quad \delta d_o = \delta u_o \hat{i}_{xo} + \delta v_o \hat{i}_{yo} + \delta w_o \hat{i}_{zo} \quad (6 \text{ a/c})$$

$$\delta \alpha = \delta \alpha_x \hat{i}_{xo} + \delta \alpha_y \hat{i}_{yo} + \delta \alpha_z \hat{i}_{zo}$$

このような仮想変位成分を用いることにより、剛体回転成分が除かれることになる。

式(5), (6)で定義される分布外力、分布モーメントならびに表面力の成分、仮想変位の成分、および (x, y, z) 座標での第2種 Piola-Kirchhoff の応力テンソル、Green のひずみテンソルを用い、棒理論の仮定を考慮すると、仮想仕事の式は次のように表される¹⁾。

$$\delta U - \delta W = 0$$

$$\delta U = \int_{z_1}^{z_2} \int_A (\sigma_{zz} \delta e_{zz} + 2\sigma_{zx} \delta e_{zx} + 2\sigma_{zy} \delta e_{zy}) dA dz$$

$$\delta W = \int_{z_1}^{z_2} (\hat{P}_x \delta \hat{u}_o + \hat{P}_y \delta \hat{v}_o + \hat{P}_z \delta \hat{w}_o + \hat{m}_x \delta \hat{\alpha}_x + \hat{m}_y \delta \hat{\alpha}_y + \hat{m}_z \delta \hat{\alpha}_z) dz$$

$$+ [n_z \int_A (\sigma_{sx}^\alpha \delta \hat{u} + \sigma_{sy}^\alpha \delta \hat{v} + \sigma_{sz}^\alpha \delta \hat{w}) dA]_1^2 \quad (7 \text{ a/c})$$

ここに、 $\int_A dA$ は断面全体に対する積分であり、 n_z は z_1 で -1 、 z_2 で 1 である。

棒の仮想微小変位成分は棒理論の仮定からすべて軸線上の並進変位 $(\delta \hat{u}_o, \delta \hat{v}_o, \delta \hat{w}_o)$ と $\hat{u}_{zo}$ まわりの回転角 $\delta \hat{\alpha}_z$ で表すことができるので、これら4つの変分量を独立変分量と考えて、通常の仮想仕事の原理による手法にならい、つり合い式と力学的境界条件式を導く。

$(\delta \hat{u}_o, \delta \hat{v}_o, \delta \hat{w}_o, \delta \hat{\alpha}_z)$ を独立変分量とするので、式(7)での変分量 δe_{zz} 、 δe_{zx} 、 δe_{zy} 、 $\delta \hat{u}$ 、 $\delta \hat{v}$ 、 $\delta \hat{w}$ 、 $\delta \hat{\alpha}_x$ 、 $\delta \hat{\alpha}_y$ を独立な変分量で表す必要がある。

式(4)より、ひずみテンソルの変分は

$$\delta e_{zz} = (\sqrt{g_o} + y \hat{\kappa}_x - x \hat{\kappa}_y) (\delta \sqrt{g_o} + y \delta \hat{\kappa}_x - x \delta \hat{\kappa}_y) + (x^2 + y^2) \hat{\tau} \delta \hat{\tau} \quad (8 \text{ a/c})$$

$$\delta e_{zx} = -y \delta \hat{\tau} / 2, \quad \delta e_{zy} = x \delta \hat{\tau} / 2$$

となるため、変形成分の変分量 $\delta \hat{\kappa}_x$ 、 $\delta \hat{\kappa}_y$ 、 $\delta \hat{\tau}$ 、 $\delta \sqrt{g_o}$ を独立な変分量で表すことを考える。式(1), (3)を用い、

$\delta\hat{a}_x, \delta\hat{a}_y, \delta\hat{a}_z$ が微小であることを考慮すると、変形成分の変分量は、独立な変分量および $\delta\hat{a}_x, \delta\hat{a}_y$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned}\delta\hat{\kappa}_x &= \delta\hat{\alpha}_x' - \tau\delta\hat{\alpha}_y + \hat{\kappa}_y\delta\hat{\alpha}_z, \quad \delta\hat{\kappa}_y = \delta\hat{\alpha}_y' + \tau\delta\hat{\alpha}_x - \hat{\kappa}_x\delta\hat{\alpha}_z \\ \delta\hat{\tau} &= \delta\hat{\alpha}_z' + \hat{\kappa}_x\delta\hat{\alpha}_y - \hat{\kappa}_y\delta\hat{\alpha}_x, \quad \delta\sqrt{\hat{g}_0} = \delta\hat{w}_0' - \hat{\kappa}_y\delta\hat{u}_0 + \hat{\kappa}_x\delta\hat{v}_0\end{aligned}\quad (9 \text{ a\&d})$$

さらに $\delta\hat{a}_x, \delta\hat{a}_y$ についても、独立な変分量で

$$\delta\hat{\alpha}_x = -(\delta\hat{v}_0' + \tau\delta\hat{u}_0 - \hat{\kappa}_x\delta\hat{w}_0)/\sqrt{\hat{g}_0}, \quad \delta\hat{\alpha}_y = (\delta\hat{u}_0' - \tau\delta\hat{v}_0 + \hat{\kappa}_y\delta\hat{w}_0)/\sqrt{\hat{g}_0} \quad (10 \text{ a,b})$$

と表される。ここに $(\cdot)' = d(\cdot)/dz$ であり、以後もこの記述法を用いる。

つぎに、 $\delta\hat{u}, \delta\hat{v}, \delta\hat{w}$ については、剛体回転を除去した棒の任意点の仮想微小変位成分であることから、棒の仮定より、軸線上の仮想微小変位成分を用いて

$$\delta\hat{u} = \delta\hat{u}_0 - y\delta\hat{\alpha}_z, \quad \delta\hat{v} = \delta\hat{v}_0 + x\delta\hat{\alpha}_z, \quad \delta\hat{w} = \delta\hat{w}_0 + y\delta\hat{\alpha}_x - x\delta\hat{\alpha}_y \quad (11 \text{ a\&c})$$

