

横つなぎ材の断面補剛効果を考慮した 開断面薄肉ばりの解析

ANALYSIS OF THIN-WALLED OPEN SECTION BEAM CONSIDERING
THE STIFFENING EFFECTS OF LATERAL AND SWAY BRACINGS

彦坂 熙*・高海克彦**
By Hiroshi HIKOSAKA and Katsuhiko TAKAMI

So-called secondary members and their attachments to primary components are often found to be the high stressed elements in a thin-walled structure. In this paper the effect of lateral and sway bracings on the elastic behavior of a thin-walled open section beam is investigated. The conventional beam theory is practically modified by considering the cross-sectional distortion, and the governing equation of the problem is derived from the principle of virtual work. An open-section trapezoidal beam is analysed numerically and the stiffening effects of struts and bracings are discussed for design purposes.

1. 緒 言

近年の構造解析法、製作法および架設工法の進歩は、高強度材料の開発と相まって構造物の軽量化、長大化を促進してきたが、これに伴い従来の慣用設計法では確保できない剛性および安全性に関する諸問題を派生させてきた。問題の多くは構造物の補剛設計にかかわるものであったが、それらを最善と考えられる方法で逐次解決し、現行設計法が採用されていることは周知の通りである。

本研究で取り扱う開断面薄肉構造は、各種のプレートガーダー橋をはじめとする主構造系に最も広く用いられる構造形式である。無補剛の薄肉開断面部材は特に剛性が小さいため、断面形の保持・剛性の確保・支承への荷重の円滑な伝達を目的とする対傾構、ストラット、横構などの横つなぎ材の配置が不可欠となる。薄肉開断面はり理論は、これら横つなぎ材が十分に配置され断面形が保持されることを前提として導かれているが、横つなぎ材の応力と補剛効果および横つなぎ材によるはりの局部付加応力は、はりの断面変形を前提としなければ正しく評価できないという矛盾がある。

通常の設計計算において、対傾構・横構は主構造から切り離された平面構造として風荷重・地震荷重等に対して解析されるが、算出される応力が小さいため示方書の細長比制限により設計が決まる場合も多く、2次部材として扱われる。ねじりを受ける薄肉開断面部材において、トラス形式の横構は準閉断面を構成して

* 工博 九州大学教授 工学部土木工学科 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)

** 工修 九州大学助手 工学部土木工学科 (同 上)

ねじり抵抗に寄与するが、この場合も断面剛を仮定する St. Venant のねじり理論が適用され、断面変形は考慮されていない。

最近制定されたカナダ・オンタリオ州の限界状態設計法による道路橋設計規準¹⁾では、実橋における載荷試験データに基づいて、横つなぎ材接合部の疲労設計が重要視されている。わが国でも、ここ数年道路橋の主桁と横つなぎ材の接合部における疲労損傷例がいくつか報告されるようになり、今後も増加する傾向が見られる²⁾。このような損傷原因を究明し効果的な対策を立てるためには、横つなぎ材の慣用設計法を改良し、部材の正しい応力状態を把握することが必要になる。

断面形状の変化が設計上重要な開断面薄肉構造の一つに鋼床版 2 主桁橋がある³⁾。また開断面逆台形桁の断面変形に関して、ストラットの補剛効果を含む折板理論による解析と実験が行われており⁴⁾、現行道路橋示方書にも十分剛な横構・対傾構を配置する必要がある旨、特に解説が加えられている⁵⁾。新しい都市交通システムの一つである懸垂型モノレールの鋼製軌道桁も断面変形の無視できない開断面薄肉構造であり、有限帯板法による解析と大型模型による静的・動的試験が行われている^{6~8)}。

本論文で著者らが提案する方法は、断面変形を無視できない開断面薄肉ばりについて、基本解析は断面剛を仮定するいわゆる曲げねじり理論により行い、断面変形に伴うはりの付加変形、付加応力および横つなぎ材の応力を別途合理的な手法で算出して補正するものである。このとき、あくまで 1 次元のはり理論の修正という立場に立ち、既往の折板理論、有限要素法、有限帯板法のようにはりを 2 次元薄板要素に分解して扱うことをしない。このために、まず任意形断面をもつ開断面薄肉ばりが任意配置の横つなぎ材をもち、任意荷重が作用する場合を対象として、はりの断面変形を考慮したつり合い方程式を導き、次いでそれに基づく解析例を示すことにする。

2. 開断面薄肉ばりの横つなぎ材

図-1 (a) のように N 枚の薄板要素からなる多角形開断面をもつ直線ばりを考え、図心 C を原点とする断面主軸 x , y と図心を連ねるはり軸 z からなる右手系直交座標を定める。 (x, y) 座標とは別に、はり断面上の一点 D を原点とし板厚中心線に一致する曲線座標 s と、その法線方向座標 n を定め、板厚 t は s の関数とする。各板要素の接合線を節線、接合点を節点と呼び、横つなぎ材は任意の 2 節点を結ぶ両端ピンの弾性軸力部材として配置されるものとする。

本研究では、図-1 (b) のように x - y 断面内に複数の横つなぎ材を配置したものを対傾構と呼び、その特例として同図 (a) のような単一横つなぎ材をストラットと称することにする。はり本体と横つなぎ材

