

任意の境界条件に適用し得る扇形直交
異方性板のフーリエ級数解

FOURIER ANALYSIS OF ORTHOTROPIC SECTOR PLATES WITH GENERAL
BOUNDARY CONDITIONS

*

**

井浦雅司 平嶋政治

By Masashi IURA and Masaharu HIRASHIMA

A Fourier-series solution is presented for the bending of polar orthotropic sector plates. By introducing the new parameters, the partial differential equation with constant coefficients is derived. The homogeneous solution consists of the sum of the solutions expanded into the Fourier-series in the circumferential and radial directions. As a result, the present solution is applicable to an analysis of sector plates with any boundary condition along circular and radial edges. Comparisons of the numerical results are made between the present method and the finite difference method. The effects of boundary conditions on the convergence of the solution are investigated.

1. まえがき

土木、建築、機械等のあらゆる分野において、リブにより補強された扇形平板が多く用いられている。最近の計算機の発達に伴ない、離散的手法を用いることにより、複雑な条件下でもそれら扇形平板の近似解を求めることは可能である。しかしながら、扇形平板の支配微分方程式の性質および力学的挙動を調べるには解析的手法が優れていることは広く知られており、これまで多くの研究が報告されている^{(1)~(5)}。さらに、離散的手法による解の収束を調べる時には、フーリエ級数などを用いた解析的な解との比較がなされており、その意味でも解析的手法による解析は必要とされる。ところが、解析的手法による従来の曲げ理論解は、離散的手法によるものと比べ汎用性に欠けており、特に境界条件が限定される場合が少なくない。最近では、扇形直交異方性板に関して、従来より多くの境界条件に適用し得る解が報告されているものの、それらは固有関数あるいは多項式を巧みに利用した近似解であり、支配微分方程式を厳密に満足した解ではない。そこで、本報告においては、リブにより補強された扇形平板をそれと等価な扇形直交異方性板に置換し、直線辺と円弧辺の4辺において単純支持、固定支持、自由端の組合せからなる任意の境界条件を扱い得るフーリエ級数解を求めている。

* 工博 東京電機大学 建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)

** 工博 早稲田大学 土木工学科 (〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)

扇形板に関する研究はこれまで数多くなされておられ、文献(1)に参考文献として詳しく紹介されている。これらの研究においては、あらかじめ境界条件の一部が決まっておられ、特に円弧辺では任意の境界条件に適用できるが、直線辺においては単純支持あるいは固定支持と限定されている場合が多い。I.E.Harik¹⁾は、直線辺において単純支持と固定支持との組合せからなる3種類の境界条件に適用できる解を求めている。そこでは、円周方向に直線はりの固有関数を用いて、重み付き残差法により異方性板を解析している。C.Rubin²⁾は、円周方向に多項式を用いて、最小ポテンシャルエネルギーの原理により異方性板を解析している。しかしながら、両端の直線辺が自由端の場合には、この解は適用できないことに注意を要する。このように、I.E.Harik および C.Rubin のたわみ関数Wは、いずれも支配微分方程式を満足していないことがわかる。また、これまでに用いられている支配微分方程式は全て変数係数であり、このことも解析的な取り扱いを難しくしている原因と思われる。

本報告では、まず従来用いられている変数係数の支配微分方程式を、新しいパラメーターを導入することにより、定数係数の偏微分方程式に変換している。つぎに、たわみを円周方向と半径方向にそれぞれフーリエ級数に展開し、変数分離の手法を用いて支配微分方程式を厳密に満足する同次解を求めている。その際に特性方程式の根は陽な形で与えられており、特に半径方向にフーリエ展開した場合、従来の異方性弾性理論と同様に⁶⁾、等方性と異方性とは解が別の形をとることが示されている。なお、特殊解としては、等分布荷重に対するフーリエ級数解を採用している。そして、数値計算例においては、周辺固定支持の扇形板を例にとり、階差法による計算例と本計算例とを比較することにより、解の収束に与える境界条件の影響を調べている。

2. 基礎方程式

扇形直交異方性板の基礎式は既に与えられており、⁵⁾ここでは後の展開に必要な式のみを示す。曲げモーメント M_r 、 M_θ 、ねじりモーメント $M_{r\theta}$ とたわみ w との関係は

$$M_r = -D_r \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \quad (1.1)$$

$$M_\theta = -D_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (1.2)$$

$$M_{r\theta} = -2D_k \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (1.3)$$