となる。 $\delta\hat{a}_x, \delta\hat{a}_y$ は式(10)に示すとうりである。

式(8)~(11)を仮想仕事の式(7)に代入し、通常の微小変位理論の場合と同じ手順で $\delta\hat{u}_0, \delta\hat{v}_0, \delta\hat{w}_0, \delta\hat{\alpha}_z$ を独立変分量と考え部分積分を実行すれば、仮想仕事の式は最終的には次のように変形される。

$$\begin{aligned}& \left[\{(\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)/\sqrt{\hat{g}_0} - n_z\hat{F}_x^C\}\delta\hat{u}_0 + \{(\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)/\sqrt{\hat{g}_0} - n_z\hat{F}_y^C\}\delta\hat{v}_0 \right. \\ & + (\hat{N} - n_z\hat{F}_z^C)\delta\hat{w}_0 + (\hat{M}_y - n_z\hat{M}_x^C)\delta\hat{\alpha}_x + (-\hat{M}_x - n_z\hat{M}_y^C)\delta\hat{\alpha}_y + (\hat{M}_z - n_z\hat{M}_z^C)\delta\hat{\alpha}_z \Big]_{z_1}^{z_2} \\ & - \int_{z_1}^{z_2} \left[\{(\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)/\sqrt{\hat{g}_0}\}' - (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\tau/\sqrt{\hat{g}_0} + \hat{N}\hat{\kappa}_y + \hat{P}_x \right] \delta\hat{u}_0 \\ & + \left[\{(\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)/\sqrt{\hat{g}_0}\}' + (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\tau/\sqrt{\hat{g}_0} - \hat{N}\hat{\kappa}_x + \hat{P}_y \right] \delta\hat{v}_0 \\ & + \{ \hat{N}' + (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\hat{\kappa}_x/\sqrt{\hat{g}_0} - (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\hat{\kappa}_y/\sqrt{\hat{g}_0} + \hat{P}_z \} \delta\hat{w}_0 \\ & + (\hat{M}_z' - \hat{M}_y\hat{\kappa}_y - \hat{M}_x\hat{\kappa}_x + \hat{m}_z)\delta\hat{\alpha}_z \Big] dz = 0\end{aligned}\quad (12)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}\hat{N} &= N\sqrt{\hat{g}_0} + M_y\hat{\kappa}_x - M_x\hat{\kappa}_y, \quad \hat{M}_x = M_x\sqrt{\hat{g}_0} + M_{xy}\hat{\kappa}_x - M_{xx}\hat{\kappa}_y \\ \hat{M}_y &= M_y\sqrt{\hat{g}_0} + M_{yy}\hat{\kappa}_x - M_{yx}\hat{\kappa}_y, \quad \hat{M}_z = T_s + K\tau\end{aligned}\right\} \quad (13 \text{ a\&d})$$

$$\left. \begin{aligned}\hat{F}_x^C &= \int_A \sigma_{sx}^\alpha dA, \quad \hat{F}_y^C = \int_A \sigma_{sy}^\alpha dA, \quad \hat{F}_z^C = \int_A \sigma_{sz}^\alpha dA \\ \hat{M}_x^C &= \int_A \sigma_{sx}^\alpha y dA, \quad \hat{M}_y^C = -\int_A \sigma_{sy}^\alpha x dA, \quad \hat{M}_z^C = \int_A (\sigma_{sy}^\alpha x - \sigma_{sx}^\alpha y) dA\end{aligned}\right\} \quad (14 \text{ a\&f})$$

さらに、式(13)に含まれるいまだ定義していない断面量は応力テンソルと次の関係にある。

$$\begin{aligned}N &= \int_A \sigma_{zz} dA, \quad M_x = \int_A \sigma_{zz} x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_{zz} y dA \\ M_{xx} &= \int_A \sigma_{zz} x^2 dA, \quad M_{yy} = \int_A \sigma_{zz} y^2 dA, \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_A \sigma_{zz} xy dA \\ T_s &= \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA, \quad K = \int_A \sigma_{zz} (x^2 + y^2) dA\end{aligned}\quad (15 \text{ a\&h})$$

これらの断面量のうち、式(13)に示す $\hat{N}, \hat{M}_x, \hat{M}_y, \hat{M}_z$ が普通の意味での棒材の断面力成分であり、それぞれ、軸力、変形後の y 軸および x 軸まわりの曲げモーメント、ねじりモーメントに対応している。

式(12)から、独立変分量の任意性により、次のようなつり合い式が得られる。

$$\begin{aligned}& \{(\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)/\sqrt{\hat{g}_0}\}' - (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\tau/\sqrt{\hat{g}_0} + \hat{N}\hat{\kappa}_y + \hat{P}_x = 0 \\ & \{(\hat{M}_y' + \hat{M}_x\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)/\sqrt{\hat{g}_0}\}' + (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\tau + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\tau/\sqrt{\hat{g}_0} - \hat{N}\hat{\kappa}_x + \hat{P}_y = 0\end{aligned}\quad (16 \text{ a,b})$$

$$\begin{aligned} \hat{N}' + (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\hat{\kappa}_x / \sqrt{\hat{g}_0} - (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\hat{\kappa}_y / \sqrt{\hat{g}_0} + \hat{P}_z = 0 \\ \hat{M}_z' - \hat{M}_y\hat{\kappa}_y - \hat{M}_x\hat{\kappa}_x + \hat{m}_z = 0 \end{aligned} \quad (16 \text{ c,d})$$

同様にして、力学的境界条件式も次のようになる。

$$\begin{aligned} n_z \hat{F}_x^C = (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y) / \sqrt{\hat{g}_0}, \quad n_z \hat{F}_y^C = (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x) / \sqrt{\hat{g}_0} \\ n_z \hat{F}_z^C = \hat{N}, \quad n_z \hat{M}_x^C = \hat{M}_y, \quad n_z \hat{M}_y^C = -\hat{M}_x, \quad n_z \hat{M}_z^C = \hat{M}_z \end{aligned} \quad (17 \text{ a~f})$$

式(16), (17)は、式(6)の独立変分量の定義からわかるように、(x, y) 座標原点での変形後の基底ベクトルを基準化した直交単位ベクトル ($\hat{u}_{x0}, \hat{u}_{y0}, \hat{u}_{z0}$) 方向に展開したものとなっている。このような展開により剛体回転成分が除かれ、Lagrange 流の定式化で通常用いられる空間固定座標の基底ベクトル (g_x, g_y, g_z) 方向に展開した場合に比べ、つり合い式、力学的境界条件式はかなり簡単な式となる。なお、空間固定座標方向へ展開した式も、式(16), (17)から単なる直交変換で容易に求めることができるが、これについては7.で述べる。

(2) 微小ひずみを前提とした場合

微小ひずみの場合としては、曲げひずみ、せん断ひずみ、ならびに伸びひずみに相当する諸量の絶対値が次式のように1に比べて無視できることを仮定して、つり合い式と力学的境界条件式を導く。

$$|\hat{y}\hat{\kappa}_x| \ll 1, |\hat{x}\hat{\kappa}_y| \ll 1, |\hat{x}\hat{\tau}| \ll 1, |\hat{y}\hat{\tau}| \ll 1, |\sqrt{\hat{g}_0} - 1| \ll 1 \quad (18 \text{ a~e})$$

