

鉛直荷重を受ける薄肉鋼製ラーメンの面内座屈崩壊に関する一研究

A Study on In-Plane Buckling Collapses of Thin-Walled Steel Frames
subjected to Vertical Loads

中井 博* 江見 晋** 酒造敏廣***

By Hiroshi NAKAI, Susumu EMI and Toshihiro MIKI

This paper reports the behaviors of in-plane buckling collapse of steel frames with the thin-walled box sections under the applications of vertical loads. Firstly, a numerical calculation method for analyzing the buckling collapse of frames with initial imperfections in the elasto-plastic regions is developed on the basis of second order theory by considering the influences of local buckling of columns upon the ultimate strength of frames. Secondly, the experimental studies on five portal frames are carried out through the combinations of various buckling parameters, i.e., slenderness ratios of columns and width-thickness ratios of flange plates composed of the column members. Finally, buckling strength, ultimate strength and effective column length of the thin-walled steel frames are clarified from these analytical and experimental results.

1. まえがき

薄肉箱形断面で構成された鋼製ラーメン構造物に関するわが国の道路橋示方書¹⁾(以下、JSHBとよぶ)の設計法を、限界状態設計法に基づく合理的なものとするためには、柱の耐荷力の合理的な評価方法、とりわけ有効座屈長の取り方や全体座屈と局部座屈との連成問題など、基本的に明らかにしておくべき問題が数多く残されている。

現在のところ、JSHBのみならず諸外国の設計基準 BS5400 Part 3 (イギリス)²⁾、ERSC (ヨーロッパ共同体)³⁾、DIN18800 (ドイツ)⁴⁾ などにおけるラーメンの耐荷力は、弾性座屈理論に基づく有効座屈長を用いて、柱の基準耐荷力曲線から決定されている。ところが、ラーメンの全体座屈は、①弾塑性座屈領域にあるうえ、②局部座屈の影響を受け、③さらに柱は変断面部材である、などのことを考慮すれば、⁵⁾ ラーメンの柱部材の耐荷力算定法については、なお十分な検討が必要であると思われる。

これまで、建築構造物を対象としたラーメンの弾塑性安定に関する理論的・実験的研究は、数多く行われているが、^{6), 7)} 土木構造物として利用される機会の多い鋼製橋脚のように、薄肉箱形断面で構成されたラーメンに関する研究はほとんど見当たらず、その崩壊挙動および耐荷力については、十分に把握されているとは言えないのが現状である。

そこで、本文では、①初期不整を有するラーメンの弾塑性2次解析法と局部座屈を考慮したラーメンの終

* 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3丁目3番138号)

** 阪神高速道路公団工務部設計課 課長 (〒541 大阪市東区北久太郎町4丁目68番)

*** 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3丁目3番138号)

局強度の算定法を述べ、②鉛直荷重のみを受ける薄肉門形ラーメンの面内座屈崩壊に関する実験結果を示し、③以上の解析と実験とを通じて、ラーメンの座屈崩壊特性を明らかにする。そして、これらの結果から、座屈強度、終局強度ならびに柱の有効座屈長などについて、種々な検討を加えるものである。

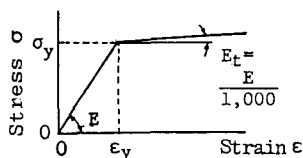


Fig.1 Stress strain relationship in steel material

2. 初期不整を有するラーメンの弾塑性2次解析

(1) 仮定

2次理論を基にし、伝達マトリックス法を用いて門形ラーメンの弾塑性解析を行うが、その際、以下の仮定を導入する。

①材料の応力 σ とひずみ ϵ との関係は、Fig.1に示す bi-linearな曲線に従うものとする。

②断面が非弾性域に入った後も、平面保持の仮定が成立する。

③ラーメンの柱部材内の軸方向圧縮力は、その軸に沿って一定とする。

④分割した棒要素内の曲げモーメントは要素両端の曲げモーメントの平均をとり、要素内で一定とみなす。

⑤残留ひずみと荷重によって生ずるひずみは、重ね合わせることができるものとする。

⑥柱断面を構成するフランジおよびウェブ・プレートは、後述する箱形短柱の圧縮と曲げとに関する終局強度相関曲線を用いることによって考慮できるものとする。

(2) 基礎微分方程式とその一般解

2次理論によると、初期たわみ w_0 を有する柱のたわみ w に関する基礎微分方程式は、次式で与えられる。

$$E \cdot I_e \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + N \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{d^2 w_0}{dx^2} \quad \dots (1)$$

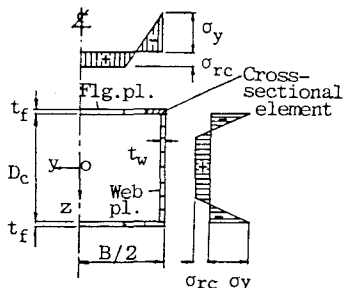


Fig.2 Residual stress and Cross-sectional elements in box section

ここに、 N ：柱の軸方向圧縮力（圧縮を正）、 E ：ヤング係数である。

また、 $E \cdot I_e$ ：軸方向圧縮力 N と曲げモーメント M とを受ける箱形断面の図心上の軸ひずみ ϵ_0 および曲率 ϕ に関する柱の換算曲げ剛度であり、残留応力を有する箱形断面を Fig.2のように細分割して数値積分し、 N および M を満たす ϵ_0 および ϕ を求めれば、

$$E \cdot I_e = M / \phi \quad \dots (2)$$

与えられる（付録参照）。たとえば、弾性状態における I_e は、柱の断面2次モーメント I_{cy} に等しい。

いま、 l_0 ：分割した柱の要素長、 Q ：せん断力、 ϕ ：たわみ角

$$\begin{Bmatrix} w_l \\ \phi_l \\ M_l \\ Q_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sin \kappa l_0}{\kappa} & \frac{1 - \cos \kappa l_0}{\kappa^2 E I_e} & \frac{\kappa l_0 - \sin \kappa l_0}{\kappa^3 E I_e} \\ 0 & \cos \kappa l_0 & -\frac{\sin \kappa l_0}{\kappa E I_e} & -\frac{1 - \cos \kappa l_0}{\kappa^2 E I_e} \\ 0 & \kappa E I_e \sin \kappa l_0 & \cos \kappa l_0 & \frac{\sin \kappa l_0}{\kappa} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_0 \\ \phi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \psi_0 l_0 (1 - \frac{\sin \kappa l_0}{\kappa l_0}) + (\psi_l - \psi_0) \\ \times \frac{1}{\kappa} \cdot (-\frac{1}{\kappa l_0} + \frac{\cos \kappa l_0}{\kappa l_0} + \frac{\kappa l_0}{2}) \\ -\psi_0 (1 - \cos \kappa l_0) \\ -(\psi_l - \psi_0) \cdot (1 - \frac{\sin \kappa l_0}{\kappa l_0}) \\ \psi_0 \kappa E I \sin \kappa l_0 \\ + \frac{E I}{l_0} (\psi_l - \psi_0) \cdot (1 - \cos \kappa l_0) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (3)$$