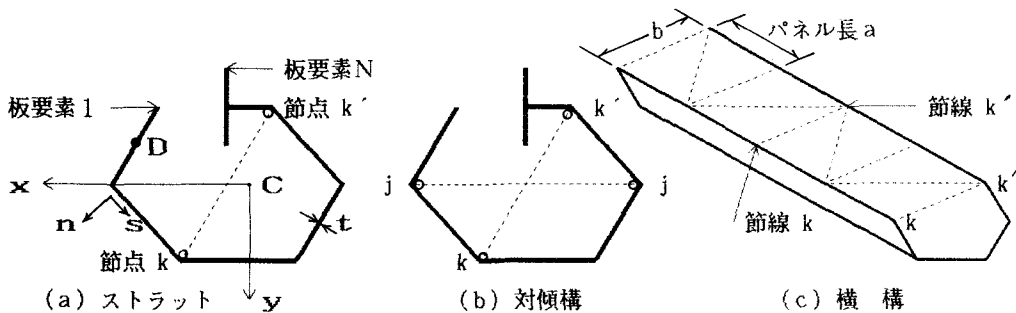


図-1 開断面薄肉ばりの横つなぎ材

の弾性定数（ヤング係数 E およびせん断弾性係数 G ）は等しいものとするが、断面剛を仮定する限り、ストラットと対傾構ははりの力学的性質に影響を及ぼさない。

図-1 (c) のように、2本の節線を含む平面内で斜材と垂直材により組まれたトラス形式の横つなぎ材を横構と呼ぶ。断面剛を仮定するはり理論において、横構はせん断応力のみを受け垂直応力を受けない仮想薄板に置き換えられ、はりの純ねじり剛性を増加させるが、ストラット・対傾構と同じく、はり断面の図心、せん断中心、断面二次モーメント、ねじりの単位そり関数などの幾何学的特性値には影響を与えない⁹⁾。

3. 横つなぎ材をもつはりの断面変形の定義

本論では、はりを構成する板要素の節点が $x-y$ 面内で相対変位を起し横つなぎ材に軸力が生じる状態を、断面変形と定義する。薄肉ばりの断面変形は各板要素の面外曲げを伴うが、図-2の曲線のように、板要素が曲げを生じても節点が $x-y$ 面内相対変位を起さず、したがって横つなぎ材に軸力が生じないものは、二次的な断面変形と考えて本研究では取扱わない。また板要素のはり軸直角方向面内伸縮が断面変形に及ぼす影響も無視できるものと仮定するが、横構を置き換えた仮想薄板の伸縮は当然考慮しなければならない。これらの仮定により、 N 枚の板要素からなる開断面ばりの断面変形の自由度は $N-3$ となる¹⁰⁾。ただし、図-1 (a) の板要素 N のように板の中間に節線がある場合は、その板要素の少なくとも一端は自由端でなければならない。 $N-3$ 個の断面変形は、図-3のように板要素 $i+2$ に対して板要素 $i+1$ が反時計回りになす相対回転角 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-3$)で定義される。

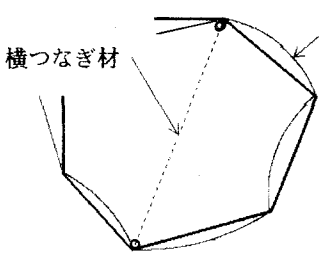


図-2 二次的断面変形

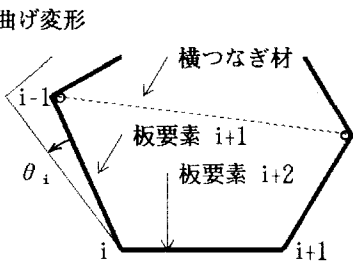


図-3 断面変形 θ_i の定義

4. 断面変形の変位場とひずみ場

(1) 初期変位と初期応力

断面剛を仮定するはりの曲げねじり理論による任意断面の変位は、せん断中心 $S(x_s, y_s)$ の x, y 方向変位 u_{s0}, v_{s0} およびねじれ角 ϕ 。の3つの $x-y$ 面内自由度と、図心 C の z 軸方向変位 w_{c0} の都合4自由度で表わされ、本論ではこれらを既知の初期変位と呼ぶ。横つなぎ材のうちストラットと対傾構はこれらの変位に影響を及ぼさないが、横構は力学的性質がこれに等価な板厚 t^* の仮想薄板に置き換えられ、準開断面を構成して St. Venant のねじり剛性を増加させる効果が考慮されているものとする。

初期変位によるひずみとして、曲げねじり理論では z 軸方向の垂直ひずみ ε_{z0} と St. Venant のねじりによるせん断ひずみ γ 。のみを考え、他のすべてのひずみ成分は無視される。このひずみに対応する垂直応力 σ_{z0} とせん断応力 τ 。を断面変形問題の初期応力と呼ぶ。すなわち、

$$\sigma_{z0} = E \varepsilon_{z0}, \quad \tau = G \gamma. \tag{1}$$

(2) 断面変形に伴う付加変位

はりが3. で定義した $N-3$ 個の相対回転角 θ_i を生じる断面変形状態においては、断面剛を仮定して

得られた既知の初期変位成分にも変化が生じ、それぞれ $u_{s0}+u_s$, $v_{s0}+v_s$, $w_{c0}+w_c$, $\phi_0+\phi$ に修正されるものと仮定する。修正すべき未知量 u_s , v_s , w_c , ϕ を断面変形に伴う付加変位成分と呼ぶ。

図-4の薄肉開断面をもつはりにおいて、節点 i の座標を (x_i, y_i) 、その s 座標を s_i とするとき、断面変形に伴う任意点 $P(x, y)$ の x, y 方向付加変位 u, v は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y-y_s)\phi - \sum_{i=1}^{N-3} (y-y_i)\mu_i\theta_i \\ v &= v_s + (x-x_s)\phi + \sum_{i=1}^{N-3} (x-x_i)\mu_i\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $\mu_i(s) = \begin{cases} 1 & (s \leq s_i) \\ 0 & (s > s_i) \end{cases}$

ここで、次の方向余弦を定義する。

$$\ell = \cos(x, n) = \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad m = \cos(y, n) = \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \quad (3)$$