式(18)の条件に加えて、各ひずみのオーダーが等しいという条件を付加して微小ひずみの条件としている場合もあるが、各ひずみのオーダーが等しいという条件は微小ひずみのもとでも必ずしも成立しないので、ここでは除外している。式(18)の近似条件は、つり合い式と力学的境界条件式の仮想仕事の式による誘導過程で、文献3)に述べた理由により、各物理量の変分後の式(8)~(11)に用いている。これらの変分量のうち、近似によって変化するものだけを示せば次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta e_{zz} = \delta \sqrt{\hat{g}_0} + y \delta \hat{\kappa}_x - x \delta \hat{\kappa}_y + (x^2 + y^2) \hat{\tau} \delta \hat{\tau} \\ \delta \hat{\alpha}_x = -(\delta \hat{v}_0' + \hat{\tau} \delta \hat{u}_0 - \hat{\kappa}_x \delta \hat{w}_0), \quad \delta \hat{\alpha}_y = \delta \hat{u}_0' - \hat{\tau} \delta \hat{v}_0 + \hat{\kappa}_y \delta \hat{w}_0 \end{aligned} \quad (19 \text{ a~c})$$

式(19)を式(8), (9), (11)とともに、式(7)に代入することにより(1)と同様な方法でつり合い式と力学的境界条件式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x + \hat{m}_y)' - (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\hat{\tau} + \hat{N}\hat{\kappa}_y + \hat{P}_x &= 0 \\ (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)' + (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\hat{\tau} - \hat{N}\hat{\kappa}_x + \hat{P}_y &= 0 \\ \hat{N}' + (\hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x)\hat{\kappa}_x - (\hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y)\hat{\kappa}_y + \hat{P}_z &= 0 \\ \hat{M}_z' - \hat{M}_y\hat{\kappa}_y - \hat{M}_x\hat{\kappa}_x + \hat{m}_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20 \text{ a~d})$$

$$\left. \begin{aligned} n_z \hat{F}_x^C = \hat{M}_x' - \hat{M}_y\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_x - \hat{m}_y, \quad n_z \hat{F}_y^C = \hat{M}_y' + \hat{M}_x\hat{\tau} + \hat{M}_z\hat{\kappa}_y + \hat{m}_x \\ n_z \hat{F}_z^C = \hat{N}, \quad n_z \hat{M}_x^C = \hat{M}_y, \quad n_z \hat{M}_y^C = -\hat{M}_x, \quad n_z \hat{M}_z^C = \hat{M}_z \end{aligned} \right\} \quad (21 \text{ a~f})$$

ここに、断面力成分と応力テンソルの間には次の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \hat{N} = \int_A \sigma_{zz} dA, \quad \hat{M}_x = \int_A \sigma_{zz} x dA, \quad \hat{M}_y = \int_A \sigma_{zz} y dA, \quad \hat{M}_z = T_S + K \hat{\tau} \\ T_S = \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA, \quad K = \int_A \sigma_{zz} (x^2 + y^2) dA \end{aligned} \quad (22 \text{ a~f})$$

表面力については式(14)と同様である。

5. 断面力と変形成分の関係

(1) 棒理論の仮定のみを導入した場合

フックの法則に従う線形弾性体から成る棒を考える。このときフックの法則を応力テンソルとひずみテンソル間に定義するか、応力の物理成分と伸びひずみおよび角ひずみ間に定義するかによって、断面力と変形成分の関係は異なるので、ここでは2通りの方法について検討する。

まず、第2種Piola-Kirchhoffの応力テンソルとGreenのひずみテンソルを用いる場合、棒理論の仮定のもとでは、フックの法則は次のようになる。

$$\sigma_{zz} = E\epsilon_{zz}, \quad \sigma_{zx} = 2G\epsilon_{zx}, \quad \sigma_{zy} = 2G\epsilon_{zy} \quad (23 \text{ a}\sim\text{c})$$

式(4), (23)を式(1)に代入すれば、断面量と変形成分の関係が求まる。このとき (x, y) 座標の原点と方向が任意に選べるものとして、これらを

$$\int_A x dA = \int_A y dA = \int_A xy dA = 0 \quad (24)$$

を満足する断面図心と主軸方向に選ぶと、式(4), (23)より、式(1)の断面量と変形成分の関係は次のように求まる。

$$\begin{aligned} N &= EA(\hat{g}_0 - 1)/2 + EI_{xx}\hat{k}_y^2/2 + EI_{yy}\hat{k}_x^2/2 + EJ\hat{t}^2/2 \\ M_x &= -EI_{xx}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_y + EI_{xxx}\hat{k}_y^2/2 + EI_{xyy}\hat{k}_x^2/2 - EI_{xxy}\hat{k}_x\hat{k}_y + EI_{xrr}\hat{t}^2/2 \\ M_y &= EI_{yy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_x + EI_{xxy}\hat{k}_y^2/2 + EI_{yyy}\hat{k}_x^2/2 - EI_{xyy}\hat{k}_x\hat{k}_y + EJ_{yr}\hat{t}^2/2 \\ M_{xx} &= EI_{xx}(\hat{g}_0 - 1)/2 + EI_{xxy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_x - EI_{xxx}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_y + EI_{xxxx}\hat{k}_y^2/2 + EI_{xxyy}\hat{k}_x^2/2 \\ &\quad - EI_{xxxy}\hat{k}_x\hat{k}_y + EI_{xxr}\hat{t}^2/2 \\ M_{xy} &= EI_{xyy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_x - EI_{xxy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_y + EI_{xxxy}\hat{k}_y^2/2 + EI_{xyyy}\hat{k}_x^2/2 \\ &\quad - EI_{xxyy}\hat{k}_x\hat{k}_y + EI_{xyr}\hat{t}^2/2 \\ M_{yy} &= EI_{yy}(\hat{g}_0 - 1)/2 + EI_{yyy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_x - EI_{xyy}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_y + EI_{xxyy}\hat{k}_y^2/2 \\ &\quad + EI_{yyy}\hat{k}_x^2/2 - EI_{xyyy}\hat{k}_x\hat{k}_y + EI_{yyr}\hat{t}^2/2 \\ K &= EJ(\hat{g}_0 - 1)/2 + EI_{yr}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_x - EI_{xr}\sqrt{\hat{g}_0}\hat{k}_y - EI_{xxr}\hat{k}_y^2/2 - EI_{yyr}\hat{k}_x^2/2 \\ &\quad - EI_{xyr}\hat{k}_x\hat{k}_y + EJ_{rr}\hat{t}^2/2 \\ T &= GJ\hat{t} \end{aligned} \quad (25 \text{ a}\sim\text{h})$$

ここに、

$$I_{x^i y^j r^k} = \int_A x^i y^j (x^2 + y^2)^k dA, \quad J = \int_A (x^2 + y^2) dA, \quad J_{rr} = \int_A (x^2 + y^2)^2 dA \quad (26 \text{ a}\sim\text{c})$$