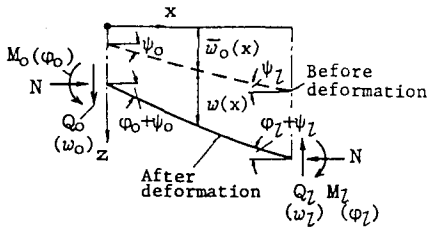


Fig.3 Displacements and stress-resultants of column element

($=-dw/dx$)、 ψ : 初期たわみによるたわみ角 ($=-dw_0/dx$) とし、式(1)の一般解を、Fig.3に示す柱要素の左右両端の状態量を用いて伝達マトリックス表示すると式(3)が得られる。ただし、式中の安定性を表わすパラメーター κ は、次式で与えられる。

$$\kappa = \sqrt{\frac{N}{E \cdot I_e}} \quad \dots (4)$$

また、式(3)の右辺第2項は初期たわみによる荷重項であり、要素内の初期たわみによるたわみ角 ψ を要素両端のたわみ角 ψ_0 および ψ_L で線形近似し、式(1)の特解として得られるものである。

(3) 門形ラーメンを解析するためのモデル化

Fig.4に示すような鉛直荷重 P を受ける門形ラーメンでは、①左右の柱の軸方向圧縮力は等しいとみなせること、②梁部材のたわみ波形は逆対称となること、また③終局状態に至るまで梁部材はほぼ弾性状態を保つことから、ラーメンをFig.5に示すような置換柱にモデル化して計算の迅速化を図った。

この置換柱の柱頭部の回転バネ定数 K_ϕ は、 I_{cy} 、 I_{by} をそれぞれ柱および梁の断面2次モーメント、 h 、 l をそれぞれラーメンの骨組高さおよびスパンとして、梁と柱との曲げ剛比

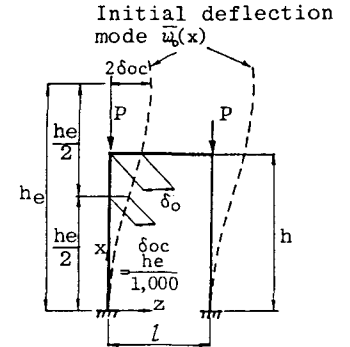


Fig.4 Portal frame with initial imperfection

$$K = (I_{cy}/h) \cdot (l/I_{by}) \quad \dots (5)$$

を用いて整理すると、次のように表わされる。

$$K_\phi = (1/K) \cdot (6EI_{cy}/h) \quad \dots (6)$$

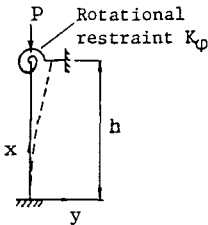


Fig.5 Analytical model

(4) 解析に導入した初期不整

a) 初期たわみ

解析に用いたラーメンの初期たわみモード $w_0(x)$ としては、耐荷力に不利な影響を及ぼすように、Fig.4に示す弾性座屈理論による座屈モード

$$w_0(x) = \delta_{0c} \cdot \{1 - \cos(\pi x/he)\} \quad \dots (7)$$

と同一のものを採用した。ここに、 he は弾性座屈理論による柱の有効座屈長である。また、上式中の δ_{0c} 値としては、長さ he で両端単純支持された中心圧縮柱の初期たわみのJSHBによる許容上限値 $he/1,000$ を用いた。このときのラーメン柱頭部の初期たわみを δ_0 とし、曲げ剛比 K による δ_0/h の変動を、有効座屈長係数、

$$\beta = he/h \quad \dots (8)$$

とともに示すと、Table 1のとおりである。

Table 1 Variations of initial deflection δ_0/h and effective length ratio β due to stiffness ratio K of beam and column

Items \ K	0	1	2	3	4	5	∞
Effective length ratio $\beta = h_e/h$	1.0	1.157	1.279	1.373	1.445	1.502	2.0
Initial deflection δ_0/h at top of column	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{452}$	$\frac{1}{441}$	$\frac{1}{439}$	$\frac{1}{442}$	$\frac{1}{445}$	$\frac{1}{500}$

b) 残留応力

解析に用いた残留応力分布は、残留応力の測定結果⁸⁾を参考にし、箱形断面のフランジおよびウェブ・プレート内の残留圧縮応力度 σ_{rc} が、 $0.4 \cdot \sigma_y$ となる Fig.2 に示したパターンを採用した。

(5) ラーメンの終局強度の求め方

上述の弾塑性2次解析によってラーメンの終局強度を求めるが、全体座屈に至るまでに柱断面が局部座屈を起こしたり、全塑性状態になることも考えられるため、次の二つの場合に分けて終局強度を求めた。

a) 柱断面が局部座屈や全塑性状態に至らないスレンダーなラーメンの終局強度

スレンダーなラーメンでは、残留応力の影響により、荷重の増大に伴って柱断面内および長手方向に塑性域が拡大するが、柱のいかなる断面も局部座屈を起こさず、また全塑性状態に至るまでに柱の曲げ剛性が小さくなって変位 δ が発散し始める。この場合、上述の解析法において、柱頭部の変位 δ が発散するときを終局状態とみなし、このときの鉛直荷重を終局強度 P_u/P_y とする。

b) 柱断面が局部座屈や全塑性状態に至るストックリーなラーメンの終局強度

柱部材が薄肉断面であるため、全体座屈に至るまでに局部座屈を起こしたり、全塑性状態になることもある。したがって、これらの状態もラーメンの終局状態とみなし、このときの鉛直荷重を終局強度 P_u/P_y とする。ここでは、全塑性状態となる場合も含め、以下に示す箱形短柱の圧縮と曲げとに関する終局強度相関曲線を用い、局部座屈を起こすときの終局強度を求めた。

すなわち、まず、ある荷重段階の伝達マトリックス法による解析において、柱部材に作用する曲げモーメント M_i および軸方向圧縮力 N_i (添字 i は任意の要素を意味する) を、それぞれ柱部材の全塑性モーメント M_p および全塑性軸力 P_y で無次元化し、 $\bar{M}_u = M_i/M_p$ および $\bar{P}_{su} = N_i/P_y$ と表わす。つぎに、次式から短柱の終局強度相関曲線を求め、この条件が満たされるとき、局部座屈を起こすものとした。このようにして、ラーメンの全体座屈と局部座屈が連成したときの終局強度が近似的に求められる。

$$G(\bar{M}_u, \bar{P}_{su}) = 0 \quad \dots (9)$$

上式は、文献 9) で箱形短柱の弾塑性有限変位解析を行って得られており、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} G(\bar{M}_u, \bar{P}_{su}) &= \bar{M}_u - \frac{\bar{M}_{fp}}{\bar{P}_{tf}} (k_{pl} - \bar{P}_u) \\ &= \bar{M}_u - \frac{1}{k^2_{pl}} \cdot \frac{1}{\bar{P}_{wy}^3} \left\{ 2(1 - \bar{M}_{fp}) - \frac{\bar{M}_{fp} \cdot \bar{P}_{wy}}{\bar{P}_{fy}} \right\} \bar{P}_u^3 \\ &\quad + \frac{1}{k_{pl}} \cdot \frac{1}{\bar{P}_{wy}^2} \left\{ 3(1 - \bar{M}_{fp}) - \frac{\bar{M}_{fp} \cdot \bar{P}_{wy}}{\bar{P}_{fy}} \right\} \bar{P}_u^2 - k_{pl}, (\bar{P}_u \leq k_{pl} \cdot \bar{P}_{wy}) \end{aligned} \right\} \dots (10)a, b$$

ここに、 $\bar{P}_{fy} = P_{fy}/P_y$, $\bar{P}_{wy} = P_{wy}/P_y$, $\bar{M}_{fp} = M_{fp}/M_p$, また $P_{fy} = 2 \cdot B \cdot t_{fx} \cdot \sigma_y$, $P_{wy} = 2 \cdot D \cdot t_{wx} \cdot \sigma_y$, $M_{fp} = P_{fy} \cdot (D + t_f)/2$ であり、 σ_y : 柱の降伏点、 $P_y = P_{fy} + P_{wy}$ 、 $M_p = P_{fy} \cdot (D + t_f)/2 + D \cdot t_w \cdot \sigma_y/2$ である。