式(3)を用いて、式(2)の u, v を n, s 方向の付加変位成分 ξ, η に変換すれば、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u_s \ell + v_s m - h_s \phi - \sum_{i=1}^{N-3} r_{si} \mu_i \theta_i \\ \eta &= -u_s m + v_s \ell + h_n \phi + \sum_{i=1}^{N-3} r_{ni} \mu_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\text{ここに} \quad h_n = (x-x_s)\ell + (y-y_s)m, \quad h_s = -(x-x_s)m + (y-y_s)\ell \quad (5)$$

$$r_{ni} = (x-x_i)\ell + (y-y_i)m, \quad r_{si} = -(x-x_i)m + (y-y_i)\ell \quad (6)$$

h_n, h_s はせん断中心 S から点 P に引いた位置ベクトルの n, s 方向成分、また r_{ni}, r_{si} は節点 i から点 P に引いた位置ベクトルの n, s 方向成分を表わす。

さて、はりを構成する薄板の中央面内せん断ひずみ γ_{zs} は、次式で表わされる。

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (7)$$

上式に式(4)の η を代入すれば次式を得る。

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \gamma_{zs} + u'_s m - v'_s \ell - h_n \phi' - \sum_{i=1}^{N-3} r_{ni} \mu_i \theta'_i \quad (8)$$

ここに、 $(\quad)'$ は z に関する微係数を表わす。

周知のように、薄肉開断面ばりの曲げおよびねじり問題において γ_{zs} が w に及ぼす影響は無視される。本題の横構をもつ開断面ばりは準閉断面ばりとして挙動し、ねじりによるせん断流 q^* を生じるが、 q^* によるせん断変形はせん断剛性の小さい横構(仮想薄板)にのみ生じ、はり本体を構成する板要素中央面の γ_{zs} はやはり無視できる⁹⁾。したがって、式(3)を考慮のうえ式(8)を s について積分すれば、次式を得る。

$$w = w_c - xu'_s - yv'_s + \omega(s)\phi' + \sum_{i=1}^{N-3} \phi_i(s)\theta'_i \quad (9)$$

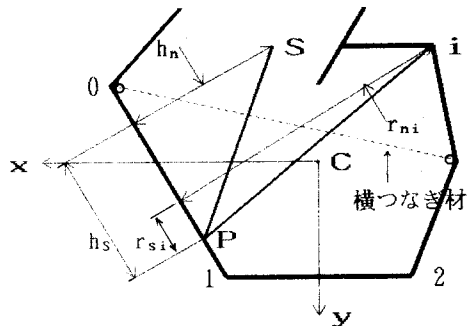


図-4 断面の幾何学的特性

ここに、 w_c は図心の w の値、また $\omega(s)$ と $\phi_i(s)$ はそれぞれ次式により与えられるねじりの単位そり関数および断面変形のそり関数である。すなわち、

$$\omega(s) = \bar{\omega}(s) - \bar{\omega}(s_c), \quad \bar{\omega}(s) = \int_s^{s_s} h_n ds \quad (10)$$

$$\phi_i(s) = \bar{\phi}_i(s) - \bar{\phi}_i(s_c), \quad \bar{\phi}_i(s) = \int_s^{s_i} r_{ni} \mu_i ds \quad (11)$$

ただし、 s_c および s_s はそれぞれ図心 C およびせん断中心 S の s 座標値を表す。点 C および S がはり断面上にない場合には、板厚 0 の仮想薄板ではりに結合されていると考えればよい¹¹⁾。なお周知のように、 s 座標の原点 D とせん断中心 S の位置は、次の断面積分式を満足するように定められる。

$$\int_A \omega dA = 0, \quad \int_A \omega x dA = 0, \quad \int_A \omega y dA = 0 \quad (12)$$

(3) 断面変形に伴うはりの付加ひずみ

断面変形に伴うはりの z 軸方向付加垂直ひずみ ε_z は、式 (9) より次のように表わされる。

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w'_c - xu''_s - yv''_s + \omega \phi'' + \sum_{i=1}^{N-3} \phi_i \theta''_i \quad (13)$$

はりの付加せん断ひずみは、St. Venant のねじりに対応する τ_{zs} 成分のみを考える。すなわち、

$$\tau_{zs} = 2n\phi' \quad (14)$$

5. 断面変形に伴う付加応力

(1) はりの z 軸方向付加垂直応力

式 (13) のひずみに対応するはりの z 軸方向垂直応力 σ_z が、次式で表わされる。

$$\sigma_z = E (w'_c - xu''_s - yv''_s + \omega \phi'' + \sum_{i=1}^{N-3} \phi_i \theta''_i) \quad (15)$$

しかるに、式 (1) の初期応力による断面力が既に外力とのつり合い条件を満たしているゆえ、付加応力は自己平衡でなければならず、次の各式が成立することになる。

$$\int_A \sigma_z dA = 0, \quad \int_A \sigma_{zy} dA = 0, \quad \int_A \sigma_{zx} dA = 0, \quad \int_A \sigma_z \omega dA = 0 \quad (16)$$

本題の開断面薄肉はりでは周知のように St. Venant のねじりモーメントがそりねじりモーメントに比べて無視できるゆえ、式 (16) の第 4 式により断面の付加ねじりモーメントが 0 なる自己平衡条件が満たされる。 x 、 y 軸が主軸であること、および式 (12) を考慮すれば、上式より w_c 、 u_s 、 v_s 、 ϕ と θ_i との次の関係が得られる。

$$w'_c = \sum_{i=1}^{N-3} \left\{ \bar{\phi}_i(s_c) - \frac{H_{io}}{A} \right\} \theta''_i, \quad u''_s = \sum_{i=1}^{N-3} \frac{H_{iy}}{I_y} \theta''_i, \quad v''_s = \sum_{i=1}^{N-3} \frac{H_{ix}}{I_x} \theta''_i, \quad \phi'' = - \sum_{i=1}^{N-3} \frac{H_{iw}}{I_w} \theta''_i \quad (17)$$

