

一般化座標法の還元法による定式化^{1), 2)}

FORMULATION OF THE GENERALIZED COORDINATE METHOD BY THE REDUCTION METHOD

神部 俊一 * 中谷 義紀**

By Shun-ichi KAMBE and Yoshinori NAKATANI

The generalized coordinate method developed by V. Z. Vlasov in order to analyse multiple cell box girder belongs to the displacement method. The present paper, however, provides a way to formulate it by the reduction method, also referred to as the transfer matrix method, and a new way to avoid inherent large numerical errors caused by the successive multiplications of matrices in which hyperbolic functions are comprised.

The way may be applied to the analysis of a girder in which the cross-section varies along the span and may be extended to account for the effects of flexible interior diaphragms on the structural behaviour.

1. まえがき

一般化座標法を還元法によって定式化すれば、中間隔壁を有する変断面の多室断面箱桁を横断面輪郭の変形の影響を考慮に入れて、種々の境界条件並びに载荷条件のもとで解析することが可能である。周知のように、還元法には格間行列に含まれる双曲線関数項の値が行列の乗算の繰返しによって著しく大きくなることから生ずる数値計算上の困難が伴う。そこで、この困難を回避するために本稿では、格間行列において多項式から成る項と双曲線関数から成る項とを分離するように工夫を払い、双曲線関数項を単位化するという中井³⁾等の手法を応用して一般化座標法を還元法によって再定式化する手法を示す。

次いで、一端が固定端で他端が単純支持端である二室断面を有する等断面の鋼製箱桁にこの手法を適用して数値計算を行ない、横断面のゆがみに関連する力学的性状の一端を明らかにした。

* 工博 鳥取大学教授 工学部海洋土木工学科 (〒680 鳥取市湖山町南4丁目101番地)

** 鳥取大学工学研究科土木工学専攻学生 (〒680 鳥取市湖山町南4丁目101番地)

2. 記号と基本量

桁軸方向に z -座標, 横断面輪郭線方向に s -座標, さらに両者に直交する方向に n -座標を設定して次の記号を導入する。

- $\Phi(s), \Psi(s), X(s)$: 横断面の z -方向, s -方向, ならびに n -方向変位に関連する一般化座標を成分とする m 次, n 次, ならびに n 次の列ベクトル
- $U(z), V(z)$: 面外変位ならびに面内変位に関連する m 次と n 次の列ベクトル
- $\sigma_z(s, z), \tau_{zs}(s, z)$: 横断面において桁軸方向に作用する垂直応力度と輪郭線方向に作用するせん断応力度
- $q_s(s, z), q_n(s, z)$: 桁表面の単位面積当りに作用する分布荷重の s -方向, n -方向への成分
- E, G : 断面を構成する薄板要素のヤング係数とせん断弾性係数
- F_0, F_R : 薄板要素のみの断面積とこれに補剛材の影響を考慮に入れた換算断面積
- Γ : 横断面輪郭線の全長
- t_c, d_c, l_c : 薄板要素の基準厚さ, 基準幅ならびに桁の基準支間長
- P_c : 荷重の基準量

上記の記号を用いると諸基本量は次式で表わされる。なお、座標 s に関する導関数を $(\cdots)^*$ で示す。

$$\text{変位成分} : u(s, z) = \Phi(s)^T U(z), \quad v(s, z) = \Psi(s)^T V(z) \quad \cdots (1)_{1 \sim 2}$$

$$A = \int_{F_R} \Phi(s) \Phi(s)^T dF_R, \quad B = \int_{F_0} \Phi^*(s) \Phi^*(s)^T dF_0$$

一般化剛性行列 :

$$C = \int_{F_0} \Phi^*(s) \Psi(s)^T dF_0, \quad R = \int_{F_0} \Psi(s) \Psi(s)^T dF_0 \quad \cdots (2)_{1 \sim 4}$$

$$\text{一般化断面力} : M(z) = \int_{F_R} \sigma_z(s, z) \Phi(s) dF_R, \quad Q(z) = \int_{F_0} \tau_{zs}(s, z) \Psi(s) dF_0 \quad \cdots (3)_{1 \sim 2}$$

$$\text{一般化分布荷重} : Q^*(z) = \int_{\Gamma} [q_s(s, z) \Psi(s) + q_n(s, z) X(s)] dF_0 \quad \cdots (4)$$