また、上式中の k_{pl} は、文献 8) および 9) に示されているように、軸方向圧縮力のみを受ける箱形短柱の終局強度であり、以下の諸式によって算定される。

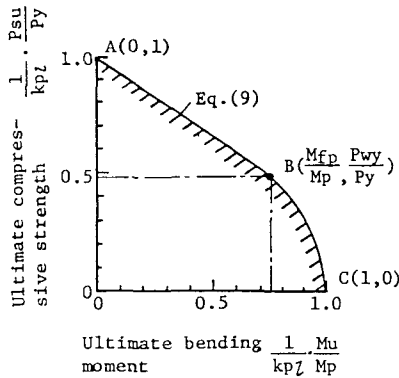
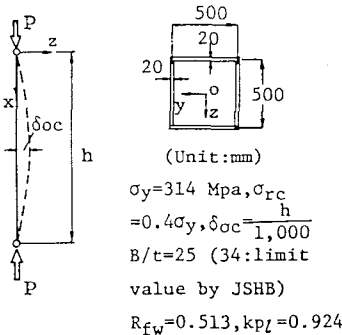
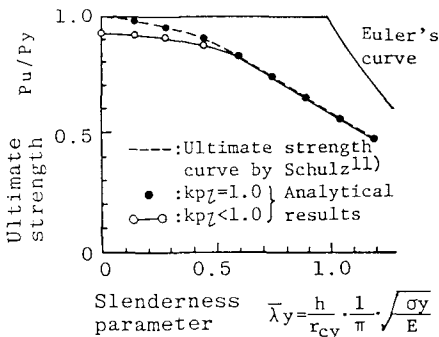


Fig. 6 Interaction curve of ultimate strength for box stub-column subjected to compression and bending



(a) Analytical model



(b) Analytical results

Fig. 7 Ultimate strength of columns with initial imperfections

$$\left. \begin{aligned} kpl &= 1.0 & (Rw \leq 0.3) \\ &= 0.542 \cdot R_{fw}^3 - 1.249 \cdot R_{fw}^2 + 0.412 \cdot R_{fw} & \dots (11)a, b \\ &+ 0.968 & (0.3 < R_{fw} \leq 1.3) \end{aligned} \right\}$$

ただし、 Rw は箱形短柱の幅厚比パラメーターであり、

$$R_{fw} = \frac{B}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)}{k_{fw} \pi^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \dots (12)$$

により求められる。ここに、 B, t_f ：それぞれフランジ・プレートの幅および板厚（梁、柱共通）、 μ ：ポアソン比（ $=0.3$ ）、 σ_y ：降伏点である。また、 k_{fw} は、フランジ・プレートの Euler の座屈応力度を基準とした箱形短柱の座屈係数であり、次式で求められる。

$$k_{fw} = \frac{(\alpha_f + \frac{1}{\alpha_f}) + (\frac{t_f}{t_w})^3 \cdot (\frac{D}{B}) \cdot (\alpha_w + \frac{1}{\alpha_w})^2}{1 + (\frac{D}{B})^3 \cdot (\frac{t_w}{t_f})} \dots (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_f &= a/B, \quad \alpha_w = a/D \\ a &= B \cdot \left\{ \frac{1 + (D/B)^3 \cdot (t_w/t_f)^3}{1 + (B/D) \cdot (t_w/t_f)^3} \right\}^{1/4} \end{aligned} \right\} \dots (14)a \sim c$$

なお、 $kpl = 1$ のとき、式(9)は、圧縮と曲げとを受ける箱形短柱の全塑性相関曲線に一致する。これを、 $(1/kpl) \cdot (Psu/Py)$ と $(1/kpl) \cdot (Mu/Mp)$ との関係としてプロットすると、Fig. 6 のようになる。

(6) 解析法の検討

以上の解析方法の妥当性を検討するため、局部座屈を①考慮しない場合 ($kpl = 1.0$)、②考慮した場合 ($kpl < 1.0$) について、Fig. 7(a) に示す中心圧縮柱の終局強度解析を行った。解析結果の一例として、終局強度 Pu/Py と細長比パラメーター λ_y (式(16)参照) との関係を、Fig. 7 (b) に示す。

この図からわかるように、①の解析結果は Schulz¹¹⁾ の溶接箱形断面柱に対する結果とほぼ一致しており、局部座屈を考慮しない場合の解析方法の妥当性が確かめられたものと思われる。

また、②による Pu/Py は、細長比パラメーター λ_y が 0.60 付近から小さくなるにつれて①の結果よりも低下しており、局部座屈の影響が顕著に現われていることがわかる。

さらに、圧縮を受ける柱の局部座屈と全体座屈との連成座屈現象については、いままでに厳密な解析例がほとんどないため、福本・宇佐美・青木¹²⁾ らが行った薄肉箱形断面柱（計 15 体）の連成座屈に関する実験結果と比較することとした。この結果を、Fig. 8 に示す。解析に用いた柱の初期たわみ・残留応力としては、

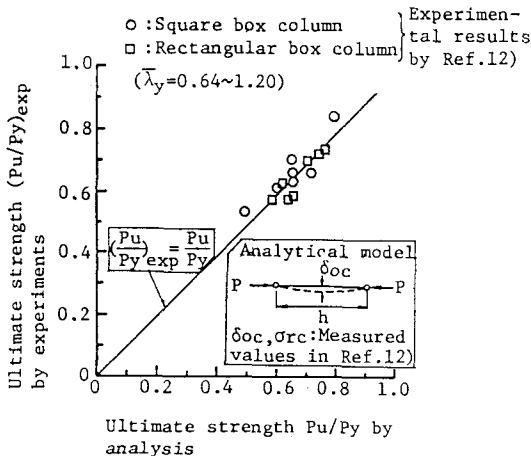


Fig.8 Comparisons of analytical results with experimental ones by Ref.12) for ultimate strength of columns

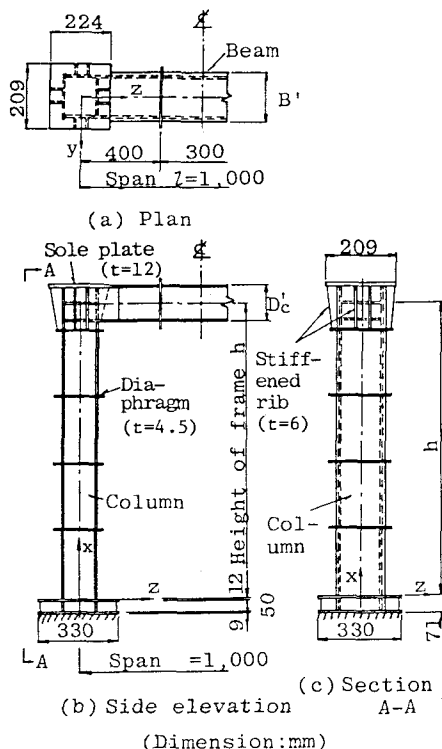


Fig.9 Details of test frames

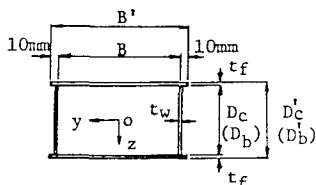


Fig.10 Cross-section of column (beam) in test frame

福本らの実験における実測値を理想化して用いた。

この図から、福本らの実験値 $(P_u/P_y)_{\text{exp}}$ と本解析値 P_u/P_y との相関性は高く、両者はよく一致していることがわかる。このことから、局部座屈を考慮した場合も、本解析法は、ほぼ妥当な結果を与えるものであることがわかる。