ここに、

$$A = \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_w = \int_A \omega^2 dA \quad (18)$$

$$H_{io} = \int_A \bar{\phi}_i dA, \quad H_{ix} = \int_A \bar{\phi}_i y dA, \quad H_{iy} = \int_A \bar{\phi}_i x dA, \quad H_{iw} = \int_A \bar{\phi}_i \omega dA \quad (19)$$

式 (17) を式 (15) に代入して整理すれば、付加応力 σ_z が次のように θ_i のみで表わされることになる。

$$\sigma_z = E \sum_{i=1}^{N-3} \Psi_i \theta''_i \quad (20)$$

$$\text{ここに} \quad \Psi_i = \bar{\phi}_i - \frac{H_{io}}{A} - \frac{H_{iy}}{I_y} x - \frac{H_{ix}}{I_x} y - \frac{H_{iw}}{I_w} \omega \quad (21)$$

(2) はり軸直角方向曲げモーメント

はりの任意断面 z において切り出される単位幅 $dz=1$ の多角形フレームを、図-5 のように N 本の部材からなるラーメンと見なす。断面変形に伴って生じるはり軸直角方向の内力として、このラーメンの曲げモーメント M_s による曲げ応力 σ_s のみを考え、軸力とせん断力の影響は無視する。断面変形 θ_i ($i=1, 2, \dots, N-3$) による M_s は次式で表わされる。

$$M_s = \sum_{i=1}^{N-3} M_i \theta_i \quad (22)$$

ここに、 M_i は単位の断面変形 $\theta_i=1$ のみによりラーメンに生じる曲げモーメントである。すなわち、部材 $2 \sim i+1$ の部材回転角を全て -1 、部材 $i+2 \sim N-1$ の部材回転角を 0 とした図-5 の曲線の变形状態に対して、つり合い条件式を解くことにより M_i が決定される。端部材 1 および N の M_i は 0 である。 M_i の算定に必要なラーメンの曲げ剛性は EI_s ($I_s=t^3/12$) で与えられる。

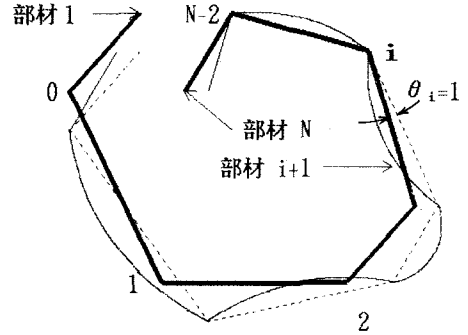


図-5 はりの横方向曲げ変形

(3) ストラットおよび対傾構の応力

図-6 のように、ストラットまたは対傾構の1部材が $z=z_b$ における $x-y$ 面内の任意の2節点 k, k' ($k < k'$) を結んで配置されるものとし、その部材長を b 、断面積を A_b とする。この部材に任意節点から下した垂線の長さを r_{ni}^* とすれば、断面変形による部材の伸び Δb は節点 k, k' 間の部材方向の相対変位として、次式で表わされる。

$$\Delta b = \sum_{i=1}^{N-3} r_{ni}^* \theta_i(z_b) \quad (23)$$

ただし、 r_{ni}^* は $k < i < k'$ のときのみ定義され、 $i \leq k$ または $i \geq k'$ のときは $r_{ni}^*=0$ となる。式(23)の伸びによるストラットまたは対傾構部材の軸力 N_b は、

$$N_b = \frac{EA_b}{b} \sum_{i=1}^{N-3} r_{ni}^* \theta_i(z_b) \quad (24)$$

図-7 のように対傾構が中間にピン節点 j をもつ場合は、各部材の軸力を表わすために断面変形 $\theta_i(z_b)$

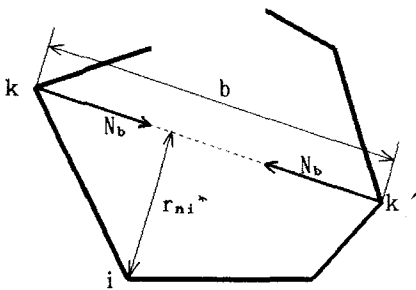


図-6 ストラット・対傾構部材の軸力

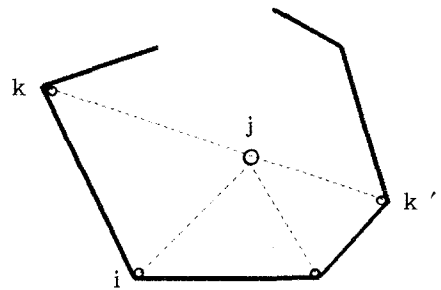


図-7 中間ピン節点をもつ対傾構

6. つり合い方程式と境界条件

(1) 仮想仕事方程式

はりに働く外力として、はりの単位表面積当りに作用する力 $\mathbf{p}$ と、はりの両端断面 ($z = 0, L$) の単位表面積当りに作用する $\bar{\mathbf{p}}$ とを考え、それぞれ n, s, z 方向成分を用いて次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= p_n \cdot \mathbf{i}_n + p_s \cdot \mathbf{i}_s + p_z \cdot \mathbf{i}_z \\ \bar{\mathbf{p}} &= \bar{p}_n \cdot \mathbf{i}_n + \bar{p}_s \cdot \mathbf{i}_s + \bar{p}_z \cdot \mathbf{i}_z \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ここに、 $\mathbf{i}_n, \mathbf{i}_s, \mathbf{i}_z$ はそれぞれ n, s, z 方向の単位ベクトルである。