3. 無次元化

一般固有値問題を解くことを含む行列演算を高精度で行なう目的で無次元換算量を導入する。なお、無次元換算量であることを示すのに対応する諸量の上側に横線を付ける。

まず、幾何学的諸量と分布荷重の座標軸方向成分とを次式

$$t = t_c \bar{t}, \quad s = d_c \bar{s}, \quad z = l_c \bar{z} \quad \dots\dots\dots(5)_{1 \sim 2}$$

$$F_0 = d c t_c \bar{F}_0, \quad F_R = d c t_c \bar{F}_R \quad \dots\dots\dots(6)_{1 \sim 2}$$

$$q_s = (P_c / d c l_c) \bar{q}_s, \quad q_n = (P_c / d c l_c) \bar{q}_n \quad \dots\dots\dots(7)_{1 \sim 2}$$

によって無次元化する。

次に、一般化座標の次元指数 $m_j (j=1, \dots, m)$, $n_k (k=1, \dots, n)$ を用いて対角行列 $D_\Phi = \text{diag}(d_c^{m_j})$, $D_\Psi = D_X = \text{diag}(d_c^{n_k})$ を導入すると一般化座標ベクトルは次式

$$\Phi = D_\Phi \bar{\Phi}, \quad \Psi = D_\Psi \bar{\Psi}, \quad X = D_X \bar{X} \quad \dots\dots\dots(8)_{1 \sim 3}$$

によって無次元化できる。

以上の関係式を変位-ひずみ関係式、応力-ひずみ関係式に注意して基本量の定義式に用いれば、これら諸量を無次元化することが可能である。

4. 基礎方程式

$\bar{z}$ に関する微分を $(\dots)'$ で表し、無次元換算量を用いて基礎方程式を求めると次のようになる⁴⁾。

$$\text{構成方程式: } \bar{M}(\bar{z}) = \bar{A} \bar{U}'(\bar{z}), \quad \bar{Q}(\bar{z}) = \gamma^{-1} (\bar{C}^T \bar{U}(\bar{z}) + \bar{R} \bar{V}'(\bar{z})) \quad \dots\dots\dots(9)_{1 \sim 2}$$

$$\text{平衡方程式: } \bar{M}''(\bar{z}) - \gamma^{-1} \alpha^{-2} \bar{H} \bar{A}^{-1} \bar{M}(\bar{z}) + \alpha^{-2} \bar{C} \bar{R}^{-1} \bar{Q}^* = \bar{O}, \quad \bar{Q}'(\bar{z}) + \bar{Q}^* = \bar{O} \quad \dots\dots\dots(10)_{1 \sim 2}$$

$$\text{ここに, } \gamma = E/G, \quad \alpha = d_c/l_c \quad \dots\dots\dots(11)_{1 \sim 2}, \quad \bar{H} = \bar{B} - \bar{C} \bar{R}^{-1} \bar{C}^T \quad \dots\dots\dots(12)$$

次に、非負値並びに正值の実対称行列 $\bar{H}$, $\bar{A}$ に関する一般固有値問題

$$\bar{H} \bar{x} = \bar{\Lambda}^2 \bar{A} \bar{x} \quad \dots\dots\dots(13)$$

の $\bar{A}$ に関して正規化された (m, m) 型のモーダルマトリックスを $\bar{X}$ とすれば

$$\bar{X}^T \bar{A} \bar{X} = \bar{E} m, \quad \bar{X}^T \bar{H} \bar{X} = \bar{\Lambda}^2 m \quad \dots\dots\dots(14)_{1 \sim 2}$$

という関係が成立する。

$$\text{ここに, } \bar{\Lambda}^2 m = \text{diag}(\bar{\lambda}_i^2) \quad (i=1, \dots, m) \quad \dots\dots\dots(15)$$

で定義される m 次の対角行列であり、 $\bar{E} m$ は m 次の単位行列である。

$$\text{ここで, } \bar{Y} = \bar{A} \bar{X} \quad \dots\dots\dots(16)$$

とおくと、式(14)₁より

$$\bar{X}^T = \bar{Y}^{-1}, \quad \bar{Y}^T = \bar{X}^{-1} \quad \dots\dots\dots(17)_{1 \sim 2}$$

という関係が成立する。

さらに、表示式を簡単にするために、

$${}_H \bar{X} = \alpha^{-2} \bar{R}^{-1} \bar{C}^T \bar{X} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$\bar{\Omega} m^2 = \gamma^{-1} \alpha^{-2} \bar{\Lambda} m^2 = \text{diag}(\bar{\omega}_j^2) \quad \dots\dots\dots(19) \\ (j=1, \dots, m)$$