式(25)を式(13)に代入すれば、断面力と変形成分の関係が得られる。

つぎに、応力の物理成分 $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ と伸びひずみ ϵ_z , 角ひずみ $\epsilon_{zx}, \epsilon_{zy}$ の間に次に示すフックの法則を仮定した場合について検討する。

$$\sigma_z = E\epsilon_z, \quad \tau_{zx} = G\epsilon_{zx}, \quad \tau_{zy} = G\epsilon_{zy} \quad (27 \text{ a}\sim\text{c})$$

棒理論の仮定のもとでの応力の物理成分と応力テンソルの関係、および、伸びひずみ、角ひずみ成分とひずみテンソルの関係

$$\tau_{zx} = \sigma_{zx}, \quad \tau_{zy} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_z = \sigma_{zz}\sqrt{\hat{g}} \quad (28 \text{ a}\sim\text{c})$$

$$\epsilon_z = |\hat{g}_z| - 1 = \sqrt{\hat{g}} - 1 = \sqrt{2\epsilon_{zz} + 1} \quad \sin\epsilon_{zx} = \hat{g}_z \cdot \hat{g}_x / (|\hat{g}_z| |\hat{g}_x|) = 2\epsilon_{zx} / \sqrt{2\epsilon_{zz} + 1} \quad (29 \text{ a, b})$$

$$\sin \varepsilon_{zy} = \hat{g}_z \cdot \hat{g}_y / (|\hat{g}_z| |\hat{g}_y|) = 2e_{zy} / \sqrt{2e_{zz} + 1} \quad (29 \text{ c})$$

$$\sqrt{\hat{g}} = \sqrt{(\sqrt{\hat{g}_0} - x\hat{k}_y + y\hat{k}_x)^2 + (x^2 + y^2)\hat{t}^2} \quad (30)$$

に留意すれば、式(10)の関係を次のような応力テンソルとひずみテンソルの間の関係に書き換えられる。

$$\sigma_{zz} = E(\sqrt{2e_{zz} + 1} - 1) / \sqrt{2e_{zz} + 1} \quad (31 \text{ a} \sim \text{c})$$

$$\sigma_{zx} = G \sin^{-1}(2e_{zx} / \sqrt{2e_{zz} + 1}), \quad \sigma_{zy} = G \sin^{-1}(2e_{zy} / \sqrt{2e_{zz} + 1})$$

式(31)から、応力テンソルはいずれもひずみテンソルの無限級数表現となり、式(4)、(31)を式(15)、(16)に代入して明らかのように、断面力と変形成分の関係も同様になる。このため、応力テンソルとひずみテンソル間にフックの法則を定義した場合に比べかなり複雑になる。ただ、ねじり率 $\sqrt{\hat{g}_0}$ が零の場合、応力の物理成分と伸びひずみ成分の間にフックの法則を仮定したとき、式(24)の条件のもとでは、

$$\tilde{N} = EA(\sqrt{\hat{g}_0} - 1), \quad \tilde{M}_x = -EI_{xx}\hat{k}_y, \quad \tilde{M}_y = EI_{yy}\hat{k}_x \quad (32 \text{ a} \sim \text{c})$$

となり、非常に簡単な式となる。このような特別の場合に平面棒材が含まれる。³⁾

(2) 微小ひずみの場合

微小ひずみの条件式(8)のもとでは、応力のテンソル成分と物理成分の間の差はなくなる。さらに、ひずみテンソルと伸びひずみ、角ひずみの関係、およびこれらと変形成分の関係が

$$\begin{aligned} e_{zz} &= \varepsilon_z = \sqrt{\hat{g}_0} - 1 + y\hat{k}_x - x\hat{k}_y + (x^2 + y^2)\hat{t}^2/2 \\ e_{zx} &= \varepsilon_{zx}/2 = -y\hat{t}/2, \quad e_{zy} = \varepsilon_{zy}/2 = x\hat{t}/2 \end{aligned} \quad (33 \text{ a} \sim \text{c})$$

となるため、式(23)、(27)の定義の差もなくなる。

断面力成分と変形成分との関係は式(23)または式(27)と式(33)を式(23)に代入し、式(24)の条件を用いることにより、次のように求まる。

$$\tilde{N} = EA(\sqrt{\hat{g}_0} - 1) + EJ\hat{t}^2/2, \quad \tilde{M}_x = -EI_{xx}\hat{k}_y + EI_{xr}\hat{t}^2/2, \quad \tilde{M}_y = EI_{yy}\hat{k}_x + EI_{yr}\hat{t}^2/2 \quad (34 \text{ a} \sim \text{e})$$

$$K = EJ(\sqrt{\hat{g}_0} - 1) + EI_{yr}\hat{k}_x - EI_{xr}\hat{k}_y + EJ_{rr}\hat{t}^2/2, \quad T_s = GJ\hat{t}$$

また、 $\tilde{M}_z$ は

$$\tilde{M}_z = T_s + K\hat{t} = GJ\hat{t}\{1 + E(\sqrt{\hat{g}_0} - 1)/G + EI_{yr}\hat{k}_x/GJ - EI_{xr}\hat{k}_y/GJ + EJ_{rr}\hat{t}^2/2GJ\} \quad (35)$$

となり、式(8)の微小ひずみの条件を用いれば、さらに次のように簡略化される。

$$\tilde{M}_z = GJ\hat{t} \quad (36)$$

6. 変位成分と変形成分の関係

幾何学的な境界条件が与えられたときにも解を得ることができるように、また、変形性状を解析できるように、変形成分と並進変位成分、回転成分の関係を求める。

まず、並進変位成分と回転成分の定義を行う。変位としては棒材軸線上での並進変位の固定座標方向成分 (u_0, v_0, w_0) を用いる。回転成分については、通常なんらかの回転角が用いられるが、有限回転の場合はベクトル則が成立せず、その表現も複雑になる。また、有限回転角は方向余弦に変換されて用いられることが多い。このような理由から、ここでは、回転成分として、直交単位ベクトル $(\hat{u}_{x0}, \hat{u}_{y0}, \hat{u}_{z0})$ の空間固定座標の基底ベクトル (g_x, g_y, g_z) に対する次式で定義される方向余弦 $[lab]$ を用いる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{u}_{xo} \\ \hat{u}_{yo} \\ \hat{u}_{zo} \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{Bmatrix} \quad [l_{ab}] = \begin{bmatrix} l_{xx}^{\wedge} & l_{xy}^{\wedge} & l_{xz}^{\wedge} \\ l_{yx}^{\wedge} & l_{yy}^{\wedge} & l_{yz}^{\wedge} \\ l_{zx}^{\wedge} & l_{zy}^{\wedge} & l_{zz}^{\wedge} \end{bmatrix} \quad (37 \text{ a, b})$$