式(30)の外力を受けて断面変形を生じたはりの内力は、既知の初期応力と未知の付加応力の和となる。ただし、はりの軸直角方向 (s 方向) の初期直応力とストラット・対傾構の初期応力は 0 であり、横構を置き換えた仮想薄板の初期応力は St. Venant のねじりによるせん断応力のみが生じる。したがって、断面変形時の外力と内力のつり合い条件が、次の仮想仕事方程式で表わされる。

$$\int_0^L \int_S \int_n \{ (\sigma_{z0} + \sigma_z) \delta \varepsilon_z + \sigma_s \delta \varepsilon_s + (\tau_{z0} + \tau_{zs}) \delta \gamma_{zs} \} dn ds dz + \sum_z \sum_b N_b \delta (\Delta b) - \int_0^L \int_S (p_n \delta \xi + p_s \delta \eta + p_z \delta w) ds dz - [n_z \int_A (\bar{p}_n \delta \xi + \bar{p}_s \delta \eta + \bar{p}_z \delta w) dA]_0^L = 0 \quad (31)$$

ここに、 δ は変分記号、 $\int_n (\cdot) dn = \int_{-t/2}^{t/2} (\cdot) dn$ 、 $\int_S (\cdot) ds$ は仮想薄板 (横構) を含む断面全体についての s による積分、 $\sum_z$ はストラットまたは対傾構が配置される断面数についての総和、 $\sum_b$ は一断面における

対傾構の部材本数についての総和、また $n_z = \begin{cases} -1 & (z = 0) \\ 1 & (z = L) \end{cases}$ 。

しかるに、式(31)中の仮想変位と仮想ひずみのうち、断面剛の仮定を満足する成分を $\delta \bar{\xi}, \delta \bar{\eta}, \delta \bar{w}, \delta \bar{\varepsilon}_z, \delta \bar{\gamma}_{zs}$ とすれば、初期応力と外力に関する次の仮想仕事方程式が成立する。

$$\int_0^L \int_S \int_n (\sigma_{z0} \delta \bar{\varepsilon}_z + \tau_{z0} \delta \bar{\gamma}_{zs}) dn ds dz - \int_0^L \int_S (p_n \delta \bar{\xi} + p_s \delta \bar{\eta} + p_z \delta \bar{w}) ds dz - [n_z \int_A (\bar{p}_n \delta \bar{\xi} + \bar{p}_s \delta \bar{\eta} + \bar{p}_z \delta \bar{w}) dA]_0^L = 0 \quad (32)$$

式(31)から(32)を引けば、横つなぎ材をもつ開断面薄肉ばりの断面変形挙動を支配する次の仮想仕事方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_S \int_n \left\{ \sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_s \delta \varepsilon_s + \tau_{zs} \delta \gamma_{zs} + \sum_{i=1}^{N-3} (\sigma_{z0} \phi_i \delta \theta_i'' + \frac{2\Omega_i}{bt^*} q_0^* \delta \theta_i') \right\} dn ds dz \\ & + \sum_z \sum_b N_b \delta (\Delta b) - \sum_{i=1}^{N-3} \int_0^L \int_S \{ (p_s r_{ni} - p_n r_{si}) \mu_i \delta \theta_i + p_z \phi_i \delta \theta_i' \} ds dz \\ & - \sum_{i=1}^{N-3} [n_z \int_A \{ (\bar{p}_s r_{ni} - \bar{p}_n r_{si}) \mu_i \delta \theta_i + \bar{p}_z \phi_i \delta \theta_i' \} dA]_0^L = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、 q_0^* は St. Venant のねじりにより仮想薄板 (横構) に生じる初期せん断流を表わす。

ここで、はりの単位表面積当りに作用する式(30)の外力 $\mathbf{p}$ に関して、はり軸単位長さ当りの次の合力を定義する。

$$m_{zi} = \int_S (p_s r_{ni} - p_n r_{si}) \mu_i ds, \quad m_{wi} = \int_S p_z \phi_i ds \quad (34)$$

また、はりの両端断面に作用する外力 $\bar{\mathbf{p}}$ の合力を、次式で定義する。

$$\bar{T}_i = \int_A (\bar{p}_s r_{ni} - \bar{p}_n r_{si}) \mu_i dA, \quad \bar{M}_{wi} = \int_A \bar{p}_z \phi_i dA \quad (35)$$

初期応力 σ_{zo} および曲げとそりねじりに伴う初期せん断流 q_0 に関しても、次の断面力を定義する。

$$M_{0i} = \int_s \int_n \sigma_{zo} \psi_i \, dn \, ds, \quad T_{0i} = \int_s q_0 r_{ni} \mu_i \, ds \quad (36)$$