$${}_H \bar{Q}^* = {}_H \bar{X}^T \bar{Q}^* \quad \dots\dots\dots(20)$$

なる記号を導入する。

式(14)_{1~2} で示されるモーダルマトリックス $\bar{X}$ の性質を応用すれば、式(10)₁ は対角化できて $\bar{M}(\bar{z})$ に対する一般解が容易に求まる。この解と残りの平衡方程式並びに構成方程式とを利用して、任意点 $\bar{z}$ の状態量ベクトル $\bar{M}(\bar{z})$, $\bar{Q}(\bar{z})$, $\bar{U}(\bar{z})$, $\bar{V}(\bar{z})$ を初期状態量ベクトル $\bar{U}_0$, $\bar{V}_0$, $\bar{M}_0$, $\bar{Q}_0$ を用いて表すと以下のようになる。

$$\bar{M}(\bar{z}) = \bar{Y} \bar{K}_M(\bar{z}) \bar{X}^T \bar{M}_0 + \bar{Y} \bar{K}_Q(\bar{z}) \bar{X}^T \bar{Q}_0 + \bar{Y} \bar{K}_U(\bar{z}) \bar{Y}^T \bar{U}_0 + \bar{Y} \bar{K}_L(\bar{z}) \bar{X}^T \bar{Q}^* \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\bar{Q}(\bar{z}) = \bar{Q}_0 - \bar{Q}^* \bar{z} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\bar{U}(\bar{z}) = \bar{X} \bar{N}_M \bar{X}^T \bar{M}_0 + \bar{X} \bar{N}_Q(\bar{z}) \bar{X}_H^T \bar{Q}_0 + \bar{X} \bar{N}_U(\bar{z}) \bar{Y}^T \bar{U}_0 + \bar{X} \bar{N}_L(\bar{z}) \bar{X}_H^T \bar{Q}^* \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\bar{V}(\bar{z}) = \alpha^2 \bar{X}_H \bar{L}_M(\bar{z}) \bar{X}^T \bar{M}_0 + (\alpha^2 \bar{X}_H \bar{L}_Q(\bar{z}) \bar{X}_H^T + \gamma \bar{z} \bar{R}^{-1}) \bar{Q}_0 \\ + \alpha^2 \bar{X}_H \bar{L}_U(\bar{z}) \bar{Y}^T \bar{U}_0 + \bar{V}_0 + (\alpha^2 \bar{X}_H \bar{L}_L(\bar{z}) \bar{X}_H^T - \frac{1}{2} \gamma \bar{z}^2 \bar{R}^{-1}) \bar{Q}^* \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $\bar{K}_M(\bar{z})$, $\bar{K}_Q(\bar{z})$, $\dots\dots$, $\bar{L}_L(\bar{z})$ は分割対角行列である。

般化座標ベクトルの成分の一部に横断面の剛体としての変位モードを取り入れると、行列 $\bar{H}$ は正值判定

符号となるので、式(13)に対してレーリー商を形成すれば明らかのように、固有値のなかに零になるものが存在する。そこで、零固有値の重複度を p とし $q = m - p$ と置くと、上述の分割対角行列の具体的な表示式は Table 1 のようになる。

Table 1 Partitioned Diagonal Matrix

$\bar{K}_M(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{K}_M^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{K}_M^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{K}_Q(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{K}_Q^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{K}_Q^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{K}_U(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{K}_U^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{K}_U^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{K}_L(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{K}_L^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{K}_L^q(\bar{z}) \end{array} \right]$
$\bar{N}_M(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{N}_M^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{N}_M^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{N}_Q(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{N}_Q^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{N}_Q^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{N}_U(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{N}_U^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{N}_U^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{N}_L(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{N}_L^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{N}_L^q(\bar{z}) \end{array} \right]$
$\bar{L}_M(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{L}_M^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{L}_M^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{L}_Q(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{L}_Q^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{L}_Q^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{L}_U(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{L}_U^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{L}_U^q(\bar{z}) \end{array} \right]$	$\bar{L}_L(\bar{z}) = \left[\begin{array}{c c} \bar{L}_L^p(\bar{z}) & \bar{O}_{pq} \\ \hline \bar{O}_{qp} & \bar{L}_L^q(\bar{z}) \end{array} \right]$