となり、ここに

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad D_k = \frac{G_{r\theta} h^3}{12} \quad (2.1-3)$$

であり、 E_r 、 E_θ はYoung 係数、 h は板厚、 ν_r 、 ν_θ はPoisson 比、 $G_{r\theta}$ はせん断弾性係数を示している。次に分布荷重を p とすれば、扇形直交異方性板の支配微分方程式は以下のように表せる。

$$D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2D_{r\theta}}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{2D_r}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{2D_{r\theta}}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2}$$

$$-\frac{D_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2(D_\theta + D_{r\theta})}{r^4} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{D_\theta}{r^3} \frac{\partial W}{\partial r} = p \quad (3)$$

ここに、

$$D_{r\theta} = D_r \nu_\theta + 2 D_K = D_\theta \nu_r + 2 D_K \quad (4)$$

である。

1)~5)

既往の研究においては、式(3)を基に解を求めているが、変数 r が係数に含まれているために、解を θ 方向にのみフーリエ展開している場合が多い。そのために、直線辺において境界条件が単純支持に限定されてしまう。ここでは、式(3)を定数係数の偏微分方程式に変換するために、以下の式で定義される新しいパラメータ x, y を導入することにする。

$$\ln r = \frac{x}{2} \ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \ln (r_0 r_1) \quad (5.1)$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{2} (1 + y) \quad (5.2)$$

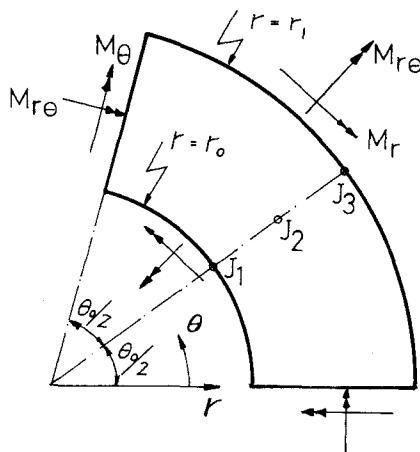


Fig.1 Sector Plate

ここに、 r_0, r_1 は円弧辺の座標値、 θ_0 は開角を示しており、 x, y は、それぞれ $r = r_0, r_1$ で $x = -1, +1$ となり、 $\theta = 0, \theta_0$ で $y = -1, +1$ となるように無次元化されている。式(5)を用いて式(3)を書き直すと、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial \bar{x}^4} - 4 \frac{\partial^3 W}{\partial \bar{x}^3} + 5 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} - 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{x}} + 2 \bar{D}_{r\theta} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} - 2 \frac{\partial^3 W}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} \right) \\ & + \bar{D}_\theta \left(\frac{\partial^4 W}{\partial \bar{y}^4} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{x}} \right) = \bar{P} \exp(4\bar{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、ここに

$$\bar{D}_\theta = \frac{D_\theta}{D_r}, \quad \bar{D}_{r\theta} = \frac{D_{r\theta}}{D_r}, \quad \bar{P} = \frac{P}{D_r} (r_0 r_1)^2 \quad (7.1-3)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad a = \frac{2}{\ln(r_1/r_0)}, \quad b = \frac{2}{\theta_0} \quad (7.4-7)$$

である。なお、文献(3)、(4)においては剛性 $D_r, D_\theta, D_{r\theta}$ 、に関して特別な関係を仮定しているが、ここではそのような関係を仮定せずに式(6)の一般解を求めている。

3. 扇形直交異方性板の一般解

定数係数の式(6)を解くにあたり、一般解を以下のようにおく。

$$w = w^I + w^II + w^III \quad (8)$$

ここに、 w^I は特殊解であり、 w^II 、 w^III はそれぞれ半径方向(x -方向)と円周方向(y -方向)にフーリエ展開した余関数である。

3.1 特殊解 w^I

ここでは等分布荷重 p_0 に対する特殊解を求める。まず、等分布荷重 p_0 を円周方向にフーリエ展開すると、

$$p_0 = \sum_{n=1,3,\dots} p_n \cos \lambda_n y \quad (9)$$

と表せ、ここに

$$p_n = \frac{2 p_0}{\lambda_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad \lambda_n = n \pi / 2 \quad (10.1-2)$$