上の m_{wi} , M_{0i} , T_{0i} の間には、次の関係が成り立つ。

$$T_{0i} = -M'_{0i} - m_{wi} \quad (37)$$

さて、式(33)の内力の仮想仕事の各項は次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L \int_s \int_n (\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sum_{i=1}^{N-3} \sigma_{zo} \psi_i \delta \theta'_i) \, dn \, ds \, dz &= \sum_{i=1}^{N-3} \int_0^L (M_{wi} + M_{0i}) \delta \theta'_i \, dz \\ \int_0^L \int_s \int_n \sigma_s \delta \varepsilon_s \, dn \, ds \, dz &= \sum_{i=1}^{N-3} \int_0^L (F_{si} + F_{si}^*) \delta \theta_i \, dz \\ \int_0^L \int_s \int_n (\tau_{zs} \delta \gamma_{zs} + \sum_{i=1}^{N-3} \frac{2\Omega_i}{b t^*} q_0^* \delta \theta'_i) \, dn \, ds \, dz &= \sum_{i=1}^{N-3} \int_0^L 2\Omega_i (q^* + q_0^*) \delta \theta'_i \, dz \\ \sum_b \sum_z N_b \delta(\Delta b) &= \sum_{i=1}^{N-3} \sum_z K_i^* \delta \theta_i(z_b) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} M_{wi} &= \sum_{j=1}^{N-3} EI_{ij} \theta''_j, & I_{ij} &= \int_A \Psi_i \Psi_j \, dA \\ F_{si} &= \sum_{j=1}^{N-3} f_{ij} \theta_j, & f_{ij} &= \int_s \frac{M_i M_j}{EI_s} \, ds \\ F_{si}^* &= \sum_{j=1}^{N-3} f_{ij}^* \theta_j, & f_{ij}^* &= \frac{E^* t^*}{b} r_{ni} r_{nj}^* \\ K_i^* &= \sum_{j=1}^{N-3} k_{ij}^* \theta_j(z_b), & k_{ij}^* &= \sum_b \frac{EA_b}{b} r_{ni}^* r_{nj}^* \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式(33)に式(34)～(39)の関係をういたうえ部分積分を施せば、横つなぎ材をもつ開断面薄肉ばりのつり合い条件と境界条件に等価な仮想仕事方程式が、結局次式で表わされることになる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L (M''_{wi} + F_{si} + F_{si}^* - 2\Omega_i q_0^* - 2\Omega_i q_0'^* - T'_{0i} - m_{zi}) \delta \theta_i \, dz + \sum_z K_i^* \delta \theta_i(z_b) \\ & + [(M_{wi} + M_{0i} - n_z \bar{M}_{wi}) \delta \theta'_i - (M'_{wi} - T_{0i} - 2\Omega_i q^* - 2\Omega_i q_0^* + n_z \bar{T}_i) \delta \theta_i]_0^L = 0 \\ & \quad (i = 1, 2, \dots, N-3) \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)に式(27), (39)を代入して整理すれば、変位で表わしたつり合い方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[\sum_{j=1}^{N-3} \left\{ EI_{ij} \theta'''_j - G \frac{4\Omega_i \Omega_j^*}{b t^*} \theta''_j + (f_{ij} + f_{ij}^*) \theta_j \right\} - 2\Omega_i q_0'^* - T'_{0i} - m_{zi} \right] \delta \theta_i \, dz \\ & + \sum_z \sum_{j=1}^{N-3} k_{ij}^* \theta_j(z_b) \delta \theta_i(z_b) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N-3) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{ただし} \quad \Omega_j^* = \Omega_j - \Omega \frac{H_{iw}}{I_w} \quad (42)$$

(2) 横つなぎ材をもたないはりの断面変形のつり合い方程式

横構、対傾構、ストラット等の横つなぎ材を一切もたない開断面薄肉ばりでは、式(41)中の肩記号 * のついた項がすべて消え、その断面変形挙動を支配するつり合い条件式が次の微分方程式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^{N-3} (EI_{ij} \theta'''_j + f_{ij} \theta_j) - T'_{0i} - m_{zi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-3) \quad (43)$$

7. 数値計算例

(1) 解析モデルの諸元と作用荷重

以上の定式化に基づき、図-10の諸元をもつ鋼製逆台形開断面単純ばり⁴⁾を対象として数値計算を行った。はりの支点では、剛な端対傾構またはダイヤフラムにより断面変形が拘束されるものとする。中間横つなぎ材として断面積 $A_b = 250\text{mm}^2$ のストラットを、スパン $L = 15\text{m}$ の ν 等分点に間隔 $\lambda = L/\nu$ で配置し、 ν をパラメーターとして変化させる。

荷重は、左右の上フランジと腹板の交点に $p/2 = 0.5\text{ tf/m}$ (4.9 kN/m) ずつの満載等分布荷重、または断面 $z = 0.4L$ において $P/2 = 5\text{ tf}$ (49 kN) ずつの集中荷重を、それぞれ鉛直に作用させる。ただし、後出図-12の影響線のみは単位集中荷重 $P = 1\text{ tf}$ に対するものである。

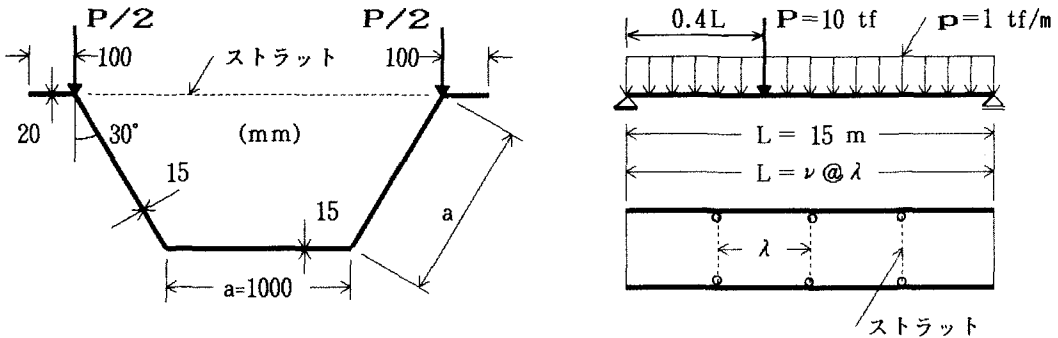


図-10 ストラットを有する逆台形開断面ばり

(2) 計算法

ここに取り扱う逆台形断面は $N = 5$ 枚の薄板から構成されるので、断面変形の自由度は $N - 3 = 2$ となるが、断面形状と荷重の対称性より図-11の対称断面変形 θ のみを考えればよい。 θ に関する仮想仕事方程式は次式で与えられる。

$$\int_0^L (EI_{11} \theta'''' + f_{11} \theta - T'_{01} - m_{z1}) \delta \theta dz + \sum_z k^* \theta(z_b) \delta \theta(z_b) = 0 \quad (44)$$