3. 門形ラーメンの耐荷力実験

(1) 供試体

箱形断面からなる一層一径間の門形ラーメン供試体（合計5体）の詳細図および柱、梁の断面図を、Fig.9 ~ Fig.10に示す。供試体の骨組寸法および断面寸法は、鋼製ラーメン橋脚の実績調査結果⁵⁾を参考にし、以下の三つのパラメーターを基にして決定した。

①梁と柱との曲げ剛比 K ； 式(5) 参照

②フランジ・プレートの幅厚比パラメーター R_f ；

$$R_f = \frac{B}{t_f} \cdot \sqrt{\frac{12(1-\mu^2)}{k \cdot \pi^2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad \dots (15)$$

ここに、 k ：板の座屈係数(=4.0)。

③柱の細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ ；

$$\bar{\lambda}_y = \frac{\beta \cdot h}{r_{cy}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \quad \dots (16)$$

ここに、 β ：弾性座屈理論による柱の有効座屈長係数(= h_e/h , Table 1 参照)、 r_{cy} ：柱の断面2次半径。

実験では、幅厚比パラメーター R_f および細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ によるラーメンの崩壊挙動および耐荷力の差異を明らかにしたいため、曲げ剛比 K を約 1.0 に固定し、 R_f を約 0.5 ~ 0.7、 $\bar{\lambda}_y$ をほぼ 0.3 ~ 0.7 となるようにした。

Table 2 は、上記のパラメーターと、これらを組み合わせで決定した各供試体の寸法諸元および断面諸量などをまとめたものである。ただし、表中の供試体の表示方法は、以下のようになっている。

$F - [0.7] - [0.5]$ ← 細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$
 ← フランジ・プレートの幅厚比パラメーター R_f

(2) 供試体の機械的性質

供試体を製作した鋼板(SS41)から合計42本の JIS 5号試験片を切り出し、引張試験を行った。その結果、ヤング係数 E

Table 2 Basic dimensions, cross-sectional properties and buckling parameters of test frames (SS41)

Items Test frames	Basic dimensions							Cross-sectional properties			Buckling parameters			
	B' (mm)	D _c ' (mm)	D _b ' (mm)	t _f (mm)	t _w (mm)	l (mm)	h (mm)	A _c (A _b) (cm ²)	I _{cy} (I _{by}) (cm ⁴)	r _{cy} (r _{by}) (cm)	K	R _f	R _{fw}	$\bar{\lambda}_y$
F-0.5-0.3	170	102	106	5.88	4.46	1,000	924	28.1 (28.5)	520.8 (569.5)	4.30 (3.67)	0.99	0.52	0.49	0.30
F-0.5-0.5	171	102	87	5.88	4.46	1,000	1,541	28.1 (26.7)	520.4 (357.4)	4.30 (3.66)	0.95	0.52	0.49	0.50
F-0.7-0.3	178	77	109	4.49	4.47	1,001	933	24.5 (24.9)	462.4 (512.1)	4.34 (4.54)	0.97	0.70	0.56	0.30
F-0.7-0.5	178	104	87	4.49	4.47	999	1,554	24.5 (22.9)	463.4 (308.4)	4.35 (3.67)	0.97	0.70	0.62	0.50
F-0.7-0.7	178	77	62	4.36	4.36	1,000	1,628	21.5 (20.2)	226.9 (137.7)	3.25 (2.63)	1.00	0.67	0.61	0.65

Notes B', D_c', D_b', t_f, t_w, l, h: see Fig.9~Fig.10. A_c, A_b: cross-sectional area of column and beam, respectively. I_{cy}, I_{by}: moment of inertia of column and beam, respectively. r_{cy}, r_{by}: radius of gyration of column and beam, respectively. K: Eq.(5). R_f: Eq.(15), R_{fw}: Eq.(12), $\bar{\lambda}_y$: Eq.(16)

Table 3 Yield points σ_y of columns in test frames (SS41)

Items Test frames	Yield points σ_y (MPa)
F-0.5-0.3	296
F-0.5-0.5	296
F-0.7-0.3	292
F-0.7-0.5	292
F-0.7-0.7	273

およびポアソン比 μ の平均値は、それぞれ 2.06×10^5 MPa および 0.28 であった。また、供試体の柱に関する平均降伏点 σ_y は、Table 3 のとおりであった。

(3) 実験装置・方法

鉛直荷重を受ける門形ラーメンの耐力実験を側方変位無拘束に近い状態で実施するため、ラーメン柱頭部の水平移動に鉛直ジャッキが追従できるような実験装置を考案・試作した。実験装置の一般図とその構成を、Fig.11に示す。この装置では、載荷フレームの梁②と載荷梁③との間にローラーを入れ、かつ載荷梁③を介して、鉛直荷重の数百分の1の水平荷重をジャッキ⑩によって載荷し、ラーメンの側方変位を拘束する主ジャッキ⑨直上の摩擦力を除くように工夫してある。さらに、ラーメン柱頭部のたわみ角を拘束しない

ように、鉛直荷重の載荷位置には、それぞれ固定および可動のピン治具⑦および⑧を用いている。なお、供試体の弾性実験結果から、主ジャッキ⑨直上のローラー部の摩擦係数値は、1/500 以下という良好な結果が得られた。

耐力実験では、この装置により鉛直荷重と水平荷重とを比例的に漸増させ載荷していった。なお、供試体のひずみ・変位は、ひずみゲージおよび変位計を用いて測定した。

(4) 実験結果

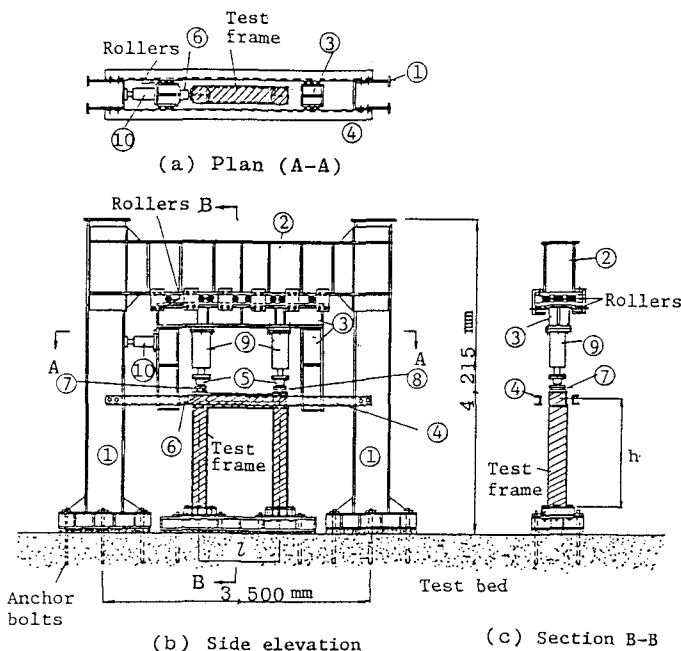
a) 初期たわみ

ラーメンの耐力実験前に、柱の骨組軸線の初期たわみ、ならびに柱のフランジ・プレートの初期たわみを測定した。その結果、柱の初期たわみ形状は、すべての供試体において、ラーメン柱頭部が水平方向に移動したような形状を呈していた (Fig.12(a) 参照)。柱頭部の初期たわみを δ_0 とすると、 δ_0/h 値は約 1/940 ~ 1/230 の範囲に入っており、その平均値は約 1/492 であった。つぎに、柱のフランジ・プレートの横断面方向の初期たわみの絶対最大値 δ_{po} は、JSHBの製作基準による初期たわみの許容上限値 ($=B/150$) 以下で、平均値は $0.345 \cdot B/150$ であり、フランジ・プレートの初期たわみは比較的小さかった。

b) 座屈崩壊挙動

1) 柱の崩壊モード

供試体の座屈崩壊モードの一例 (供試体 F-0.7-0.7) を初期たわみ形状とともに、Fig.12に示すが、すべての供試体は側方変位無拘束としての全体座屈現象を呈し、崩壊モードは初期たわみ形状と類似していた。