である。式(9)を式(6)に代入して特殊解 w^I を求めると、

$$w^I = \sum_{n=1,3,\dots} w_n \exp(4 \bar{x}) \cos \lambda_n y \quad (11)$$

となり、ここに

$$w_n = \frac{P_n (r_0 r_1)^2}{D_r \{ 72 + \bar{D}_\theta (b^4 \lambda_n^4 - 2 b^2 \lambda_n^2 - 8) - 18 b^2 \lambda_n^2 \bar{D}_{r\theta} \}} \quad (12)$$

である。

3.2 余関数 w^II

たわみ w を x -方向にフーリエ展開して、

$$w^II = \sum_{m=1,3,\dots} \left\{ w_{c,m}^II(\bar{y}) \cos \lambda_m x + w_{s,m}^II(\bar{y}) \sin \lambda_m x \right\} \quad (13)$$

とおく。ここに

$$\lambda_m = m \pi / 2 \quad (14)$$

である。式(13)を式(6)の同次微分方程式($\bar{p} = 0$)に代入し、変数分離の方法を用いることにより $w_{c,m}^II$ 、 $w_{s,m}^II$ に関する連立常微分方程式が得られ、

$$L_1 (w_{c,m}^{\Pi}) + L_2 (w_{s,m}^{\Pi}) = 0 \quad (15.1)$$

$$L_1 (w_{s,m}^{\Pi}) - L_2 (w_{c,m}^{\Pi}) = 0 \quad (15.2)$$

と表され、ここに

$$\begin{aligned} L_1 () &= \overline{D}_\theta \frac{d^4}{d\overline{y}^4} + 2 \left\{ \overline{D}_\theta + (1 - a^2 \lambda_m^2) \overline{D}_{r\theta} \right\} \frac{d^2}{d\overline{y}^2} + a^4 \lambda_m^4 - (5 - \overline{D}_\theta) a^2 \lambda_m^2 \\ L_2 () &= -4 a \lambda_m \overline{D}_{r\theta} \frac{d^2}{d\overline{y}^2} + 4 a^3 \lambda_m^3 - 2 (1 - \overline{D}_\theta) a \lambda_m \end{aligned} \quad (16.1-2)$$

である。ここで、式(15)を解くために、

$$w_{c,m}^{\Pi} = A \exp(\xi \overline{y}), \quad w_{s,m}^{\Pi} = \overline{A} \exp(\xi \overline{y}) \quad (17.1-2)$$

とおき、 $A, \overline{A}$ が共に非自明解を持つ条件より、 ξ に関する8次代数方程式が以下のように求まる。

$$\begin{aligned} &\left[\overline{D}_\theta \xi^4 + 2 \left\{ \overline{D}_\theta + (1 - a^2 \lambda_m^2) \overline{D}_{r\theta} \right\} \xi^2 + a^4 \lambda_m^4 - (5 - \overline{D}_\theta) a^2 \lambda_m^2 \right]^2 \\ &+ \left\{ 4 a \lambda_m \overline{D}_{r\theta} \xi^2 - 4 a^3 \lambda_m^3 + 2 (1 - \overline{D}_\theta) a \lambda_m \right\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

上式を ξ について解くと、

$$\begin{aligned} \xi_{1,2} &= \pm \alpha_1 \pm i \beta_1, & \xi_{3,4} &= \pm \alpha_2 \pm i \beta_2 \end{aligned} \quad (19.1-2)$$

と表せ、ここに

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{K_1 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{2}} \quad (20.1-2)$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{K_3 + \sqrt{K_3^2 + K_4^2}}{2}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{-K_3 + \sqrt{K_3^2 + K_4^2}}{2}} \quad (20.3-4)$$

$$K_1 = \frac{-K_5 + K_6}{2}, \quad K_2 = \frac{-K_7 + K_8}{2}, \quad K_3 = \frac{-K_5 - K_6}{2}, \quad K_4 = \frac{-K_7 - K_8}{2} \quad (20.5-8)$$