まず、回転成分、すなわち、方向余弦と変形成分の関係は式(37・a)を z で微分し、左辺に式(1・a)と式(37・a)を代入することで次のようになる。

$$d[l_{ab}]/dz = [\hat{D}][l_{ab}] \quad (38)$$

つぎに、並進変位成分と変形成分の関係を求める。変形後の棒材軸線の位置ベクトル $\hat{R}_o$ が

$$\hat{R}_o = u_o g_x + v_o g_y + (z + w_o) g_z \quad (39)$$

と表され、変形後の軸線上の基底ベクトル $\hat{g}_{zo}$ が

$$\hat{g}_{zo} = \partial \hat{R}_o / \partial z = u_o' g_x + v_o' g_y + (1 + w_o') g_z \quad (40)$$

となることと、式(1・c)と式(40)を用いると、この関係が次のように求まる。

$$u_o' = \sqrt{\hat{g}_o} l_{zx}^{\wedge}, \quad v_o' = \sqrt{\hat{g}_o} l_{zy}^{\wedge}, \quad w_o' = \sqrt{\hat{g}_o} l_{zz}^{\wedge} - 1 \quad (41)$$

7. つり合い式と力学的境界条件式の空間固定座標方向成分による表現

本論文では、棒材の変形前の位置座標を変数とし、応力には第2種 Piola-Kirchhoff の応力テンソル、ひずみには Green のひずみテンソルを用いた Lagrange 表現の支配方程式を導いた。このとき、力のつり合い式と力学的境界条件式については、直交単位ベクトル $(\hat{u}_{xo}, \hat{u}_{yo}, \hat{u}_{zo})$ 成分に展開した、いわゆる剛体回転を除去した表現⁸⁾になっており、通常用いられる空間固定座標の基底ベクトル (g_x, g_y, g_z) 成分に展開する表現¹⁾とは異なっている。ここでは、式(40)に示す剛体回転を除去したつり合い式、力学的境界条件式を空間固定座標成分へ展開した式に変換し、これら2種類の表現法について考察を加える。

固定座標方向の式を誘導するに当たり、いまだ定義していない仮想微小変位 δd_o 、 $\delta \alpha$ 、分布外力 IP 、分布モーメント m 、および、棒要素1, 2両端面に作用する表面力を断面力として表現した力 IF_S 、モーメント M_S の固定座標成分を次のように表す。

$$\begin{aligned} \delta d_o &= \delta u_o g_x + \delta v_o g_y + \delta w_o g_z, \quad \delta \alpha = \delta \alpha_x g_x + \delta \alpha_y g_y + \delta \alpha_z g_z \\ IP &= P_x g_x + P_y g_y + P_z g_z, \quad m = m_x g_x + m_y g_y + m_z g_z \\ IF_S &= \bar{F}_x^c g_x + \bar{F}_y^c g_y + \bar{F}_z^c g_z, \quad M_S = \bar{M}_x^c g_x + \bar{M}_y^c g_y + \bar{M}_z^c g_z \end{aligned} \quad (42 \text{ a} \sim \text{f})$$

これらの成分と $(\hat{u}_{xo}, \hat{u}_{yo}, \hat{u}_{zo})$ の成分との関係は、式(41)を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \delta \hat{u}_o \\ \delta \hat{v}_o \\ \delta \hat{w}_o \end{Bmatrix} &= [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \delta u_o \\ \delta v_o \\ \delta w_o \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \delta \hat{\alpha}_x \\ \delta \hat{\alpha}_y \\ \delta \hat{\alpha}_z \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \delta \alpha_x \\ \delta \alpha_y \\ \delta \alpha_z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \hat{P}_x \\ \hat{P}_y \\ \hat{P}_z \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \hat{m}_x \\ \hat{m}_y \\ \hat{m}_z \end{Bmatrix} &= [l_{ab}] \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \hat{F}_x^c \\ \hat{F}_y^c \\ \hat{F}_z^c \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \bar{F}_x^c \\ \bar{F}_y^c \\ \bar{F}_z^c \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \hat{M}_x^c \\ \hat{M}_y^c \\ \hat{M}_z^c \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \bar{M}_x^c \\ \bar{M}_y^c \\ \bar{M}_z^c \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (43 \text{ a} \sim \text{f})$$

まず、力のつり合い式の変換を行う。このとき、力に関するつり合い式(16・a~c)を簡単のため、

$$\hat{f}_x + \hat{p}_x = 0, \quad \hat{f}_y + \hat{p}_y = 0, \quad \hat{f}_z + \hat{p}_z = 0 \quad (44 \text{ a} \sim \text{c})$$

で表すものとする。固定座標成分へ展開した力に関するつり合い式は、式(43・a)を仮想仕事の式(12)に代入して、独立変分量を δu_o , δv_o , δw_o とし、さらに分布外力、分布モーメント成分も式(43・c, d)より、固定座標成分で表すと次のように求まる。

$$[l_{ab}]^T \begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (45)$$

モーメントに関するつり合い式の固定座標成分への変換は、式(12)では $\delta \hat{a}_z$ に対応するものしかないので、式(12)の誘導過程で現れる $\delta \hat{a}_z$, $\delta \hat{a}_y$ に対応するつり合い式も含めて行う。これは、モーメントのつり合い式に関する仮想仕事の式に式(43・b)を代入して、 δa_x , δa_y , δa_z を独立変分量とし、さらに分布モーメント成分を式(43・d)から固定座標成分で表すことで次のようになる。

$$[l_{ab}]^T \begin{Bmatrix} \hat{M}_y' + \hat{M}_x'' + \hat{M}_z' \kappa_y \\ -(\hat{M}_x' - \hat{M}_y'' + \hat{M}_z' \kappa_x) \\ \hat{M}_z' - \hat{M}_y' \kappa_y - \hat{M}_x' \kappa_x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (46)$$

ここで、式(46)は3つのつり合い式成分より成るが、式(45)および(46)と独立でない式が2つ含まれている。通常、モーメントのつり合い式として採用されるのは式(46)の3行目の成分に相当する z 軸のまわりのつり合い式

$$l_{xz}^{\wedge} (\hat{M}_y' + \hat{M}_x'' + \hat{M}_z' \kappa_y) - l_{yz}^{\wedge} (\hat{M}_x' - \hat{M}_y'' + \hat{M}_z' \kappa_x) + l_{zz}^{\wedge} (\hat{M}_z' - \hat{M}_y' \kappa_y - \hat{M}_x' \kappa_x) + m_z = 0 \quad (47)$$

であるが、 $l_{zz}^{\wedge} = 0$ となるような極端に大きな変位の場合には、式(46)と従属関係になるので、式(46)における他の独立なつり合い式の成分を採用する必要がある。このように式(47)は小さな変位領域では問題は生じないが、常に独立なつり合い式になるわけではない。