Table 2 Diagonal Submatrices

$\bar{K}_M^p(\bar{z}) = \bar{E}_p$	$\bar{K}_M^q(\bar{z}) = Ch_q(\bar{z})$
$\bar{K}_Q^p(\bar{z}) = \bar{z} \bar{E}_p$	$\bar{K}_Q^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-1} Sh_q(\bar{z})$
$\bar{K}_U^p(\bar{z}) = \bar{O}_{pp}$	$\bar{K}_U^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q Sh_q(\bar{z})$
$\bar{K}_L^p(\bar{z}) = -\frac{1}{2} \bar{z}^2 \bar{E}_p$	$\bar{K}_L^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-2} (\bar{E}_q - Ch_q(\bar{z}))$
$\bar{N}_M^p(\bar{z}) = \bar{z} \bar{E}_p$	$\bar{N}_M^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-1} - Sh_q(\bar{z})$
$\bar{N}_Q^p(\bar{z}) = \frac{1}{2} \bar{z}^2 \bar{E}_p$	$\bar{N}_Q^q(\bar{z}) = -\bar{Q}_q^{-2} (\bar{E}_q - Ch_q(\bar{z}))$
$\bar{N}_U^p(\bar{z}) = \bar{E}_p$	$\bar{N}_U^q(\bar{z}) = Ch_q(\bar{z})$
$\bar{N}_L^p(\bar{z}) = -\frac{1}{6} \bar{z}^3 \bar{E}_p$	$\bar{N}_L^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-2} (\bar{z} \bar{E}_q - \bar{Q}_q^{-1} Sh_q(\bar{z}))$
$\bar{L}_M^p(\bar{z}) = -\frac{1}{2} \bar{z}^2 \bar{E}_p$	$\bar{L}_M^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-2} (\bar{E}_q - Ch_q(\bar{z}))$
$\bar{L}_Q^p(\bar{z}) = -\frac{1}{6} \bar{z}^3 \bar{E}_p$	$\bar{L}_Q^q(\bar{z}) = \bar{Q}_q^{-2} (\bar{z} \bar{E}_q - \bar{Q}_q^{-1} Sh_q(\bar{z}))$
$\bar{L}_U^p(\bar{z}) = -\bar{z} \bar{E}_p$	$\bar{L}_U^q(\bar{z}) = -\bar{Q}_q^{-1} Sh_q(\bar{z})$
$\bar{L}_L^p(\bar{z}) = \frac{1}{24} \bar{z}^4 \bar{E}_p$	$\bar{L}_L^q(\bar{z}) = -\bar{Q}_q^{-2} \{ \frac{1}{2} \bar{z}^2 \bar{E}_q + \bar{Q}_q^{-2} (\bar{E}_q - Ch_q(\bar{z})) \}$

ここに、諸分割対角行列の左上隅にある小行列は多項式を成分とする p 次の対角行列であり、右下隅にある小行列は双曲線関数からなる式を成分とする q 次の対角行列である。そして、 $\bar{O}_{pq}$ 、 $\bar{O}_{qp}$ はそれぞれ

(p,q) 型, (q,p) 型の零行列である。 上記の諸小行列の具体的な表示式を Table 2 に示す。

ここに, $\text{Ch}_q(\bar{z}) = \text{diag}(\cosh \bar{\omega}_j \bar{z})$, $\text{Sh}_q(\bar{z}) = \text{diag}(\sinh \bar{\omega}_j \bar{z})$, ただし, $\bar{\omega}_j \neq 0$ ($j=1, \dots, q$) である q 次の対角行列である。 $\bar{E}_p$, $\bar{E}_q$ は、それぞれ p 次と q 次の単位行列であり、 $\bar{O}_{pp}$ は (p,p) 型の零行列である。

5. 双曲線関数項の分離

所要の目的を果たすために、行列 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, ${}_H\bar{X}$ を次のように分割する。

$$\bar{X} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{X}_p & \bar{X}_q \end{array} \right] \} m, \quad \bar{Y} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{Y}_p & \bar{Y}_q \end{array} \right] \} m, \quad {}_H\bar{X} = \left[\begin{array}{c|c} {}_H\bar{X}_p & {}_H\bar{X}_q \end{array} \right] \} n \quad \dots (25)_{1 \sim 3}$$

これらの分割行列を用いて次式で定義される新しい p 次と q 次の状態量列ベクトル

$${}_H\bar{M} \equiv \bar{X}^T \bar{M} = \left[\begin{array}{c} \bar{X}_p^T \bar{M} \\ \bar{X}_q^T \bar{M} \end{array} \right] \} p \equiv \left[\begin{array}{c} {}_H\bar{M}_p \\ {}_H\bar{M}_q \end{array} \right] \} p, \quad {}_H\bar{Q} \equiv \bar{X}^T \bar{Q} = \left[\begin{array}{c} \bar{X}_p^T \bar{Q} \\ \bar{X}_q^T \bar{Q} \end{array} \right] \} p \equiv \left[\begin{array}{c} {}_H\bar{Q}_p \\ {}_H\bar{Q}_q \end{array} \right] \} p$$