- ① Column of loading frame, ② Beam of loading frame, ③ Loading beam, ④ Beam for preventing out-of-deformation of test frames, ⑤ 980 KN load cell, ⑥ 9.8 KN load cell, ⑦ Pin-shoe (fixed), ⑧ Pin-shoe (movable), ⑨ 980 KN oil jack, ⑩ 294 KN oil jack

Fig. 11 Experimental apparatus for test frames

が終局荷重付近で折れ曲がるようになっているのに対して、供試体 F-0.7-0.7 では、 $P/Py=0.7$ 付近から δ^2 が徐々に大きくなっており、 $\bar{\lambda}_y$ が大きくなると座屈荷重が小さくなる傾向にあることがわかる。全般的な傾向として、細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ が大きくなるにつれて、 δ^2 が大きくなり始める荷重 P/Py は小さくなっており、 $\bar{\lambda}_y$ が大きいラーメンは水平変位しやすいことがわかる。

3) 局部座屈挙動

すべての供試体の柱頭部・基部付近のフランジ・プレートは、終局状態に至るまでに、局部座屈を起こしていることが柱断面内のひずみ分布から確認された。その荷重は、供試体 F-0.5-0.3, 0.5 では終局荷重 P_u

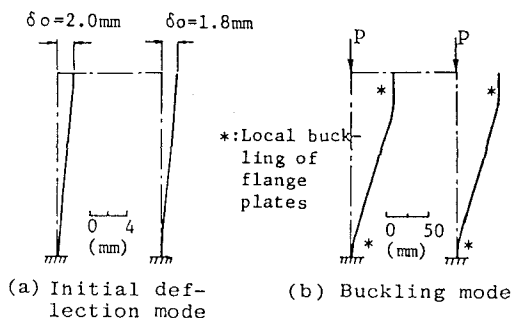


Fig. 12 Initial deflection mode and buckling mode of test frame F-0.7-0.7

また、同図中に示すように、崩壊後のすべての供試体には、柱基部および柱頭部付近のフランジ・プレートにおいて局部座屈が現われていた。

2) $P - \delta^2$ 曲線

鉛直荷重 P とラーメン柱頭部の水平変位 δ を二乗した各供試体に対する $P - \delta^2$ 曲線を、Fig. 13 に示す。ただし、 P および δ^2 は、それぞれ柱の全塑性軸力 Py およびラーメンの骨組高さ h で割って、 P/Py および $(\delta/h)^2$ で無次元表示してある。さらに、 $P - \delta^2$ 曲線から δ^2 が急増し始める荷重を求め、これを座屈荷重 P_{cr}/Py と定義することとし、この位置を図中○印で示した。

この図から、供試体 F-0.5-0.3 および F-0.7-0.3 はストックリーなラーメン ($\bar{\lambda}_y = 0.3$) であるため、 P_{cr}/Py は約 1.0 であり、ほぼ全塑性状態で δ^2 が急増し始めて崩壊に至っていることがわかる。また、供試体 F-0.5-0.5 および F-0.7-0.5 の $P - \delta^2$ 曲線

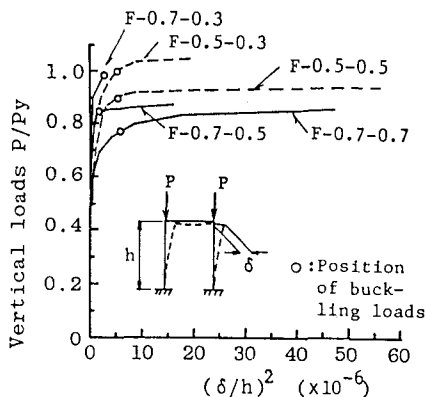


Fig. 13 $P - \delta^2$ curves of test frames

Table 4 Test results of critical strength P_{cr}/P_y and P_u/P_y

Test frames	Slenderness parameters $\bar{\lambda}_y$	Buckling strength	Ultimate strength	Difference between (1) and (2)
		$\frac{P_{cr}}{P_y}; (1)$	$\frac{P_u}{P_y}; (2)$	$\frac{(2)-(1)}{(1)} (\%)$
F-0.5-0.3	0.30	1.010	1.046	3.6
F-0.5-0.5	0.50	0.900	0.946	5.2
F-0.7-0.3	0.30	0.985	0.985	0
F-0.7-0.5	0.50	0.850	0.887	4.4
F-0.7-0.7	0.65	0.780	0.867	11.2

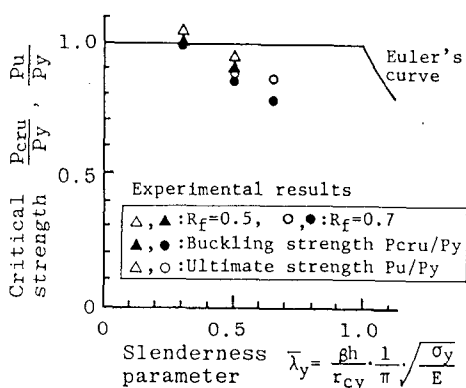


Fig.14 Relationships between critical strength P_{cr}/P_y , P_u/P_y and slenderness parameter $\bar{\lambda}_y$

後の余剰耐力は大きくなる傾向にある。これは、初期不整の影響により荷重と水平変位との関係が完全に分岐座屈的な挙動を示さないこと、また $\bar{\lambda}_y$ が大きくなると残留応力に起因した塑性域の進展による柱の曲げ剛性の低下が小さくなることによるものと思われる。

4. 門形ラーメンの限界強度と有効座屈長に関する考察

(1) 限界強度とその考察

a) 実験値と解析値および JSHB の基準耐力との比較

まず、Table 2 の断面寸法と Table 3 の降伏点とを用いて、終局強度解析を行い、各供試体の座屈強度 P_{cr}/P_y と終局強度 P_u/P_y とを求めた。各供試体の $\bar{\lambda}_{oy}$ 値 (式(16)において、有効座屈長係数を $\beta = 1$ とおいたときの細長比パラメーター)、 kp_L 値 (局部座屈の判定を行うパラメーターで、式(11)参照)、 P_{cr}/P_y および P_u/P_y の実験値と解析値とを、JSHBによる基準耐力 $P_{0.2}^*/P_y$ 値とともに、Table 5 に示す。ただし、同表で、 P_{cr}/P_y の解析値は局部座屈を考慮していないもので、また局部座屈を考慮しない P_u/P_y の解析値も示してある。

この表から、終局強度 P_u/P_y の実験値と解析値との差異は、局部座屈を考慮しない解析値に対しては約 -3~7%、局部座屈を考慮した解析値に対しては約 9~16%であり、局部座屈を考慮した解析値は実験値に対して若干安全側の値を与えることがわかる。これは、局部座屈を起こすときの終局強度の計算の際に用い