つぎに、力学的境界条件式については、式(12)に式(43・a, b)を代入して δu_o , δv_o , δw_o , δa_x , δa_y , δa_z を独立変分量とし、さらに、式(43・d~g)から分布モーメント成分、表面力成分を固定座標成分で表すと、次のようになる。

$$n_z \begin{Bmatrix} \overline{F}_x^c \\ \overline{F}_y^c \\ \overline{F}_z^c \end{Bmatrix} = [l_{ab}]^T \begin{Bmatrix} \{\hat{M}_x' - \hat{M}_y'' + \hat{M}_z' \kappa_x - (l_{yx}^{\wedge} m_x + l_{yy}^{\wedge} m_y + l_{yz}^{\wedge} m_z)\} / \sqrt{g_o} \\ \{\hat{M}_y' + \hat{M}_x'' + \hat{M}_z' \kappa_y + (l_{xx}^{\wedge} m_x + l_{xy}^{\wedge} m_y + l_{xz}^{\wedge} m_z)\} / \sqrt{g_o} \\ \hat{N} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

$$n_z \begin{Bmatrix} \overline{M}_x^c \\ \overline{M}_y^c \\ \overline{M}_z^c \end{Bmatrix} = [l_{ab}]^T \begin{Bmatrix} \hat{M}_y \\ -\hat{M}_x \\ \hat{M}_z \end{Bmatrix} \quad (49)$$

以上のように、空間固定座標方向へ展開した厳密なつり合い式、力学的境界条件式も、ここで求めた剛体回転を除去した式から、単なる直交変換により容易に書き換えることができる。このように、従来の仮想仕事の式による定式化手法では求めることが困難であった空間固定座標方向へ展開した精度の高いつり合い式、力学的境界条件式も、本文の剛体回転を除去した式を介することにより、容易に得ることができる。

通常の有限変位問題のLagrange流の定式化では、つり合い式、力学的境界条件式、および幾何学的境界

条件式はいずれも空間固定座標方向成分へ展開した表現が用いられる。¹⁾このような表現によると、通常の解析対象となる外力条件が保存力の場合や幾何学的境界条件が与えられる場合に、条件を変位と分離して与えることができるという利点を有している。従来の空間棒材の理論でも、原則としてこのような表現によっているが、モーメントに関するつり合い式と境界条件式に関しては変形後の軸線まわりの成分で表した場合が2, 3見られる。^{5)~7)}従来の理論では、大部分、変位が小さいという近似条件が導入されており、このとき複雑な式(45)~(49)の支配方程式はかなり簡略化される。また、空間固定座標成分で表現されたモーメントのつり合い式に関しても、前述したように問題点は生じない。しかしながら、大きな変位状態を扱うためには、変位に関する近似条件を導入できず、式(45)~(49)の剛体回転に関する項はいずれも省略できない。さらに、モーメントに関するつり合い式についても剛体回転を除去した場合の式(16・d)に対応するすべての変形状態を扱うような一つの固定軸まわりの成分は存在せず、場合により、3つの固定座標成分から、独立な成分を適宜選択しなければならない。このように、空間固定座標方向の展開は、大きな変位状態を扱う場合、特につり合い式に関して表現ならびに取り扱いが繁雑になるという問題点を有している。

一方、剛体回転を除去した表現では、つり合い式に関しては、保存力のとき外力項に剛体回転成分が含まれることを除いてすべて変形成分のみで表されるため、大きな変位状態を扱う式としては、簡潔で物理的にも理解しやすい表現となる。また、モーメントのつり合い式は変位状態によらず常に独立な式となる。しかしながら、境界条件式については、表現が簡単であるものの、保存力や幾何学的条件が与えられたとき、これらの条件が固定座標成分を用いたときのように変位と分離できず、取扱いがかえって複雑になる。

以上の諸点から判断すると、支配方程式の表現法としては、一貫して空間固定座標成分あるいは剛体回転を除去した成分によるというのではなく、つり合い式としては剛体回転を除去した式(40)を用い、境界条件式については空間固定座標方向成分で表した式(48), (49)を用いる方が都合が良いと考えられる。

8. 伝達マトリックス法による解法

変形成分をパラメーターとした支配方程式が伝達マトリックス法における離散化式の誘導にも有効であることを示すため、ここでは、2軸対称断面の棒材を対象に、微小ひずみの条件下の式から伝達式を求める。

空間棒材を有限要素分割したときの $i, i+1$ 節点から成る有限要素を対象に、 i 節点から $i+1$ 節点へ物理量を移す伝達式を導く。伝達式は、支配方程式を各物理量に関する1階の常微分方程式に変換した後に、Taylor展開による方法を用い、^{9), 10)}要素長に関するべき級数で表す。

z の正方向を向く断面での断面力 F の $(\hat{u}_{xo}, \hat{u}_{yo}, \hat{u}_{zo})$ 成分を $(\hat{F}_x, \hat{F}_y, \hat{F}_z)$ と定義すると、断面モーメント成分 $(\hat{M}_y, -\hat{M}_x, \hat{M}_z)$ とともに、これらの力学成分に関する1階の常微分方程式は、式(20), (21)より次のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{F}'_x &= \hat{F}_y\tau - \hat{F}_z\kappa_y - \hat{P}_x, & \hat{F}'_y &= -\hat{F}_x\tau + \hat{F}_z\kappa_y - \hat{P}_y, & \hat{F}'_z &= -\hat{F}_y\kappa_x + \hat{F}_x\kappa_y - \hat{P}_z \\ \hat{M}'_x &= \hat{F}_x + \hat{M}_y\tau - \hat{M}_z\kappa_x + \hat{m}_y, & \hat{M}'_y &= \hat{F}_y - \hat{M}_x\tau - \hat{M}_z\kappa_y - \hat{m}_x, & \hat{M}'_z &= \hat{M}_x\kappa_x + \hat{M}_y\kappa_y - \hat{m}_z\end{aligned}\quad (50 \text{ a\&f})$$

ここに、変形成分は、式(24), (26)と2軸対称断面の条件より、断面力成分と次の関係にある。

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_x &= \hat{M}_y/EI_{yy}, & \hat{\kappa}_y &= -\hat{M}_x/EI_{xx}, & \hat{\tau} &= \hat{M}_z/GJ \\ \sqrt{\hat{g}_0} &= \hat{F}_z/EA + 1 - J(\hat{M}_z/GJ)^2/2A\end{aligned}\quad (51 \text{ a\&d})$$

変位および回転成分に関する1階の常微分方程式は、式(28), (41)から直接次のようになる。

$$d\{u_o, v_o, w_o\}^T/dz = \sqrt{\hat{g}_0}\{1_{zx}, 1_{zy}, 1_{zz}\}^T \quad (52)$$

$$d[l_{ab}]/dz = [\hat{D}][l_{ab}] \quad (53)$$

Taylor 展開による i から $i+1$ 節点への伝達式は、任意の物理量を Q とした場合、次のように表される⁹⁾。

$$Q_{i+1} = Q_i + \sum_{n=1}^{\infty} Q_i \Delta z^n / n! \quad , \quad \Delta z = z_{i+1} - z_i \quad (54 \text{ a,b})$$