..... (26)_{1 \sim 2}

$${}_H\bar{U} \equiv \bar{Y}^T \bar{U} = \left[\begin{array}{c} \bar{Y}_p^T \bar{U} \\ \bar{Y}_q^T \bar{U} \end{array} \right] \} p \equiv \left[\begin{array}{c} {}_H\bar{U}_p \\ {}_H\bar{U}_q \end{array} \right] \} p, \quad {}_H\bar{Q}^* \equiv {}_H\bar{X}^T \bar{Q}^* = \left[\begin{array}{c} {}_H\bar{X}_p^T \bar{Q}^* \\ {}_H\bar{X}_q^T \bar{Q}^* \end{array} \right] \} p \equiv \left[\begin{array}{c} {}_H\bar{Q}_p^* \\ {}_H\bar{Q}_q^* \end{array} \right] \} p$$

..... (26)_{3 \sim 4}

Table 3 Field Matrix

	${}_H\bar{V}_0$	${}_H\bar{U}_{p,p}$	${}_H\bar{U}_{q,p}$	${}_H\bar{M}_{p,p}$	${}_H\bar{M}_{q,p}$	${}_H\bar{Q}_{p,p}$	${}_H\bar{Q}_{q,p}$	${}_H\bar{Q}_0$	${}_H\bar{Q}_p^*$	${}_H\bar{Q}_q^*$	1
${}_H\bar{V}$	$\bar{E}_n \alpha^2 {}_H\bar{X}_p {}_H\bar{L}_p^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{nq}$	$\alpha^2 {}_H\bar{X}_p {}_H\bar{L}_q^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{nq}$	$\alpha^2 {}_H\bar{X}_p {}_H\bar{L}_q^p(\bar{z})$	$\alpha^2 {}_H\bar{X}_q {}_H\bar{L}_q^{-2}(\bar{z})$	$\gamma \bar{z} \bar{R}^{-1} \alpha^2 {}_H\bar{X}_p {}_H\bar{L}_p^p(\bar{z})$	$\frac{1}{2} \alpha^2 {}_H\bar{X}_q {}_H\bar{L}_q^{-2}(\bar{z})$	$-\frac{1}{2} \gamma \bar{z} \bar{R}^{-1} \bar{Q}^*$		
${}_H\bar{U}_p$	$\bar{O}_{pn}$	${}_H\bar{N}_U^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	${}_H\bar{N}_M^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	${}_H\bar{N}_Q^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pn}$	${}_H\bar{N}_L^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{p1}$
${}_H\bar{U}_q$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{N}_U^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{N}_M^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{N}_Q^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{N}_L^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{q1}$
${}_H\bar{M}_p$	$\bar{O}_{pn}$	${}_H\bar{K}_U^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	${}_H\bar{K}_M^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	${}_H\bar{K}_Q^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pn}$	${}_H\bar{K}_L^p(\bar{z})$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{p1}$
${}_H\bar{M}_q$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{K}_U^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{K}_M^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{K}_Q^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	${}_H\bar{K}_L^q(\bar{z})$	$\bar{O}_{q1}$
${}_H\bar{Q}_p$	$\bar{O}_{pn}$	$\bar{O}_{pp}$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pp}$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{E}_p$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pn}$	$-\bar{z} \bar{E}_p$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{p1}$
${}_H\bar{Q}_q$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{O}_{qq}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{O}_{qq}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{E}_q$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	$-\bar{z} \bar{E}_q$	$\bar{O}_{q1}$
$\bar{Q}$	$\bar{O}_{nn}$	$\bar{O}_{np}$	$\bar{O}_{nq}$	$\bar{O}_{np}$	$\bar{O}_{nq}$	$\bar{O}_{np}$	$\bar{O}_{nq}$	$\bar{E}_n$	$\bar{O}_{np}$	$\bar{O}_{nq}$	$-\bar{z} \bar{Q}^*$
${}_H\bar{Q}_p^*$	$\bar{O}_{pn}$	$\bar{O}_{pp}$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pp}$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pp}$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{pn}$	$\bar{E}_p$	$\bar{O}_{pq}$	$\bar{O}_{p1}$
${}_H\bar{Q}_q^*$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{O}_{qq}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{O}_{qq}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{O}_{qq}$	$\bar{O}_{qn}$	$\bar{O}_{qp}$	$\bar{E}_q$	$\bar{O}_{q1}$
1	$\bar{O}_{nn}$	$\bar{O}_{lp}$	$\bar{O}_{lq}$	$\bar{O}_{lp}$	$\bar{O}_{lq}$	$\bar{O}_{lp}$	$\bar{O}_{lq}$	$\bar{O}_{ln}$	$\bar{O}_{lp}$	$\bar{O}_{lq}$	1

と、次式で定義される状態量ベクトル

$${}_H\bar{V}(\bar{z}) \equiv \bar{V}(\bar{z}) + \alpha^2 {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{M}_q(\bar{z}) \quad \dots\dots\dots(27)$$