いま、はり端では断面変形 θ が拘束され、かつ式(20)の付加応力 σ_z が0であるから、境界条件 $\theta = \theta'' = 0$ ($z = 0, L$) を満足する $\theta(z)$ を次式で仮定する。

$$\theta(z) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \frac{i\pi}{L} z$$

式(44)を用いて上式の未定係数 A_i を Rayleigh-Ritz 法により決定し、得られた θ を式(20)、(24)に用いれば、はりおよび横つなぎ材の応力が算定されることになる。

(3) 結果および考察

図-12は、ストラットを 1, 3, 5, 7 本 (それぞれ $\nu = 2, 4, 6, 8$) に増加させた場合の、スパン中央のストラットの軸力影響線をプロットしたものであり、移動荷重によりスト

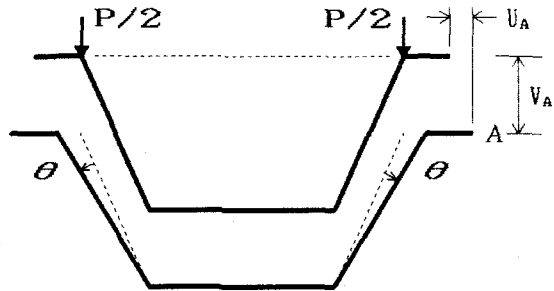


図-11 対称断面変形

ラットには正負の周期的交番軸力が作用することがわかる。影響線面積から明らかなように満載等分布荷重によるストラットの引張力の値はストラット間隔 $\lambda (=L/\nu)$ にほぼ比例するが、影響線の最大値は ν によらず一定である。

このはりの断面変形の影響は、図-11に示す上フランジ自由端Aの水平変位 U_A 、鉛直変位(初期変位 V_{A0} と付加変位 V_A の和) V_A およびそれに伴う z 軸方向垂直応力(初期応力 σ_{z0} と付加応力 σ_z の和) σ_A に現れる。図-13、14は、 ν をパラメーターとして等分布荷重に対する U_A 、 V_A 、 σ_A のスパン方向変化を示したものであり、 $\nu=8$ (ストラット本数7)以上にになれば断面変形は防止され、断面剛のはり理論による変形にほぼ等しくなっている。しかし応力 σ_A にはストラットの拘束に起因する圧縮付加応力が顕著に現れ、スパン中央点の σ_A は $\nu=8$ でもなおはり理論による曲げ応力の1.5倍に達していることに、注意を要する。

集中荷重については、これをストラット取付け断面に載荷する限り断面変形はほとんど生じないが、本例のようにストラットのない断面($z=0.4L$)に載荷する場合には、当然載荷点の局部付加応力が著しく大きくなる。図-15、16に水平変位 U_A 、応力 σ_A のスパン方向変化を示すが、ストラットの拘束によるスパン中央点の応力も載荷点のそれにほぼ匹敵する大きな値となっている。

なお、この解析モデルには対傾構を配置していないが、本例の1自由度断面変形問題において対傾構は式(44)の係数 k^* を割増す効果を与え、ストラットの断面積を増加させることに等価である。

8. 結 語

対傾構、ストラット、横構等の横つなぎ材により補剛された開断面薄肉ばりが任意荷重の作用を受ける場合について、はりの断面変形を考慮した静的挙動の支配方程式を導き、それに基づく数値計算例を提示した。

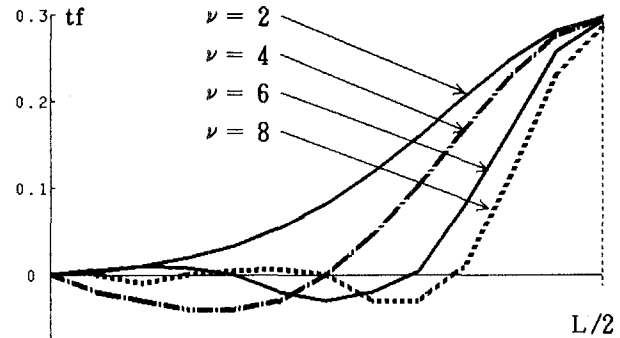


図-12 スパン中央ストラットの軸力影響線

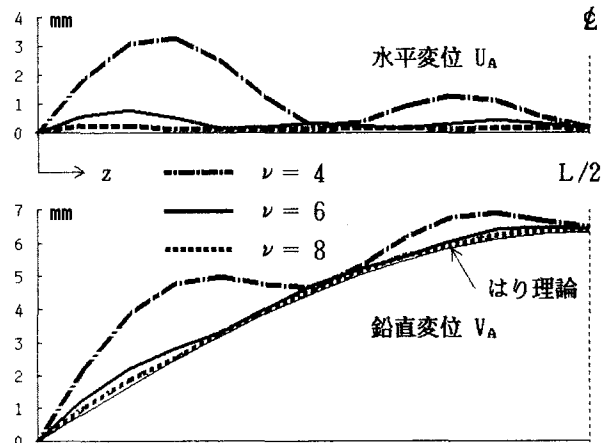


図-13 上フランジ自由端の変位(等分布荷重)

