

圧縮矩形板の弾性大たわみの 一予測法について

ON PREDICTION OF ELASTIC LARGE DEFLECTION OF COMPRESSED RECTANGULAR PLATES

丹羽義次 * 渡辺英一 ** 勇秀憲 ***

By Yoshiji NIWA *, Eiichi WATANABE ** and Hidenori ISAMI ***

This paper is concerned with a simplified postbuckling analysis of compressed rectangular steel plates through the catastrophe theory with discretization and modal transforms. The initial postbuckling curves are explicitly determined from only stability characteristics at a critical point of bifurcation without resort to solving non-linear equations. Several numerical illustrations are demonstrated for compressed square plates with various supporting conditions under two types of loading edge conditions in the postbuckling range. The results are compared excellently with those of previous works.

1. まえがき

土木鋼構造物の多くは、その構成要素として板要素を含んでいる。こうした板要素は、柱、梁やシェルには一般に見られない後座屈挙動を有することがよく知られている。この挙動は、終局強度、疲労強度および耐震振動問題に大きく影響を及ぼすが、この問題は既にかかなり古典的な問題になっており、非常に多くの研究者たちによってその挙動予測が行われてきた。まず薄板要素の弾性大変形に対する基礎方程式は von Kármán によってはじめて誘導され、Marguerre により初期曲率を持つ板要素に拡張され、その解析解を Timoshenko (1) は Fourier 級数の係数から定めた。Coan、八巻や Rhodes は初期曲率を有する矩形圧縮板の後座屈挙動をいろいろな境界条件・支持条件に対し Marguerre 方程式を数値的に解くことにより明らかにした (2, 3, 4)。さらに、Williams らは摂動アプローチと差分解析に基づき陽な形の後座屈解を示している (5)。

本論文は、カタストロフィー理論の基礎知識に基づき、面内圧縮力を受ける板要素の弾性大たわみ非線形挙動を推定するものである (6-10)。本解法の目的は、離散化された板要素に対しモード変換法を適用することにより、完全系および不完全系板要素の後座屈を含む大変形挙動特性を、臨界座屈点での安定性に関する諸性質だけから予測することである。そのとき、大自由度の非線形連立釣り合い方程式の解を逐次追跡するいわゆる非線形解法は一切必要としなくても、陽な形の非線形釣り合い経路を適当な大たわみ領域内で定める

* 工博 京都大学教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

** Ph.D. 京都大学助教授 工学部土木工学科 (〒606 京都市左京区吉田本町)

*** 工修 高知高専助手 土木工学科 (〒783 高知県南国市物部乙 200番1)

ことができる。本論文では、特に静的縮合法と後座屈制御方式について詳細に述べる。例として、圧縮正方形板に対する数値結果を既往の研究成果と比較することにより、本法の妥当性を明確にする。

2. カタストロフィー解析法

離散化された構造系の静的不安定現象に対し、カタストロフィー理論に基づく数値解法を定式化する。本解析法は、主に静的縮合法とモード変換による低次元化の2つのステップから成る。

離散化された構造系（一軸圧縮矩形板）のポテンシャル関数は次の多項式で表現される。

$$U(u_i, w_j, \Lambda, \bar{w}_k) \equiv \frac{1}{2} K_{ij}^P u_i u_j + \frac{1}{2} K_{ij}^B w_i w_j + \frac{1}{2} K_{kij}^{PB} u_k w_i w_j + K_{kij}^{PB} u_k w_i \bar{w}_j + K_{ijk\ell}^{BB} w_i w_j w_k w_\ell - P_i(\Lambda) u_i \quad (1)$$

ここに、 u_i 、 w_j および $\bar{w}_k$ はそれぞれ面内・面外節点変位および初期面外節点変位を示す。大文字 K は線形・非線形の剛性行列を表し、上添字 P と B はそれぞれ面内と面外に対応している。また、 $P_i(\Lambda)$ は面内等価節点荷重であり、ここではある単一荷重パラメータ Λ の既知な線形関数であるものとする。なお、本論文では式中の下添字はすべて総和規約に従う：面内は、 $1 \sim M$ 、面外は、 $1 \sim N$ である。