$$K_5 = \frac{2 \{ \overline{D}_\theta + (1 - a^2 \lambda_m^2) \overline{D}_{r\theta} \}}{\overline{D}_\theta}, \quad K_6 = \sqrt{\frac{K_9 + \sqrt{K_9^2 + K_{10}^2}}{2}} \quad (20.9-10)$$

$$K_7 = \frac{4a\lambda_m \overline{D}_\theta}{\overline{D}_\theta}, \quad K_8 = \sqrt{\frac{-K_9 + \sqrt{K_9^2 + K_{10}^2}}{2}} \quad (20.11-12)$$

$$K_9 = K_5^2 - K_7^2 - 4K_{11}, \quad K_{10} = 2K_5 K_7 - 4K_{12} \quad (20.13-14)$$

$$K_{11} = \frac{a^4 \lambda_m^4 - (5 - \overline{D}_\theta) a^2 \lambda_m^2}{\overline{D}_\theta}, \quad K_{12} = \frac{-4a^3 \lambda_m^3 + 2(1 - \overline{D}_\theta) a \lambda_m}{\overline{D}_\theta} \quad (20.15-16)$$

である。よって、式(15), (16), (18)より同次解 w^{II} は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} w^{\text{II}} = & \sum_{m=1,3,\dots} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left\langle A_{4j-3,m} \cos \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y} + A_{4j-2,m} \cos \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y} \right. \right. \\ & + A_{4j-1,m} \sin \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y} + A_{4j,m} \sin \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y} \left. \right\rangle \cos \lambda_m x \\ & + \left\langle \sum_{j=1}^2 \left\{ A_{4j-3,m} (T_{2j-1} \cos \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y} - T_{2j} \sin \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y}) \right. \right. \\ & + A_{4j-2,m} (T_{2j-1} \cos \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y} - T_{2j} \sin \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y}) \\ & + A_{4j-1,m} (T_{2j-1} \sin \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y} + T_{2j} \cos \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y}) \\ & \left. \left. + A_{4j,m} (T_{2j-1} \sin \beta_j \bar{y} \sinh \alpha_j \bar{y} + T_{2j} \cos \beta_j \bar{y} \cosh \alpha_j \bar{y}) \right\} \right\rangle \sin \lambda_m x \left. \right\} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに、

$$T_1 = \frac{H_1 H_3 + H_2 H_4}{H_3^2 + H_4^2}, \quad T_2 = \frac{H_2 H_3 - H_1 H_4}{H_3^2 + H_4^2} \quad (22.1-2)$$

$$H_1 = -4a\lambda_m (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \overline{D}_\theta + 4a^3 \lambda_m^3 - 2(1 - \overline{D}_\theta) a \lambda_m \quad (22.3)$$

$$H_2 = -8a\lambda_m \alpha_1 \beta_1 \overline{D}_\theta \quad (22.4)$$

$$H_3 = \overline{D}_\theta (\alpha_1^4 - 6\alpha_1^2 \beta_1^2 + \beta_1^4 + 2\alpha_1^2 - 2\beta_1^2) + 2\overline{D}_\theta (\alpha_1^2 - \beta_1^2) (1 - a^2 \lambda_m^2)$$

$$+ a^4 \lambda_m^4 - (5 - \overline{D_\theta}) a^2 \lambda_m^2 \quad (22.5)$$

$$H_4 = 4 \alpha_1 \beta_1 \left\{ (1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2) \overline{D_\theta} + (1 - a^2 \lambda_m^2) \overline{D_{r\theta}} \right\} \quad (22.6)$$

であり、 T_3 、 T_4 はそれぞれ T_1 、 T_2 において、 $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ 、 $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ と置き換えたものである。

以上で余関数 w^{II} が求まったが、ここで等方性の場合について考えると、剛性の間に $D_r = D_\theta = D_{r\theta}$ なる関係が成立する。この条件を式 (19) に代入すると $\beta_1 = 0$ となり、特性根 ξ に重根が含まれることがわかる。従って、異方性の解において、 $D_r = D_\theta = D_{r\theta}$ とおいただけでは等方性の解が得られないことになる。このことは、異方性弾性理論で既に指摘されている通りであり、等方性と異方性の解はそれぞれ別の形になる。一方、次節で示すように、たわみを円周方向にフーリエ展開した場合には、このような現象は現われないことを付記しておく。なお、等方性の場合における余関数 w^{II} は、文献 (7) に与えられているのでここでは省略する。