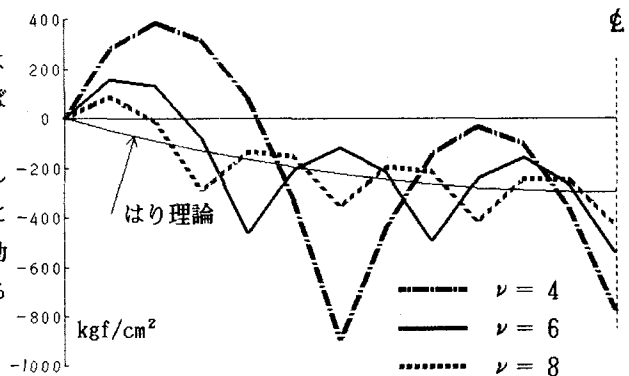


図-14 上フランジ自由端の応力 σ_A (等分布荷重)

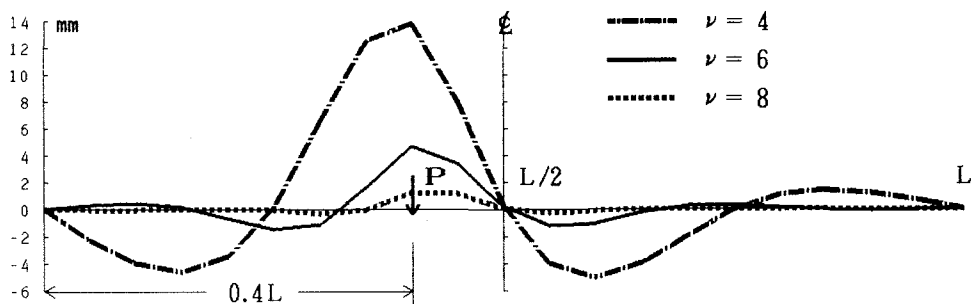


図-15 上フランジ自由端の水平変位 U_A (集中荷重 $P=10$ tf)

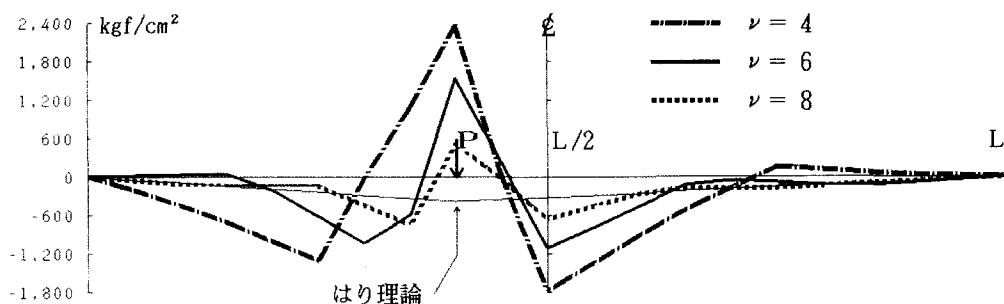


図-16 上フランジ自由端の応力 σ_A (集中荷重 $P=10$ tf)

本解析の特徴は、断面剛を仮定したはり理論による既知の応力を断面変形問題の外力（初期応力）として、またはりを構成する板要素間の相対回転角を未知変位としてそれぞれ取り扱い、はり理論に準じた1次元解析により横つなぎ材とはりのすべての変形と応力を求めうるようにした点にある。ここに示した簡単な計算例により、逆台形開断面ばりでは横つなぎ材により断面変形が防止されても、横つなぎ材の拘束により、その接合部付近のフランジに無視できない付加応力の生じることが認められた。本法により、必ずしも2次部材として軽視できない開断面薄肉ばりの横つなぎ材の応力状態を、合理的かつ比較的簡易な解析により把握でき、はりと横つなぎ材の接合部の応力状態が明確になれば、近年問題となっている疲労設計の対象にすることも可能になる。

本論文は微小変位弾性論に基づく静的解析のみを対象としているが、本手法は横つなぎ材をもつ薄肉ばりの断面変形を考慮した振動および座屈問題にも拡張応用が可能である。

参 考 文 献

- 1) Ministry of Transportation and Communications, Ontario : Ontario Highway Bridge Design Code 1983.
- 2) 建設省土木研究所 : 共和高架橋載荷試験報告書, 土木研究所資料 第2123号, 1984年6月.
- 3) 加藤隆夫ほか : 横リブの変形に伴う二主桁橋の応力度について, 第34回土木学会全国大会講演集, I -76, pp. 151~152, 1979年10月.

- 4) 奥村敏恵・鈴木康弘 : 剛結合折板構造理論と台形桁への応用, 土木学会論文集, 第 154号, pp. 1 ~ 14, 1968年 6 月.
- 5) 日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説 II 鋼橋編, p. 101, 1980年 2 月.
- 6) T. Yamasaki, T. Yano and H. Hikosaka : Curved Steel Guideway for Suspended Monorail System, Final Report of 11th IABSE Congress, Vienna, pp. 351~356, Oct. 1980.
- 7) 山崎徳也・川井 豊 : 懸垂型モノレール軌道桁補剛フレームの疲労特性, 土木学会論文報告集, 第 333 号, pp. 81~90, 1983年 5 月.
- 8) 笠井隆寿ほか : 懸垂型モノレール軌道げた強度計測, 三菱重工技報, Vol. 7, No. 5, pp. 89 ~99, 1970年 9 月.
- 9) V. Z. ウラソフ (奥村敏恵ほか共訳) : 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, pp. 127 ~130, 1967 年.
- 10) 高橋邦弘・水野正夫 : 薄肉開き断面部材の断面変形 (一自由度断面変形・一軸対称断面の場合) : 日本機械学会論文集 (第 1 部), 44 巻 378号, pp. 460 ~467, 1978 年 2 月.
- 11) 西野文雄・深沢泰晴 : ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, 第 247号, PP. 9 ~19, 1976年 3 月.