このとき、板モデルの面内および面外の釣り合い方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial u_i} = K_{ij}^P u_j + \frac{1}{2} K_{ijk}^{PB} w_j w_k + K_{ijk}^{PB} w_j \bar{w}_k - P_i(\Lambda) = 0 \quad (i=1, \dots, M) \quad (2a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial w_i} = K_{ij}^B w_j + K_{kij}^{PB} u_k w_j + K_{kij}^{PB} u_k \bar{w}_j + \frac{1}{2} K_{ijk\ell}^{BB} w_j w_k w_\ell = 0 \quad (i=1, \dots, N) \quad (2b)$$

面内変位 u_j を消去するために、上の第1式より面内変位 u_j を求めると、

$$u_j = F_{jm} P_m(\Lambda) - \frac{1}{2} F_{jm} K_{mk\ell}^{PB} w_k w_\ell - F_{jm} K_{mk\ell}^{PB} w_k \bar{w}_\ell \quad (j=1, \dots, M) \quad (3)$$

ここに、

$$F_{jm} \equiv [K_{mj}^P]^{-1} \quad (j, m=1, \dots, M)$$

さて、後座屈領域において (A) 荷重制御、(B) 変位制御の2つの一様圧縮面内制御方式を考える（以後、後座屈制御方式と呼ぶ）。前者は分岐後も面内圧縮応力分布が一様で、後者は載荷辺の圧縮方向面内変位を一様に保つものでいわゆる「平押条件」である。これら2つの後座屈制御方式を次式で与える。

$$(A) \quad P_m(\Lambda) \equiv \Lambda P_{om} \quad (m=1, \dots, M) \quad P_{om}: \text{一様荷重モード} \quad (4a)$$

$$(B) \quad P_m(\Lambda) \equiv \Lambda P_{om} + \lambda_m \quad (m=1, \dots, M) \quad \begin{cases} \lambda_m \neq 0 & (m=\alpha=1, \dots, M_c) \\ \lambda_m = 0 & (\text{others}) \end{cases} \quad (4b)$$

ここに、 λ_m は載荷辺上の M_c 個の面内変位拘束による対応節点荷重である。定式化の上では (A) は (B) に含まれるので以後 (B) について数値定式化を進める。

いま、 M_c 個の面内変位拘束条件（平押）を次式で与える。

$$u_\alpha = f_{\alpha m} u_m \quad (\alpha=1, \dots, M_c; \alpha \neq m, m=1, \dots, M_b) \quad (5)$$

ここに、 M_b は載荷辺上の荷重既知節点数を示す。式 (5) に式 (3), (4b) を代入すると拘束対応荷重 λ_α は

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2} G_{\alpha k} K_{k\ell m}^{PB} w_\ell w_m + G_{\alpha k} K_{k\ell m}^{PB} w_\ell \bar{w}_m - \Lambda G_{\alpha k} P_{ok} \quad (\alpha=1, \dots, M_c) \quad (6)$$

ここに、

$$\begin{aligned} G_{\alpha k} &\equiv H_{\alpha\beta}^* H_{\beta k} & (\alpha, \beta=1, \dots, M_c; k=1, \dots, M) \\ H_{\alpha\beta}^* &\equiv [H_{\beta\alpha}]^{-1} & (\alpha, \beta=1, \dots, M_c) \\ H_{\alpha m} &\equiv F_{\alpha m} - f_{\alpha p} F_{pm} & (\alpha=1, \dots, M_c; m=1, \dots, M; \alpha \neq p; p=1, \dots, M_b) \end{aligned}$$

これを式 (4b) に代入し式 (3) を改めて書くと、

$$u_j = \Lambda F_{jm}^* P_{om} - \frac{1}{2} F_{jm}^* K_{mk\ell}^{PB} w_k w_\ell - F_{jm}^* K_{mk\ell}^{PB} w_k \bar{w}_\ell \quad (j=1, \dots, M) \quad (7)$$

ここに、

$$F_{jm}^* \equiv F_{jm} - F_{j\alpha} G_{\alpha m} \quad (j, m=1, \dots, M; \alpha=1, \dots, M_c)$$

結局、(A) と (B) の条件は式 (3) と (7) の F_{jm} と F_{jm}^* の相違に帰着する。もちろん式 (7) は (A) のときの式 (3) を包含している。