の直前、F-0.7-0.3~0.7 では P_u の10~20%低い荷重であり、幅厚比パラメーター R_f の大きい供試体では局部座屈の影響が顕著に現われていた。

4) 座屈強度と終局強度

実験による各供試体の座屈荷重 P_{cr} と終局荷重 P_u とを、それぞれ P_{cr}/P_y および P_u/P_y (以下では、これらを限界強度 (Critical strength) という) と表わし、それらの値を Table 4に示す。また、細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ と P_{cr}/P_y および P_u/P_y との関係として、この表の結果をプロットすれば、Fig.14を得る。これらの図表から、以下のことがわかる。

供試体 F-0.7-0.3~0.7 において、 P_{cr} および P_u の P_y からの低下量は、それぞれ約 2~22%および約 2~13%であり、 $\bar{\lambda}_y$ が大きくなることによる座屈強度および終局強度の低下が顕著であることがわかる。また、供試体 F-0.7-0.5と F-0.5-0.5とを比較すると、 $\bar{\lambda}_y$ が等しくとも R_f が 0.5から 0.7と大きくなるに伴って、 P_u/P_y は約 6%低下している。これは、 $R_f = 0.7$ の柱では、局部座屈を起こし始めてからの余剰耐力が $R_f = 0.5$ の柱に比べて小さくなるという影響が現われたものと思われる。

供試体 F-0.5-0.3, 0.5 および F-0.7-0.3 ~0.7 において、 P_{cr}/P_y と P_u/P_y との差異は、それぞれ約 4~5% および 0~11%であり、 $\bar{\lambda}_y$ が大きくなるに従って座屈

Table 5 Comparisons of test results P_{cr}/P_y and P_u/P_y with analytical ones

Test frames	Slenderness parameters $\bar{\lambda}_{oy}$	Ultimate strength of box stub-columns k_{pL}	Test results		Analytical results		Critical strength by JSHB $\frac{P_u^*}{P_y}$ (5)	Errors of (3), (4) and (5) to (1) and (2)			
			Buckling strength	Ultimate strength	Buckling strength	Ultimate strength		(1)-(3)	(2)-(4)	(1)-(5)	(2)-(5)
			$\frac{P_{cr}}{P_y}$ (1)	$\frac{P_u}{P_y}$ (2)	$\frac{P_{cr}}{P_y}$ (3)	$\frac{P_u}{P_y}$ (4)		(1)	(2)	(1)	(2)
F-0.5-0.3	0.26	0.935	1.010	1.046	0.966	0.883 (0.966)	0.897	3.4	11.7 (3.4)	10.3	10.3
F-0.5-0.5	0.44	0.951	0.900	0.947	0.903	0.852 (0.906)	0.753	0.3	10.0 (4.3)	16.3	20.5
F-0.7-0.3	0.26	0.902	0.985	0.985	0.966	0.823 (0.966)	0.896	1.9	16.4 (1.9)	9.0	9.0
F-0.7-0.5	0.43	0.871	0.850	0.887	0.906	0.805 (0.914)	0.754	-6.6	9.2 (-3.0)	11.3	15.0
F-0.7-0.7	0.56	0.878	0.780	0.867	0.788	0.706 (0.809)	0.650	-1.0	11.6 (6.7)	16.7	25.0

Note: Values in parentheses show the analytical results without considering local buckling of columns

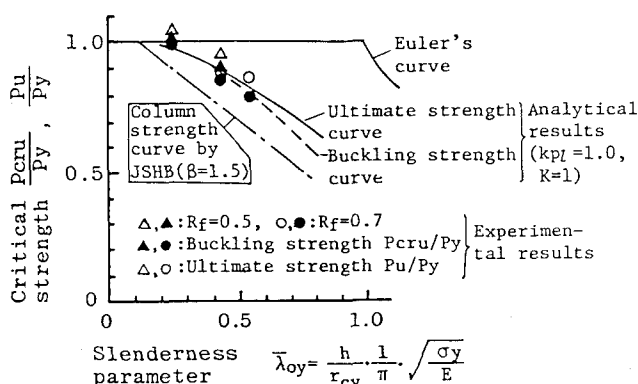


Fig.15 Comparisons of test results P_{cr}/P_y and P_u/P_y with analytical ones and critical strength P_u^*/P_y by JSHB

1.0)を示すこととし、Table 5 の結果を座屈強度 P_{cr}/P_y および終局強度 P_u/P_y と細長比パラメーター λ_{oy} との関係として図化すれば、Fig.15を得る。

この図から、 P_{cr}/P_y および P_u/P_y の実験値と解析値との差異は大きくとも 7%程度であり、両者はよく一致していることがわかる。また、JSHB の基準耐荷力 P_u^*/P_y 値と P_{cr}/P_y および P_u/P_y の実験値との差異は、それぞれ約 9~17% および約 9~25% となっており、 P_u^*/P_y 値は実験値に対してかなり安全側の値を与えることがわかる。

b) 限界強度に関する考察

以上では、ラーメンの限界強度として、座屈強度と終局強度の二つについて述べてきた。しかしながら、

Table 6 Variations of buckling strength P_{cr}/P_y due to stiffness ratio K and slenderness parameter $\bar{\lambda}_{oy}$

Items	$\bar{\lambda}_{oy}$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Buckling strength of frames P_{cr}/P_y	0	0.956	0.927	0.875	0.806	0.731	0.698	0.563
	1	0.956	0.920	0.856	0.781	0.663	0.583	0.531
	3	0.950	0.903	0.810	0.688	0.588	0.513	0.456
	5	0.952	0.881	0.763	0.638	0.538	0.463	0.363
Ultimate strength of columns P_u/P_y		0.956	0.927	0.878	0.819	0.758	0.695	0.641

Notes: $B=154.5\text{mm}$, $D_c=90\text{mm}$, $t_f=6\text{mm}$, $t_w=4.5\text{mm}$, $\sigma_y=314\text{ Mpa}$

た k_{pL} 値を小さく評価したためであると思われる。すなわち、文献 8) においては、 k_{pL} を求めるとき、柱断面のフランジおよびウェブ・プレートの初期たわみとして、JSHBの製作規準の上限値を取っており、フランジ・プレートの初期たわみが小さく現われた各供試体の k_{pL} としては、もう少し大きくとることができるものと考えられる。そのため、 P_u/P_y の実験値は、局部座屈を考慮しない解析値に近い値を示したものである。

そこで、以下に述べる解析値は、すべて局部座屈を考慮しない解析値 ($k_{pL} =$

ラーメンの柱の設計法として、現行の許容応力度設計法ではなく、限界状態設計法を今後検討していく場合、橋梁の上部構造を支えることがラーメンの重要な機能であるため、ラーメン柱頭部の水平変位が急増する状態が一つの限界状態と考えられる。このような

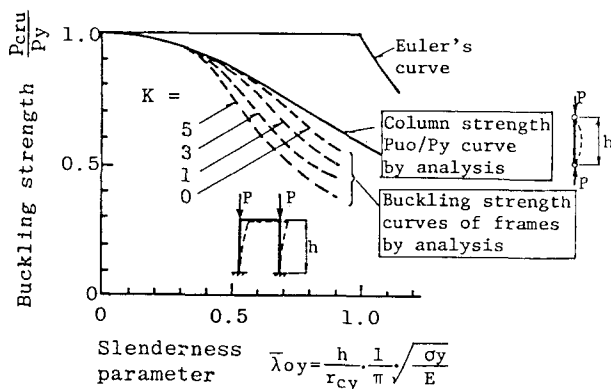


Fig.16 Relationships among buckling strength P_{cr}/P_y , stiffness ratio K and slenderness parameter $\bar{\lambda}_{oy}$