3. 3 余関数 w^{III}

次に、たわみ w を y 方向にフーリエ展開して、

$$w^{\text{III}} = \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ w_{c,n}^{\text{III}}(\bar{x}) \cos \lambda_n y + w_{s,n}^{\text{III}}(\bar{x}) \sin \lambda_n y \right\} \quad (23)$$

とおく。式 (23) を式 (6) の同次微分方程式に代入し、変数分離の方法を用いることにより、 $w_{c,n}^{\text{III}}$ 、 $w_{s,n}^{\text{III}}$ に関する以下の常微分方程式を得る。

$$L_3(w_{c,n}^{\text{III}}) = 0 \quad , \quad L_3(w_{s,n}^{\text{III}}) = 0 \quad (24.1-2)$$

ここに、

$$\begin{aligned} L_3(\quad) = & \frac{d^4}{d\bar{x}^4} - 4 \frac{d^3}{d\bar{x}^3} + 5 \frac{d^2}{d\bar{x}^2} - 2 \frac{d}{d\bar{x}} - (2b^2 \lambda_n^2 \overline{D_{r\theta}} + \overline{D_\theta}) \frac{d^2}{d\bar{x}^2} \\ & + (4b^2 \lambda_n^2 \overline{D_{r\theta}} + 2\overline{D_\theta}) \frac{d}{d\bar{x}} + b^4 \lambda_n^4 \overline{D_\theta} - 2b^2 \lambda_n^2 (\overline{D_\theta} + \overline{D_{r\theta}}) \end{aligned} \quad (25)$$

である。 $w_{c,n}^{\text{III}}$ と $w_{s,n}^{\text{III}}$ は同型の微分方程式の解であることから、ここでは $w_{c,n}^{\text{III}}$ について考える。式 (24.1) を解くために

$$w_{c,n}^{\text{III}} = B \exp(1 + \eta) \bar{x} \quad (26)$$

とおき、式 (24) に代入すると、 B が非自明解を持つ条件より、 η に関する代数方程式が以下のように得られる。

$$\eta^4 - Q_n \eta^2 + R_n = 0 \quad (27)$$

ここに、

$$Q_n = 1 + 2b^2 \lambda_n^2 \overline{D}_{r\theta} + \overline{D}_\theta, \quad R_n = (1 - b^2 \lambda_n^2)^2 \overline{D}_\theta \quad (28.1-2)$$

である。式(27)の根 η は、 $(Q_n/2)^2 - R_n$ の値によって以下の3つの場合に分けられる。

$$(i) \quad (Q_n/2)^2 - R_n > 0 \quad \text{の時} \quad \eta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Q_n}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q_n}{2}\right)^2 - R_n}} \quad (29.1)$$

$$(ii) \quad (Q_n/2)^2 - R_n = 0 \quad \text{の時} \quad \eta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Q_n}{2}} \quad (29.2)$$

$$(iii) \quad (Q_n/2)^2 - R_n < 0 \quad \text{の時} \quad \eta_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Q_n}{4} + \sqrt{\frac{R_n}{4}}} \pm i \sqrt{-\frac{Q_n}{4} + \sqrt{\frac{R_n}{4}}} \quad (29.3)$$

(i)の場合、式(25)より関数 $w_{c,n}^{III}$ は

$$w_{c,n}^{III} = \sum_{j=1}^4 \overline{A}_{j,n} \exp(1 + \eta_j) \overline{x} \quad (30)$$

と表される。(ii)の場合には、重根を含むことから、関数 $w_{c,n}^{III}$ は

$$w_{c,n}^{III} = \overline{A}_{1,n} e^{(1+\eta_1)\overline{x}} + \overline{A}_{2,n} x e^{(1+\eta_1)\overline{x}} + \overline{A}_{3,n} e^{(1+\eta_2)\overline{x}} + \overline{A}_{4,n} x e^{(1+\eta_2)\overline{x}} \quad (31)$$