を導入し式(17)_{1~2}を考慮に入れると式(21),(23),(24)は次のように書き改められる。

$${}_H\bar{M}_p(\bar{z}) = \bar{K}_M^p(\bar{z}) {}_H\bar{M}_{p,0} + \bar{K}_q^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_{p,0} + \bar{K}_u^p(\bar{z}) {}_H\bar{U}_{p,0} + \bar{K}_L^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_p^* \quad \dots\dots(28)$$

$${}_H\bar{M}_q(\bar{z}) = \bar{K}_M^q(\bar{z}) {}_H\bar{M}_{q,0} + \bar{K}_q^q(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_{q,0} + \bar{K}_u^q(\bar{z}) {}_H\bar{U}_{q,0} + \bar{K}_L^q(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_q^* \quad \dots\dots(29)$$

$${}_H\bar{U}_p(\bar{z}) = \bar{N}_M^p(\bar{z}) {}_H\bar{M}_{p,0} + \bar{N}_q^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_{p,0} + \bar{N}_u^p(\bar{z}) {}_H\bar{U}_{p,0} + \bar{N}_L^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_p^* \quad \dots\dots(30)$$

$${}_H\bar{U}_q(\bar{z}) = \bar{N}_M^q(\bar{z}) {}_H\bar{M}_{q,0} + \bar{N}_q^q(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_{q,0} + \bar{N}_u^q(\bar{z}) {}_H\bar{U}_{q,0} + \bar{N}_L^q(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_q^* \quad \dots\dots(31)$$

$$\begin{aligned} {}_H\bar{V}(\bar{z}) = & \alpha^2 {}_H\bar{X}_p \bar{L}_M^p(\bar{z}) {}_H\bar{M}_{p,0} + \alpha^2 {}_H\bar{X}_p \bar{L}_q^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_{p,0} \\ & + \alpha^2 {}_H\bar{X}_p \bar{L}_u^p(\bar{z}) {}_H\bar{U}_{p,0} + \alpha^2 {}_H\bar{X}_p \bar{L}_L^p(\bar{z}) {}_H\bar{Q}_p^* \\ & + \gamma \bar{z} \bar{R}^{-1} \bar{Q} - \frac{1}{2} \gamma \bar{z}^2 \bar{R}^{-1} \bar{Q}^* + {}_H\bar{V}_0 + \alpha^2 \bar{z} {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{Q}_{q,0} \\ & - \frac{1}{2} \alpha^2 \bar{z}^2 {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{Q}_q^* \quad \dots\dots(32) \end{aligned}$$

自由量ベクトル $\bar{Q}_0$ の他に新たに自由量列ベクトルとして ${}_H\bar{Q}_{p,0}$, ${}_H\bar{Q}_{q,0}$ が導入されているが、次式

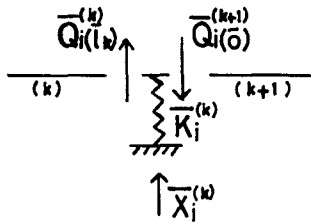
$${}_H\bar{Q}_{p,0} - {}_H\bar{X}_p \bar{Q}_0 = 0 \quad , \quad {}_H\bar{Q}_{q,0} - {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_0 = 0 \quad (33)_{1\sim 2}$$

を拘束条件にすれば、条件式の数に過不足はなくなり、 $\bar{Q}_0$, ${}_H\bar{Q}_{p,0}$, ${}_H\bar{Q}_{q,0}$ を独立な未知量として取り扱える。

式(28)から式(33)_{1~2}までを用いて格間行列を構成すると Table 3 のようになる。

6. 中間隔壁の処理方法

Fig.1 に示すように、中間隔壁とバネ支承との間に存在する力学的挙動の類似性に基いて、格間の境界における中間条件式を以下のようにして求めることができる。



$\bar{K}_i^{(k)}$: 横断面の面内ゆがみを表す変位モード ψ_i
(列ベクトル Ψ の第 i -成分)に対応する第 k 番目の隔壁の剛性

$\bar{X}_i^{(k)}$: 上記の変位モードのよって第 k 番目の隔壁の縁に生ずるせん断流から構成される面内方向の一般化断面力

Fig.1 Beam on Elastic Support
Analogy

横断面のゆがみを表す面内変位モード ψ_i ($i=1, \dots, r$)と剛体としての面内変位モード ψ_j ($j=1, \dots, s$)とに対してそれぞれの関係式が成り立つ。ただし、 $n = r + s$ である。

$$\bar{Q}_i^{(k+1)}(\bar{\omega}) = \bar{Q}_i^{(k)}(\bar{\omega}) + \bar{X}_i^{(k)}(\bar{\omega}) = \bar{Q}_i^{(k)}(\bar{\omega}) + \bar{K}_i^{(k)} \bar{V}_i^{(k)}(\bar{\omega}) \quad (i=1, \dots, r) \quad \dots\dots(34)$$

$$\bar{Q}_j^{(k+1)}(\bar{\omega}) = \bar{Q}_j^{(k)}(\bar{\omega}) \quad (j=1, \dots, s) \quad \dots\dots(35)$$