したがって、式 (7) を式 (2b) に代入し面内変位 u_j を消去する「静的縮合」の結果、臨界分岐現象を本質的に表現できる面外変位 w_i のみの釣り合い方程式が次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial w_i} &= \frac{1}{2} (K_{ijk\ell}^{BB} - K_{mij}^{PB} F_{mn}^* K_{nkl}^{PB}) w_j w_k w_\ell \\ &\quad + (K_{ij}^B + K_{kij}^{PB} F_{km}^* P_{om}) w_j + K_{kij}^{PB} F_{km}^* P_{om} \bar{w}_j \quad (i=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の第 2 項に含まれる座屈固有値問題より、 $w_j = \bar{w}_j = 0$ において臨界分岐点が求められる。そして、 N_e 個の低次の座屈固有値 Λ に対応する座屈モード ϕ_{ij} を用いて、以下のように自由度低減を実行する。つまり、位相幾何学的に「微分位相同型」なモード変換

$$w_i = \phi_{ij} v_j, \quad \bar{w}_i = \phi_{ij} \bar{v}_j \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, N_e) \quad (9)$$

により低次元化されたポテンシャル関数 V を使うと、その釣り合い方程式の陽な多項式表現は、

$$\frac{\partial V}{\partial v_i} = \frac{1}{2} \left(\tilde{K}_{ijkl}^{BB} - \tilde{K}_{ijkl}^{BPB} \right) v_j v_k v_l + \left(\tilde{K}_{ij}^B - \tilde{K}_{ij}^G \right) v_j - \tilde{K}_{ij}^G \bar{v}_j = 0 \quad (i=1, \dots, N_e) \quad (10)$$

ここに、上添字 $\sim$ の諸量は以下に定義される。

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{ijkl}^{BB} &\equiv K_{mnpq}^{BB} \phi_{mi} \phi_{nj} \phi_{kp} \phi_{lq}, & \tilde{K}_{ij}^G &\equiv -K_{smn}^{PB} F_{st}^* P_{ot} \phi_{mi} \phi_{nj}, \\ \tilde{K}_{ijkl}^{BPB} &\equiv K_{smn}^{PB} F_{st}^* K_{tpq}^{PB} \phi_{mi} \phi_{nj} \phi_{kp} \phi_{lq}, & \tilde{K}_{ij}^B &\equiv K_{mn}^B \phi_{mi} \phi_{nj}. \end{aligned}$$

さらに、「陰関数定理」と「分裂補題」を純数学的に適用し、対象とする静的不安定現象に関与する座屈たわみモードの大きさのみで記述された残余ポテンシャル関数 A を求めることができる。もちろん「写像の特異点論」を使えば、カタストロフィー分岐集合として初期不整の敏感度曲線が得られるが、本論文ではこれ以上は言及しない (6 ~ 12)。

一軸圧縮板モデルの臨界座屈分岐点は安定対称座屈点であることはすでに示されている (6, 9)。いま、一次初期たわみモードを $\bar{v}_1 = \epsilon$ 、対応する全一次座屈たわみモードを $v_1 + \epsilon = x$ 、荷重パラメータを Λ で示すと、臨界座屈分岐点近傍のポテンシャル関数が x に関する Taylor 展開の形で陽に定義できる。

$$A(x, \Lambda, \epsilon) \equiv \frac{1}{24} A_{1111}^C x^4 + \frac{1}{2} A_{11}^{OC} (\Lambda - \Lambda_{cr}) x^2 + A_1^{1C} x \epsilon \quad (11)$$

ここに、Taylor 係数 A_{1111}^C 、 A_{11}^{OC} および A_1^{1C} はこの点において具体的には式 (10) より評価できる。したがって、この座屈点近傍の釣り合い式は

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{6} A_{1111}^C x^3 + A_{11}^{OC} (\Lambda - \Lambda_{cr}) x + A_1^{1C} \epsilon = 0 \quad (12)$$

ゆえに、非線形釣り合い径路は陽な解として次のように求められる。

$$\frac{\Lambda}{\Lambda_{cr}} = 1 + C_\epsilon x^2 + C_\epsilon \left(\frac{\epsilon}{x} \right) \quad (13)$$

ここに、

$$C_\epsilon \equiv \frac{-A_{1111}^C}{6A_{11}^{OC}\Lambda_{cr}}, \quad C_\epsilon \equiv \frac{-A_1^{1C}}{A_{11}^{OC}\Lambda_{cr}}$$