るほど、 P_{cr}/P_y の低下が顕著であることがわかる。

(2) 有効座屈長とその考察

a) 実験値と解析値および JSHB の設計基準との比較

Fig.17に示すように、各供試体の座屈強度の実験値および解析値を細長比パラメーター $\bar{\lambda}_{oy}$ で整理し、ラーメンと同一の座屈強度（ただし、JSHBの基準耐荷力曲線を利用）を有する両端単純支持の柱（細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ ）に換算するための有効座屈長係数 β （ $=h_e/h = \bar{\lambda}_y/\bar{\lambda}_{oy}$ ）を計算した。その結果をJSHBおよび弾性座屈理論による β 値とともに、Table 7に示す。

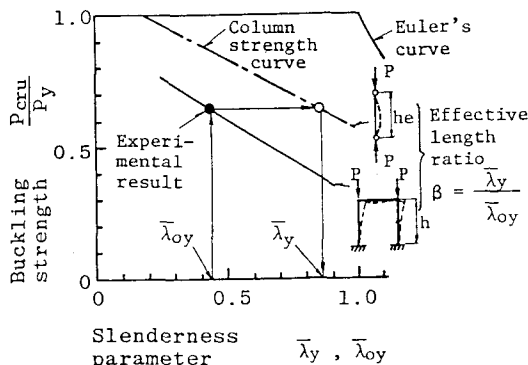


Fig.17 Calculation method of effective length ratio β

Table 7 Comparisons of test results with analytical ones for effective length ratio β

Items Test frames	Slender- ness para- meters $\bar{\lambda}_{oy}$	Effective length ratio $\beta=h_e/h$			
		Experimen- tal results	Analytical results	JSHB	Elastic buckling theory
F-0.5-0.3	0.26	—	1.010	1.5	1.157
F-0.5-0.5	0.44	0.870	0.872		
F-0.7-0.3	0.26	0.875	1.010		
F-0.7-0.5	0.43	1.105	0.866		
F-0.7-0.7	0.56	1.078	1.052		

観点からみれば、終局強度よりも座屈強度が重要な意義を持つことになる。

そこで、曲げ剛比 K を0～5、細長比パラメーター $\bar{\lambda}_{oy}$ を0.3～0.9と変化させ、供試体F-0.5-0.3,0.5とほぼ同一の柱断面からなる門形ラーメンの座屈強度 P_{cr}/P_y に関するパラメトリック解析を行った。その結果を、 K および $\bar{\lambda}_{oy}$ と P_{cr}/P_y との関係として、Table 6およびFig.16に示す。なお、これらの図表には、ラーメンと同一の柱断面からなる両端単純支持の中心圧縮柱の終局強度 P_{uo}/P_y も示してある。

この図から、 K および $\bar{\lambda}_{oy}$ が大きくな

ら、 P_{cr}/P_y の低下が顕著であることがわかる。

この表から、 β の実験値（約0.9～1.1）と解析値（約1.0～1.1）の間には若干の差異があるが、これらの範囲内では耐荷力の変動が僅かであることを考えれば、両者はよく一致しているといえる。また、JSHBの β 値（=1.5）は、解析値および実験値を大きく上まわっており、上述の柱の耐荷力としてはかなり安全側の値を与えている。さらに弾性座屈理論による β 値（=1.157）は、実験値の上限をおさえていることがわかる。

b) 有効座屈長の取り方

以上の結果を踏まえて、門形ラーメンの柱の有効座屈長の取り方について検討するため、上述のTable 6の座屈強度に関する解析結果を細長比パラメーター $\bar{\lambda}_{oy}$ と $\bar{\lambda}_y$ （Fig.17参照）との関係として整理した。その結果をFig.18に示す。ただし、断面寸法などが異なれば、柱の基準耐荷力曲線は僅かながら異なるこ

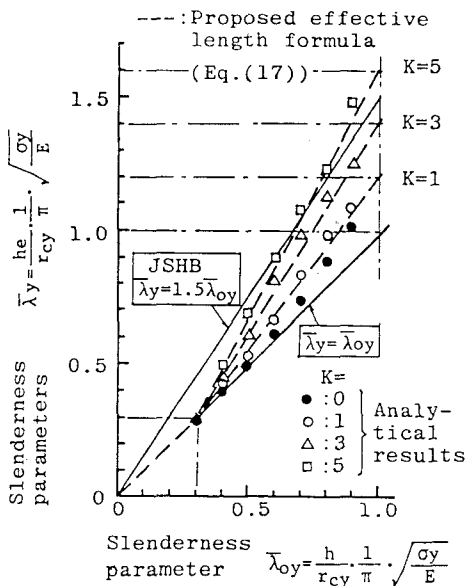


Fig.18 Relationships between slenderness parameters $\bar{\lambda}_{oy}$ and $\bar{\lambda}_y$

とになるので、耐荷力の変動に敏感な有効座屈長を求めるための耐荷力曲線としては、JSHBの基準耐荷力曲線にかわり、Fig.16に示したラーメンと同一の柱断面を有する中心圧縮柱の終局強度(P_{uo}/P_y)曲線を用いている。また、この図において、有効座屈長係数 β は、原点(0,0)と点($\bar{\lambda}_{oy}$, $\bar{\lambda}_y$)とを結んだ直線の勾配で表わされる。

この図から、 $\bar{\lambda}_{oy} \leq 0.3$ では、 β 値はほぼ1.0となるが、曲げ剛比 K および $\bar{\lambda}_{oy}$ が大きくなるに伴って $\bar{\lambda}_y$ 、すなわち β の解析値は大きくなる傾向にあり、 K が一定であれば β が一定となる弾性座屈理論(Table 1参照)と異なり、 β は K のみならず、 $\bar{\lambda}_{oy}$ によっても変動することがわかる。これは、座屈荷重付近においては、残留応力の影響により柱の曲げ剛性がかなり小さくなっており、ラーメン柱頭部の梁部材による回転拘束が見掛け上変化するためであると思われる。また、図中に示すように、 $0 < K \leq 5$ の範囲において常に $\beta = 1.5$ とするJSHBの規定は解析値のほぼ上限をおさえているが、 K および $\bar{\lambda}_{oy}$ が小さくなるほど、解析値との差異は大きくなることわかる。

これらの結果から、門形ラーメンの柱の細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ は、Fig.18に示したように、 $\bar{\lambda}_{oy}$ と K とで近似すると、次式のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_y &= \bar{\lambda}_{oy} & , & \quad (\bar{\lambda}_{oy} \leq 0.3 \text{ で、しかも } 0 < K \leq 5) \\ &= \bar{\lambda}_{oy} \cdot (9/7) - 3/35 & , & \quad (0.3 < \bar{\lambda}_{oy} \leq 0.9 \text{ で、しかも } 0 < K \leq 1) \\ &= \bar{\lambda}_{oy} \cdot (8+K)/7 - (3/70) \cdot (1+K) & , & \quad (0.3 < \bar{\lambda}_{oy} \leq 0.9 \text{ で、しかも } 1 < K \leq 5) \end{aligned} \right\} \dots (17)a \sim c$$

なお、上式を用いると、有効座屈長係数は、 $\beta = \bar{\lambda}_y / \bar{\lambda}_{oy}$ として求められる。

5. まとめ

本文は、鉛直荷重を受ける薄肉鋼製門形ラーメンの終局強度解析と耐荷力実験とを行い、ラーメンの座屈崩壊特性、座屈強度や終局強度の限界強度特性、および有効座屈長などを明らかにしたものである。本文の結論を要約すると、以下のとおりである。