そこで、隔壁の剛性を成分とする次の行列

$$\bar{S}^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c} \text{diag}(\bar{K}_i^{(k)}) & \begin{matrix} -\bar{O}_{rs} \\ -\bar{O}_{ss} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \bar{O}_{sr} \\ \bar{O}_{ss} \end{matrix} & \end{array} \right] \quad (i=1, \dots, r) \quad \dots\dots\dots(36)$$

を導入して式(34),(35)を行列表示すると次のようになる。

$$\bar{Q}_{\bar{\omega}}^{(k+1)} = \bar{Q}(\bar{x}_k)^{(k)} + \bar{S}^{(k)} \bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} \dots\dots\dots(37)$$

次に、式(27)より得られる関係式 $\bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} = {}_H\bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} - {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{M}_q(\bar{x}_k)^{(k)}$ を式(37)に代入すると次式を得る。

$$\bar{Q}_{\bar{\omega}}^{(k+1)} = \bar{S}^{(k)} {}_H\bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} - \bar{S}^{(k)} {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{M}_q(\bar{x}_k)^{(k)} + \bar{Q}(\bar{x}_k)^{(k)} \dots\dots\dots(38)$$

さらに、次の関係式

$${}_H\bar{M}_q(\bar{\omega})^{(k+1)} = {}_H\bar{M}_q(\bar{x}_k)^{(k)}, \quad \bar{V}_{\bar{\omega}}^{(k+1)} = \bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} \dots\dots\dots(39) \quad 1 \sim 2$$

に注意すると式(27)より次の関係式を得る。

$${}_H\bar{V}_{\bar{\omega}}^{(k+1)} = {}_H\bar{V}(\bar{x}_k)^{(k)} \dots\dots\dots(40)$$

式(38),(39),(40)に注意すると隔壁の取り付け位置における格点行列を構成することができる。

なお、中間隔壁の剛性の算定方法については文献 5)を参照されたい。

7. 格間行列の処理方法と制約条件

本法によれば、格間行列の乗算を繰り返しても、添字 q の付いた状態量列ベクトルと添字 p の付いた状態量列ベクトルとを分離して取り扱うことができる。添字 q の付いた状態量列ベクトルを $\bar{Y}_q$ とし、双曲線関数項からなる対応する格間行列を $\bar{F}_q$ とすれば、格間長 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ に対して

$$\bar{Y}_{q,k} = \bar{F}_q(\bar{x}_1) \bar{F}_q(\bar{x}_2) \dots \bar{F}_q(\bar{x}_k) \bar{Y}_{q,0} = \bar{F}_q(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_k) \bar{Y}_{q,0} \dots\dots(41)$$

が成立することは確認済である。そこで、 $Ch_q(\bar{x})^{-1} = \text{diag}(\cosh^{-1} \bar{\omega}_j \bar{x})$ 、ただし、 $\bar{\omega}_j \neq 0$ ($j=1, \dots, q$) で定義される対角行列を導入して中井の方法³⁾を応用すれば、格間行列を単位化することができて数値計算を実施する上での困難を回避することができる。なお、上述の格点行列を取り入れた桁全体の計算方式については現在研究中である。次に、始端の理想化された境界条件 自由端: $\bar{M}_0 = \bar{0}, \bar{Q}_0 = \bar{0}$ 固定端: $\bar{U}_0 = \bar{0}, \bar{V}_0 = \bar{0}$ 、回転端: $\bar{M}_0 = \bar{0}, \bar{V}_0 = \bar{0}$ に対して式(28)_{1~3}、(27)、(32)を考慮に入れると、新しい状態量列ベクトルに関する制約条件は Table 4 のようになる。