一方、(B)の後座屈変位制御(平押)の場合、制御・拘束された載荷辺上の反力としての全荷重の大きさ P は、(A)荷重制御のように $P = n \Lambda$ ではなく、式 (6), (4b) から圧縮を正として M_b と M_c を用いて

$$\begin{aligned}
 P &= - \sum_{m=1}^{M_b} \Lambda P_{om} - \sum_{\alpha=1}^{M_c} P_{\alpha}(\Lambda) \\
 &= - \sum_{m=1}^{M_b} \Lambda (P_{om} - \sum_{\alpha=1}^{M_c} G_{\alpha m} P_{om}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{M_c} G_{\alpha k} K_{k\ell m}^{PB} w_{\ell} w_m - \sum_{\alpha=1}^{M_c} G_{\alpha k} K_{k\ell m}^{PB} w_{\ell} \bar{w}_m
 \end{aligned} \quad (14)$$

さらに式 (9) のモード変換を適用し上記のように $\bar{v}_1 = \varepsilon$ 、 $v_1 + \varepsilon = x$ とおき、 $x = \varepsilon = 0$ で理論的・数値的に式 (14) の右辺第一項が $n \Lambda$ (n : 横方向要素分割数) となり、

$$P = n \Lambda - C_d' x^2 + C_d' \varepsilon^2 \quad (15)$$

ここに、

$$C_d' \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{M_c} G_{\alpha k} K_{k\ell m}^{PB} \phi_{\ell 1} \phi_{m1}$$

したがって、式 (13), (15) から荷重パラメータ Λ を消去し ε^2 の項を無視すると、結局求めるべき非線形釣り合い径路は後座屈径路を含めて以下のように表現できる。

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + C x^2 + C_{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{x} \right) \quad (16)$$

ここに、

$$P_{cr} \equiv n \Lambda_{cr}, \quad C \equiv C_{\ell} - C_d, \quad C_d \equiv \frac{C_d'}{n \Lambda_{cr}}$$

式 (16) は、(B)後座屈変位制御方式の場合の解である。同様にして (A)後座屈荷重制御方式の解は (B)の各式 (10), (11), (12) の F_{jm}^* を F_{jm} に置換えて評価することにより、式 (13) の Λ を P で記した形あるいは式 (16) の $C_d = 0$ と置いた形で表現されるものである。式 (16) が (A), (B) をいずれも包含しているといえる。

3. 圧縮正方形板

前節で定式化したカタストロフィー解析法を、ACM形状関数を持つ有限要素法(FEMと記す)と山田らによって提案された線形状関数を用いた簡易化要素法(SEM) (13) により、弾性域における一軸鋼圧縮正方形板の後座屈および大たわみ非線形径路の推定に適用する。具体的には FEMと SEMの相違は式 (1) の各剛性評価に表れる。図-1 は本論文の数値計算の対象とした圧縮板モデルとその座標系を示す。圧縮方向は図のように一軸方向のみを考え、後座屈領域で (A)荷重と (B)変位の2つの制御方式に対し載荷辺上の面内境界条件を設定する。なお、非載荷辺はいずれの場合もすべて面内変位は何ら拘束されていないものとする。さらに、面外境界条件として以下の4つの代表的のものを考える: (i)周辺単純支持、(ii)載荷辺単純支持・非載荷辺固定支持、(iii)載荷辺固定支持・非載荷辺単純支持、(iv)周辺固定支持。なお、ここで取り扱う数値計算のための幾何学的・材料的諸量は次の通りであり、一定とする。

$$\alpha \equiv \frac{a}{b} = 1 \quad : \text{縦横比}$$

$$\nu \equiv \frac{1}{3} \quad : \text{ポアソン比}$$

$$\beta \equiv \frac{b}{t} = 100 \quad : \text{幅厚比}$$

$$\zeta \equiv \frac{E}{\sigma_Y} = 875 \quad : \text{材料定数}$$

$$R \equiv \frac{b}{t} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 K} \frac{\sigma_Y}{E}} = 1.757$$

(K=4)

: 一般化幅厚比

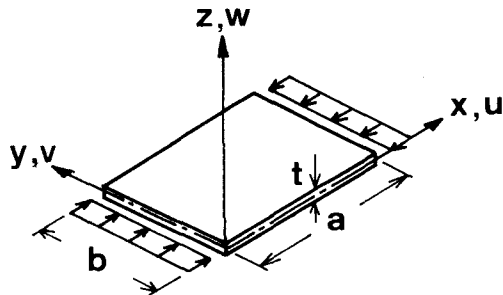


図-1 圧縮正方形板モデル

数値計算はすべて、無次元化されたポテンシャル関数 (1) に基づき結局式 (16) により、完全系 ($\varepsilon = 0$) の放物線後座屈径路と不完全系 ($\varepsilon \neq 0$) の典型的な大たわみ非線形径路が、上記 4 つの面外境界条件に対し求められる。