と表される。(iii)の場合、関数 $w_{c,n}^{III}$ は、

$$w_{c,n}^{III} = \overline{A}_{1,n} e^{\overline{x}} \cos \phi \overline{x} \cosh \phi \overline{x} + \overline{A}_{2,n} e^{\overline{x}} \cos \phi \overline{x} \sinh \phi \overline{x} \\ + \overline{A}_{3,n} e^{\overline{x}} \sin \phi \overline{x} \cosh \phi \overline{x} + \overline{A}_{4,n} e^{\overline{x}} \sin \phi \overline{x} \sinh \phi \overline{x} \quad (32)$$

となり、ここに

$$\phi = \sqrt{\frac{Q_n}{4} + \sqrt{\frac{R_n}{4}}}, \quad \psi = \sqrt{-\frac{Q_n}{4} + \sqrt{\frac{R_n}{4}}} \quad (33.1-2)$$

である。同様に、関数 $w_{s,n}^{III}$ も求め、(i)の場合について余関数 w^{III} を求めると、

$$w^{III} = \sum_{j=1}^4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_{j,n} e^{(1+\eta_j)\overline{x}} \cos \lambda_n y + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A}_{4+j,n} e^{(1+\eta_j)\overline{x}} \sin \lambda_n y \right] \quad (34)$$

となる。なお、(ii)、(iii)の場合も余関数 w^{III} は容易に求まることから、ここでは省略する。

4. 境界条件

ここでは、3章において得られた一般解を用いて、等分布荷重を受ける扇形直交異方性板の円弧辺および

直線辺で、任意の境界条件が与えられた時の解析法について考える。なお、文献（7）と同様の手法により行なえるため、ここでは概略だけを述べることにする。一般解の中には、三角関数以外の関数が含まれているために、そのままの形で境界条件を満足させることは難しい。そこで、例えば、 $x = 1$ において $w = 0$ を満足させるためには、まず一般解に含まれている y の関数の中で、三角関数以外の関数が含まれている項を円周方向にフーリエ展開する。そして、たわみ w を以下のように整理する。

$$w = \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ Z_n(x, m) \cos \lambda_n y + \overline{Z}_n(x, m) \sin \lambda_n y \right\} \tag{35}$$

ここで、 $x = 1$ において $w = 0$ となることから、

$$Z_n(1, m) = 0 \quad , \quad \overline{Z}_n(1, m) = 0 \tag{36.1-2}$$

が得られる。 $y = 1$ における境界条件も、同様の方法にて満足させることができる。但し、この場合は、 $\cos \lambda_m x$ と $\sin \lambda_m x$ とで整理する必要がある。採用するフーリエ級数の項数をそれぞれ M 、 N とすれば、 $4 \{ (M+1) + (N+1) \}$ 個の積分定数に対して、同じ数だけの境界条件式が得られ、これを解くことにより積分定数 $A_{1,m} \sim A_{8,m}$ 、 $\overline{A}_{1,n} \sim \overline{A}_{8,n}$ が決定される。

5. 数値計算例

直線辺が単純支持されている扇形板について、解析的手法による結果と離散的手法による結果との比較は、これまで多く報告されている^{(1),(2)}。また、周辺が固定支持された半円形の扇形板についても、両者の手法による結果の比較はなされている^{(1),(2)}。ここでは、文献（8）において、階差法により4辺が固定支持されている等方性扇形板の結果が得られていることから、本解析法による結果と階差法による結果を比較検討する。

文献（8）では、 $2 D_K = (1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{D_r D_\theta}$ とおき、剛比： $D_\theta / D_r (= c^2)$ をパラメータにとり計算を行っている。本報告でも、以下の計算において同様の条件を用いている。比較のために用いた扇形板は、 $r_o = 5^m$ 、 $r_i = 1^m$ 、 $\theta_o = 2/3 \text{ rad}$ 、で、中央円弧長と直線辺長とが相等しい扇形板で、Poisson 比は零である。表. 1に、剛比 c^2 を4、1、 $1/4$ と変化させた時の $\theta = \theta_o / 2$ における各点 J_1 、 J_2 、 J_3 （Fig. 1）のたわみと曲げモーメントの結果を示す。なお、フーリエ級数の収束状況を表. 2に示すが、本報告の数値計算例は、 $M = N = 21$ における数値結果である。表. 3では、