ここに添字 $i, i+1$ は節点の値を示す。また Q は Q の z に関する n 階の微係数であるが、この微係数は、各物理量に関する 1 階の常微分方程式を用いて、微分と代入を繰り返すことによりすべて i 節点の物理量で表すことができる。

通常、構造解析における外力は保存力として与えられることが多く、伝達式の物理量は固定座標成分が用いられるので、ここでも断面力 F 、断面モーメント M および、分布外力 P 、分布モーメント m の成分は空間固定座標成分に変換して伝達式を表す。いまだ定義していない z の正方向を向く断面ので F, M の空間固定座標成分を

$$F = \bar{F}_x g_x + \bar{F}_y g_y + \bar{F}_z g_z, \quad M = \bar{M}_y g_y - \bar{M}_x g_x + \bar{M}_z g_z \quad (55 \text{ a,b})$$

と表すと、式(50), (51)に用いられている断面力成分との関係は式(57)より次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_x \\ \hat{F}_y \\ \hat{F}_z \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{F}_z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tilde{M}_y \\ -\tilde{M}_x \\ \tilde{M}_z \end{Bmatrix} = [l_{ab}] \begin{Bmatrix} \bar{M}_y \\ -\bar{M}_x \\ \bar{M}_z \end{Bmatrix} \quad (56 \text{ a,b})$$

式(43・c, d), (56)の関係式を用い、式(50)の力学量に関する 1 階の常微分方程式を力学量の空間固定座標成分で記述すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{F}_x' &= -P_x, \quad \bar{F}_y' = -P_y, \quad \bar{F}_z' = -P_z \\ \bar{M}_x' &= (l_{xx}^{\wedge} l_{yy}^{\wedge} - l_{xy}^{\wedge} l_{yx}^{\wedge}) \bar{F}_x + (l_{yy}^{\wedge} l_{xz}^{\wedge} - l_{xy}^{\wedge} l_{yz}^{\wedge}) \bar{F}_z + m_y \\ \bar{M}_y' &= (l_{xx}^{\wedge} l_{yy}^{\wedge} - l_{xy}^{\wedge} l_{yx}^{\wedge}) \bar{F}_y + (l_{xx}^{\wedge} l_{yz}^{\wedge} - l_{yx}^{\wedge} l_{xz}^{\wedge}) \bar{F}_z - m_x \\ \bar{M}_z' &= (l_{xz}^{\wedge} l_{yx}^{\wedge} - l_{xx}^{\wedge} l_{yz}^{\wedge}) \bar{F}_x + (l_{xz}^{\wedge} l_{yy}^{\wedge} - l_{yz}^{\wedge} l_{xy}^{\wedge}) \bar{F}_y - m_z \end{aligned} \quad (57 \text{ a~f})$$

式(52, 53, 57)から、物理量の空間固定座標成分 $\{\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_z, \bar{M}_y, -\bar{M}_x, \bar{M}_z, [lab]\}$ を状態量とする伝達式を求める。ここで、回転を表す方向余弦 $[lab]$ は 9 成分より成るが、正規直交行列である条件から独立なものは 3 成分のみである。式(57・a~c) から明らかなように、断面力成分については、力のつり合いに変形が関与しないため、微分方程式は容易に積分でき、伝達式は次のようになる。

$$\bar{F}_{xi+1} = \bar{F}_{xi} - \int_{zi}^{zi+1} P_x dz, \quad \bar{F}_{yi+1} = \bar{F}_{yi} - \int_{zi}^{zi+1} P_y dz, \quad \bar{F}_{zi+1} = \bar{F}_{zi} - \int_{zi}^{zi+1} P_z dz \quad (58 \text{ a~c})$$

他の物理成分については簡単のため、式(54)の Δz の 2 次までの展開式、すなわち 2 階までの Q の微係数を示すにとどめる。この展開は、簡易 Runge-Kutta 法に相当するものである。

1 階の微係数は、式(52, 53, 57)に示されているので、2 階の微係数のみを求める。これは式(52, 53, 57)を微分後右辺に現れる 1 階の微係数に式(52, 53, 57)を代入することで、すべて i 節点の物理量で表される。

変位成分に関する 2 階の微係数は

$$\begin{aligned} u_o'' &= \sqrt{g_o}^{\wedge} l_{zx}^{\wedge} - \sqrt{g_o}^{\wedge} (\tilde{M}_x l_{xx}^{\wedge} / EI_{xx} + \tilde{M}_y l_{yx}^{\wedge} / EI_{yy}) \\ v_o'' &= \sqrt{g_o}^{\wedge} l_{zy}^{\wedge} - \sqrt{g_o}^{\wedge} (\tilde{M}_x l_{xy}^{\wedge} / EI_{xx} + \tilde{M}_y l_{yy}^{\wedge} / EI_{yy}) \\ w_o'' &= \sqrt{g_o}^{\wedge} l_{zz}^{\wedge} - \sqrt{g_o}^{\wedge} (\tilde{M}_x l_{xz}^{\wedge} / EI_{xx} + \tilde{M}_y l_{yz}^{\wedge} / EI_{yy}) \end{aligned} \quad (59 \text{ a~c})$$

ここに

$$\begin{aligned} \sqrt{g_0} = & -\{(\hat{l}_{yx}\bar{F}_x + \hat{l}_{yy}\bar{F}_y + \hat{l}_{yz}\bar{F}_z)\tilde{M}_y/EI_{yy} + (\hat{l}_{xx}\bar{F}_x + \hat{l}_{xy}\bar{F}_y + \hat{l}_{xz}\bar{F}_z)\tilde{M}_x/EI_{xx} \\ & + (\hat{l}_{zx}\bar{P}_x + \hat{l}_{zy}\bar{P}_y + \hat{l}_{zz}\bar{P}_z)\}/EA - J\tilde{M}_z\{(1/EI_{yy} - 1/EI_{xx})\tilde{M}_x\tilde{M}_y - \hat{l}_{zx}m_x \\ & - \hat{l}_{zy}m_y - \hat{l}_{zz}m_z\}/A(GJ)^2 \end{aligned} \quad (60)$$