Table-4 Restrained Conditions

支持条件	制 約 条 件	自 由 量
自由端 ——	${}_H\bar{M}_{p,0} = 0, {}_H\bar{M}_{q,0} = 0$ ${}_H\bar{Q}_{p,0} = 0, {}_H\bar{Q}_{q,0} = 0$ $\bar{Q}_0 = 0$	${}_H\bar{U}_{p,0}, {}_H\bar{U}_{q,0}, {}_H\bar{V}_0$
固定端 ≡——	${}_H\bar{U}_{p,0} = 0, {}_H\bar{U}_{q,0} = 0$ ${}_H\bar{V}_0 = \alpha^2 {}_H\bar{X}_q \bar{Q}_q^{-2} {}_H\bar{M}_{q,0}$	${}_H\bar{M}_{p,0}, {}_H\bar{M}_{q,0}$ ${}_H\bar{Q}_{p,0}, {}_H\bar{Q}_{q,0}, \bar{Q}_0$
回転端 △——	${}_H\bar{M}_{p,0} = 0, {}_H\bar{M}_{q,0} = 0$ ${}_H\bar{V} = 0$	${}_H\bar{U}_{p,0}, {}_H\bar{U}_{q,0}$ ${}_H\bar{Q}_{p,0}, {}_H\bar{Q}_{q,0}, \bar{Q}_0$

8. 計算結果

本解法を Fig-2 示す等断面の構造モデルに適用して数値計算を行った。横断面の対称及び逆対称ゆがみに関連する面外方向の一般化断面力 $\bar{M}_1$ (2), $\bar{M}_2$ (2) の桁軸方向分布を Fig-3 に、同じく一般化変位 $\bar{v}_1$ (2), $\bar{v}_2$ (2) の桁軸方向分布を Fig-4 に示す。なお、横断面の対称並びに逆対称の変位モードの算定方法については文献 5) を参照されたい。

この計算結果は、応力法による計算結果と一致しており、本解法によれば還元法による数値計算上の難点である双曲線関数項による桁落ちを防止できることを示している。

変断面桁の場合の格間行列の処理方法については、漸化式に類似のアルゴリズムを開発しているが、別の機会に発表できればと考えている。

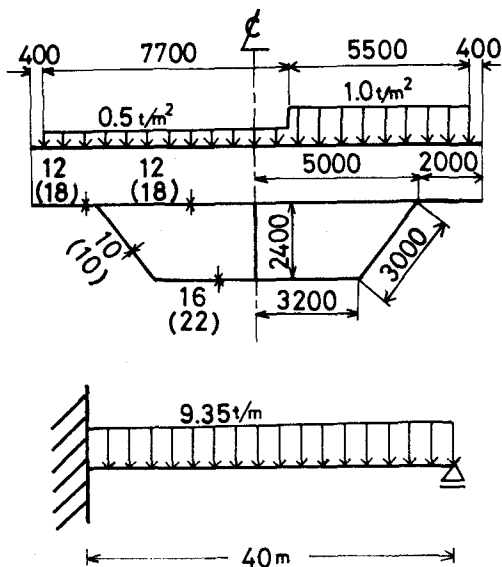


Fig.2 Structural Model

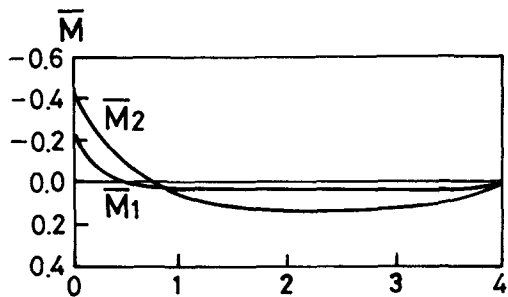


Fig.3 Longitudinal Generalized Forces
Due to Cross-sectional Distorsion

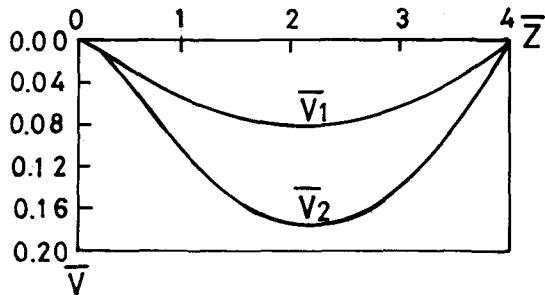


Fig.4 In-plane Generalized Displacement
Due to Cross-sectional Distorsion

参考文献

- 1) 神部他 : 一般化座標法の還元法による定式化, 土木学会第38回年講, I-66, 1983.
- 2) 中谷他 : 還元法による二室断面箱桁の断面変形挙動解析, 土木学会第39回年講, I-18, 1984.
- 3) 中井他 : 伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力, 変形率に関する研究, J. S. C. E., NO. 233, 1975-1
- 4) 神部他 : 多室断面を有する連続箱桁の一般化座標法によるマトリックス構造解析, 第27回構造工学シンポジウム, 1981-2
- 5) 神部他 : 隔壁の剛性を考慮に入れた二室断面箱桁の解析, 土木学会中国・四国支部第35回学術講演概要集, I-28, 1983