表. 1 周辺固定の扇形直交異方性板の結果

剛比 c^2	位置	$\widetilde{\alpha}$	$\widetilde{\beta}$	$\widetilde{\gamma}$
4. 0	J_1	0. 0	-0. 02380	-0. 00003
	J_2	0. 00052	0. 00614	0. 03016
	J_3	0. 0	-0. 03075	0. 00001
1. 0	J_1	0. 0	-0. 05192	-0. 00003
	J_2	0. 00124	0. 01774	0. 01708
	J_3	0. 0	-0. 04931	0. 00001
0. 25	J_1	0. 0	-0. 08277	-0. 00003
	J_2	0. 00208	0. 03158	0. 00587
	J_3	0. 0	-0. 06649	0. 00001

注)

$$\begin{aligned} w &= \widetilde{\alpha} p_o l^4 / D_r \\ M_r &= \widetilde{\beta} p_o l^2 \\ M_\theta &= \widetilde{\gamma} p_o l^2 \end{aligned}$$

但し、 l は直線辺長である。

等方性扇形板について、階差法と本解析法とによる J_2 における $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ の値を示した。

表. 2 フーリエ級数解の収束 ($C^2=4.0$)

N,M	$\tilde{\alpha} \times 10^{-3}$	$\tilde{\beta} \times 10^{-2}$	$\tilde{\gamma} \times 10^{-1}$
3	0.52033	0.61284	0.29551
5	0.51819	0.61573	0.30440
7	0.51710	0.61448	0.30050
9	0.51684	0.61407	0.30222
11	0.51668	0.61391	0.30123
13	0.51661	0.61382	0.30172
15	0.51657	0.61377	0.30141
17	0.51654	0.61373	0.30158
19	0.51652	0.61371	0.30162
21	0.51652	0.61370	0.30162

表. 3 解 の 比 較

方 法	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$
階差法普通 8 分割	0.00141	0.01814
階差法普通 16 分割	0.00129	0.01781
階差法高精度 8 分割	0.00127	0.01768
本解析法	0.00124	0.01774

単純支持の場合には、階差法 8 分割で解析解とほぼ一致した解が得られることが報告されているが、⁸⁾ 周辺固定支持の場合には、たわみについてかなりの誤差が含まれていることが表. 3 よりわかる。しかしながらモーメントに関しては良好な結果が得られており、このことは正方形板を差分法により解析した場合と同じ傾向にあり、⁹⁾ 離散解の特徴の一つと思われる。なお、高精度の階差法と本解析法とでは比較的良く一致した結果が得られている。

6. まとめ

本報告では、定数係数の扇形直交異方性板の基本微分方程式を誘導し、フーリエ級数の手法を用いて一般解を求めた。その際に、同次解は半径方向と円周方向にそれぞれフーリエ展開された関数の和で表されている。本フーリエ級数解は、直線辺と円弧辺の 4 辺において、力学的に許容され得る任意の境界条件を扱うことが可能である。このように汎用性のある解であることから、今後、離散の手法の妥当性を検討する際にも広く利用できることと思われる。

謝 辞

本論文の作成にあたり、有益な御指摘を頂いた査読者の方々に謝意を表する。本論文の数値計算は、東京電機大学電子計算機センター F A C O M M-160, M160-F を使用した。

参考文献

- 1) Harik, I.E. : Analytical Solution to Orthotropic Sector, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.110, No.4, April, 1984, pp.554-568.
- 2) Rubin, C. : General Solution to Bending of Orthotropic Sectors, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.109, No.1, February, 1983, pp.168-174.
- 3) Yonezawa, H. : Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol.88, No.1, February, 1962, pp.1-21.

- 4) 芳村 仁：曲線直交異方性扇形平板の曲げについて，土木学会論文集，第82号，1962年6月，PP.1-10.
- 5) アムバルツミャン（大橋義夫 他 訳）：異方弾性板の理論，森北出版，1975.
- 6) 平嶋健一：岩質地山の静力学的挙動に関する基礎的研究，京都大学提出学位論文，昭和52年12月.
- 7) 井浦雅司，平嶋政治：任意の境界条件を有する偏平らせん殻のフーリエ解析，土木学会論文報告集，第321号，1982年5月，pp.15-27.
- 8) 奥村勇：曲線直交異方性扇形平板の階差法による解法，土木学会論文集，第140号，1967年4月，pp.55-58.
- 9) 成岡昌夫 他：構造力学 第3巻 板の力学，丸善，1970.