方向余弦については、

$$[l_{ab}] = [\hat{D}]^T[l_{ab}] + [\hat{D}][\hat{D}][l_{ab}] \quad (61)$$

ここに $[\hat{D}]$ の零以外の成分は

$$\begin{aligned} \hat{D}_{12}^1 = -\hat{D}_{21}^1 = & \{(1/EI_{yy} - 1/EI_{xx})\tilde{M}_x\tilde{M}_y - \hat{l}_{zx}m_y - \hat{l}_{zy}m_y - \hat{l}_{zz}m_z\}/GJ \\ \hat{D}_{13}^1 = -\hat{D}_{31}^1 = & \{\hat{l}_{xx}\bar{F}_x + \hat{l}_{xy}\bar{F}_y + \hat{l}_{xz}\bar{F}_z + (1/GJ - 1/EI_{yy})\tilde{M}_y\tilde{M}_z + \hat{l}_{zx}m_x + \hat{l}_{zy}m_y \\ & + \hat{l}_{zz}m_z\}/EI_{xx} \\ \hat{D}_{23}^1 = -\hat{D}_{32}^1 = & \{\hat{l}_{yx}\bar{F}_x + \hat{l}_{yy}\bar{F}_y + \hat{l}_{yz}\bar{F}_z - (1/GJ - 1/EI_{xx})\tilde{M}_x\tilde{M}_z - \hat{l}_{xx}m_x - \hat{l}_{xy}m_y \\ & - \hat{l}_{xz}m_z\}/EI_{yy} \end{aligned} \quad (62 \text{ a} \sim \text{c})$$

断面モーメント成分については

$$\begin{aligned} \bar{M}_x^u = & \{(\hat{l}_{zx}\hat{l}_{yy} - \hat{l}_{zy}\hat{l}_{yx})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{zy}\hat{l}_{xx} - \hat{l}_{zx}\hat{l}_{xy})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_x \\ & + \{(\hat{l}_{yy}\hat{l}_{zz} - \hat{l}_{yz}\hat{l}_{zy})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{zy}\hat{l}_{xz} - \hat{l}_{xy}\hat{l}_{zz})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_z \\ & - (\hat{l}_{xx}\hat{l}_{yy} - \hat{l}_{xy}\hat{l}_{yx})\bar{P}_x - (\hat{l}_{yy}\hat{l}_{xz} - \hat{l}_{xy}\hat{l}_{yz})\bar{P}_z + m_y^1 \\ \bar{M}_y^u = & \{(\hat{l}_{yy}\hat{l}_{zx} - \hat{l}_{zy}\hat{l}_{yx})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{xx}\hat{l}_{zy} - \hat{l}_{zx}\hat{l}_{xy})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_y \\ & + \{(\hat{l}_{zx}\hat{l}_{yz} - \hat{l}_{zz}\hat{l}_{yx})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{zz}\hat{l}_{xx} - \hat{l}_{zx}\hat{l}_{xz})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_z \\ & - (\hat{l}_{xx}\hat{l}_{yy} - \hat{l}_{xy}\hat{l}_{yx})\bar{P}_y - (\hat{l}_{xx}\hat{l}_{yz} - \hat{l}_{yx}\hat{l}_{xz})\bar{P}_z - m_x^1 \\ \bar{M}_z^u = & \{(\hat{l}_{zx}\hat{l}_{yx} - \hat{l}_{zx}\hat{l}_{yz})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{zx}\hat{l}_{xz} - \hat{l}_{zz}\hat{l}_{xx})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_x \\ & + \{(\hat{l}_{zz}\hat{l}_{yy} - \hat{l}_{zy}\hat{l}_{yz})\tilde{M}_x/EI_{xx} + (\hat{l}_{zy}\hat{l}_{xz} - \hat{l}_{zz}\hat{l}_{xy})\tilde{M}_y/EI_{yy}\}\bar{F}_y \\ & - (\hat{l}_{xz}\hat{l}_{yx} - \hat{l}_{xx}\hat{l}_{yz})\bar{P}_x - (\hat{l}_{xz}\hat{l}_{yy} - \hat{l}_{yz}\hat{l}_{xy})\bar{P}_y - m_z^1 \end{aligned} \quad (63 \text{ a} \sim \text{c})$$

式(60)～(63)に含まれる $(\tilde{M}_y, -\tilde{M}_x, \tilde{M}_z)$ については式(56・b)より固定座標成分 $(\bar{M}_y, -\bar{M}_x, \bar{M}_z)$ で表される。3階以上の高次項についても同様にして求められるが、高次項になるにつれて陽な表現は平面棒材の場合に比べて非常に複雑になる。

9. ま と め

充実断面空間直線材を対象に、変位の大きさに制限を付けない有限変位理論の支配方程式を、仮想仕事の原理から、一貫した比較的簡単な数学演算により求める新しい定式化手法を提示した。すなわち、従来の並進変位、回転のパラメーターに代え、棒材軸線の変形を表すパラメーターを用い、また仮想仕事の式での独立変分量としては、剛体回転を除去した微小並進変位および微小回転成分を採用した。これにより複雑な有限回転角の導入と変位場の誘導が不要になるとともに、仮想仕事の式を用いる演算過程が著しく簡素化され、

変位に制限を付けない微小ひずみの有限変位の式のみならず、ひずみに制限を付けない有限ひずみ・有限変位の式の誘導も可能となった。さらに、離散化解析への適用性に関しても、このような変形パラメーターによると、伝達マトリックス法による定式化が容易であることを、微小ひずみ・有限変位の式を例にとり示した。なお、ここでは、直線材を対象としたが、任意軸線形状の充実断面曲線材の場合も、本定式化によると、厳密な支配方程式を容易に導くことができる。

参 考 文 献

- 1) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergammon Press, 1968
 - 2) 西野文雄, 倉方慶夫, 長谷川彰夫, 奥村敏恵: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No 225, pp.1~15, 1974-5
 - 3) 西野文雄, 倉方慶夫, 後藤芳顕: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No 237, pp.1~11, 1975-5
 - 4) 高畠秀雄: 空間曲線材の一般理論, 日本建築学会論文報告集, No 256, pp.15~24, 1977-2
 - 5) 平島政治, 井浦雅司, 依田照彦: 初期曲率, ねじり率を有する薄肉空間曲線部材の有限変位理論, No 292, pp.13~27, 1979-2
 - 6) 阿井正博, 西野文雄: 薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定化式, No 318, pp.7~20, 1982-2
 - 7) 倉方慶夫, 西野文雄: 充実曲線棒材の有限変位場と応力場, 土木学会論文報告集, No 317, pp.15~30, 1982-3
 - 8) Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, pp.381~388, 1944
 - 9) 後藤芳顕, 長谷川彰夫, 西野文雄: 平面骨組の有限変位解析の精度に関する一考察, 土木学会論文報告集 No 331, pp.33~44, 1983-3
 - 10) 阿井正博, 村上淳: 伝達関数法による面内曲げ有限変位問題の解析, 土木学会論文報告集, No 341, pp.59~68, 1984-1
 - 11) Henrich, P.: 清水, 小林共訳: 計算機による常微分方程式の解法 I, II, サイエンス社, 1973
-