(1) 2次理論に基づく初期不整を有するラーメンの弾塑性解析法

- この方法では、ラーメンの終局強度を判定する際、箱形短柱の圧縮と曲げとに関する終局強度相関曲線を用いており、局部座屈の影響を考慮したラーメンの終局強度を求めることができる。
- 柱の局部座屈と全体座屈との連成座屈に関する福本らの実験結果と比較した結果、本文の解析法はほぼ妥当な結果を与えることがわかった。

(2) 梁と柱との曲げ剛比 K = 約 1.0、柱の細長比パラメーター $\bar{\lambda}_y$ = 約 0.3~0.7、および柱のフランジ・プレート幅厚比パラメーター R_f = 約 0.5~0.7の薄肉箱形断面で構成された門形ラーメン(計5体)の面内座屈崩壊に関する耐荷力実験から、以下のことが明らかになった。

- 門形ラーメン供試体はすべて側方変位無拘束の座屈モードで崩壊し、その座屈モードは柱の初期たわ

みモードに類似していた。

b) $\bar{\lambda}_y$ および R_F が大きいほど、座屈強度および終局強度は低下する。

c) $\bar{\lambda}_y$ が大きくなると、座屈強度と終局強度との差異が大きくなり、座屈後の余剰耐荷力は大きくなる傾向にあった。

(3)解析と実験とを通じて、門形ラーメンの座屈強度、終局強度、および有効座屈長について検討した結果、以下の諸点が明らかになった。

a) 座屈強度の実験値と解析値とは、良好な一致を示した。

b) 終局強度の実験値は、局部座屈を考慮しない解析値とよく一致した。

c) 局部座屈を考慮した終局強度の解析値は、供試体のフランジ・プレート初期たわみが小さかったことにより、実験値よりも若干小さい安全側の値となった。

d) 座屈強度から求めた有効座屈長係数 β の実験値と解析値とは、比較的よく一致した。

e) JSHBによる β 値は、実験値および解析値に対して、かなり大きい値を与える。その結果、JSHBによる各供試体の基準耐荷力は、座屈強度の実験値および解析値に対してかなり安全側の値を与えることがわかった。

f) β 値は、 K および $\bar{\lambda}_{oy}$ ($\beta = 1$ に対する細長比パラメーター) によって大きく変動する。

g) $0 < K \leq 5$ および $0 < \bar{\lambda}_{oy} \leq 0.9$ の範囲にある門形ラーメンの β 値の取り方を示した。

謝 辞：本研究を実施するにあたり、大阪大学 小松定夫教授のご助言を賜ったこと、また実験には、大阪市立大学・工学部 大学院生 大垣賀津雄君のご協力を得たことを付記し、ここに感謝の意を表する次第である。

付 録ー曲げモーメント M と曲率 ϕ との関係

箱形断面の図心 O に作用している軸方向圧縮力 N および曲げモーメント M と軸ひずみ ϵ_o および曲率 ϕ との関係は、次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \phi \end{Bmatrix} \quad \dots (A.1)$$

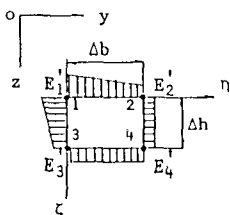


Fig. I Distribution of Young's modulus E' in cross-sectional element

ここに、

$$D_{11} = \int_A E' dA, \quad D_{22} = \int_A E' Z^2 dA, \quad D_{12} = D_{21} = \int_A E' Z dA \quad \dots (A.2) a \sim c$$

$$\left. \begin{aligned} E' &= E \text{ (弾性域)}, E' = \alpha_o \cdot E + (1 - \alpha_o) \cdot E_t \text{ (非弾性域)} \\ \alpha_o &= (\epsilon_y - \epsilon_r) / \epsilon \end{aligned} \right\} \dots (A.3) a \sim c$$

ただし、 ϵ_y :降伏ひずみ($=\sigma_y/E$)、 ϵ_r :残留ひずみ、 ϵ :作用ひずみである。

式(A.2)の数値積分を行うために、本文で述べたように、まず箱形断面を細分割する。そして、Fig. Iに示すように、分割した矩形要素の四隅の点のヤング係数 $E'_1 \sim E'_4$ を式(A.3)a, bより求め、 E' は矩形要素内で線形分布するものとする、次式が成り立つ。

$$E' = (1 - \frac{n}{\Delta b}) (1 - \frac{\xi}{\Delta h}) E_1' + \frac{n}{\Delta b} (1 - \frac{\xi}{\Delta h}) E_2' + (1 - \frac{n}{\Delta b}) \frac{\xi}{\Delta h} E_3' + \frac{n}{\Delta b} \frac{\xi}{\Delta h} E_4' \quad \dots (A.4)$$

上式を用いて、細分割した各矩形要素のヤング係数 E' を求めれば、式(A.2) は数値的に積分できる。そして、ラーメンの解析によって得られる部材要素の断面力 N および M に対して、式(A.1) を満足する ε_0 および ϕ を求めると、 $M-\phi$ 関係としては、次式を用いることができる。

$$M = E \cdot I_e \cdot \phi \quad \dots (A.5)$$

ここに、 $E \cdot I_e$: 断面の図心上の軸ひずみ ε_0 と曲率 ϕ とに関する換算曲げ剛度である。

参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ，鋼橋編、丸善、昭和55年2月。
- 2) British Standards Institution : BS5400, Steel, concrete and composite bridges, Part 3, Code of practice for steel bridges, April, 1982.
- 3) European Convention for Constructional Steelwork : European Recommendations for Steel Construction, March 1978 .
- 4) DIN 18800 Teil II : Norm-Vorlage, Stabilitäts fälle im Stahlbau, Knicken und Stabwerken, Juli 1979 .
- 5) 中井博、河井章好、吉川紀、北田俊行、酒造敏廣：鋼製ラーメン橋脚の実績調査（上）、（下）、橋梁と基礎、1982年6月、pp.35~40、および7月、pp.43 ~49.
- 6) 若林実、松井千秋：鉄骨ラーメンの弾塑性安定に関する実験的研究、その1~3、日本建築学会論文報告集、昭和47年2月、pp.11 ~21、3月、pp.17 ~27、および4月、pp.9~19.
- 7) 日本鋼構造協会技術委員会、塑性設計小委員会編集：塑性設計の現状と将来の展望、JSSC, Vol.16, No. 55, 1970
- 8) Nakai, H., Kitada, T. and Miki, T.: Ultimate Strength of Thin-walled Box Stub-Columns, Proc. of JSCE (to be published).
- 9) 中井博、北田俊行、酒造敏廣、阪野雅則：圧縮と曲げを受ける箱形断面柱部材の終局強度相関曲線について、土木学会年次学術講演会概要集、1984年10月
- 10) 小松定夫、北田俊行：初期不整を有する圧縮板の極限強度特性に関する研究、土木学会論文報告集、No.270、1978年 2月、pp. 1 ~14.
- 11) Shultz, G.: Die Traglastberechnung von planmäßig mittig belasteten Druckstäben aus Baustahl unter Berücksichtigung von geomerischen und strukturellen Imperfektionen, Dissertation, T.H.Graz, Juni 1968.
- 12) 福本湧士、宇佐美勉、青木徹彦：溶接箱形断面柱の局部座屈と全体座屈の連成強度に関する研究、土木学会論文報告集、No.308、1981年 4月、pp. 47~58.