ここでは、特に面外境界条件 (i) の場合の後座屈変位制御方式に対する数値計算結果を、FEMと SEMについてそれぞれ表-1と表-2に示す。表中第1行目と第2行目はそれぞれ離散化要素数と面内・面外全自由度数を表す。FEMでは最大面外自由度 175 の最大要素 64 まで、SEMでは最大面外自由度 81 の最大要素 100 までの数値計算を実行した。同様の結果が、残りの面外境界条件(ii)～(iv)に対して、また後座屈荷重制御方式に対しても求められる。なお、数値計算では面外たわみおよび初期面外たわみは一次座屈モードのみを対象にし、その大きさを最大 1 に調整している。したがって、離散化の際の要素分割数が奇数か偶数かに依存した結果になる。そのため、このままの数値結果では奇数要素分割の場合 3, 5, 7, 9 には、最大面外たわみモードを 1 に規定した八巻らの結果に対応していない。

これらの結果から、まず弾性座屈係数 k と安定性曲率 C のそれぞれ離散化分割数に対する収束性を定性的かつ定量的に議論してみよう。後座屈変位制御方式に対し、図-2と図-3はそれぞれ面外境界条件 (i) と (iv) に関する k と C の収束特性を表現したものである。図中、横軸は全分割要素数、左側縦軸は安定性曲率 C を示し、右側縦軸は弾性座屈係数 k の Timoshenko の解 k_c との比を示す。同様の図が、制御方式および面外境界条件に関して各々描くことができる。

弾性座屈係数 k は面外境界条件にかかわらず Timoshenko の解 k_c に定性的・定量的に収束している。つまり、 k の値は全要素数の増大とともに、まるで k_c が上界値であるかのように漸近する。 k に対する SEMと FEMの結果を比較すると、境界条件 (i) を除き、前者の方が k_c に急速に収束するが、後者の方がほんの少し精度が高い。(i) の条件では、要素数の増大にかかわらず前者の方が精度よく収束する傾向にある。しかしながら、最大要素数において両離散化手法ともその精度は高く k_c の約 8 % 以内にある。

次に、安定性曲率 C について考える。面外境界条件に関係なく、曲率 C はある下界値に収束しているように見える。また、どの境界条件に対しても SEMの方が FEMより急速な収束性を示す。また、後者は前者に比べてまだ収束途中にあり、少し過大評価される傾向が伺われる。さらに、表-1と2から面外境界条件 (i) では SEM 100 要素と FEM 64 要素の面外自由度数はそれぞれ 81 と 175 であり、FEMが SEMの 2 倍以上もの節点自由度を持っていることから、その数値演算時間もかなり膨大なものとなる。しかしながら、求めるべき安定性曲率 C はそれほど妥当な値にまで十分に収束していないようである。また、要素分割数が奇数の場合 3, 5, ... (要素数 9, 25, ...) に C が大き目に算定されているのは、本論文では前述したように分割節点において

表-1 座屈係数・安定性曲率（周辺単純支持正方形板） — 有限要素法 —

	3 X 3	4 X 4	5 X 5	6 X 6	7 X 7	8 X 8
D.O.F.	47 (27,20)	83 (44,39)	129 (65,64)	185 (90,95)	251 (119,132)	327 (152,175)
P_{cr}	29.188	30.421	31.072	31.450	31.686	31.834
Λ_{cr}	9.729	7.605	6.214	5.242	4.527	3.979
k	3.605	3.757	3.838	3.884	3.914	3.932
mode	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
A_{11}^{oc}	-0.129	-0.098	-0.150	-0.148	-0.191	-0.197
A_1^{1c}	-1.257	-0.750	-0.934	-0.774	-0.864	-0.785
A_{1111}^c	7.344	2.133	3.005	1.959	2.427	2.093
C_ℓ	0.974	0.477	0.536	0.421	0.468	0.444
C_d	0.204	0.129	0.152	0.116	0.120	0.101
C_ε	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
C	0.770	0.348	0.384	0.305	0.348	0.343

表-2 座屈係数・安定性曲率（周辺単純支持正方形板） — 簡易化要素法 —

	3 X 3	4 X 4	5 X 5	6 X 6	7 X 7	8 X 8	9 X 9	10 X 10
D.O.F.	31 (27,4)	53 (44,9)	81 (65,16)	115 (90,25)	155 (119,36)	201 (152,49)	253 (189,64)	311 (220,81)
P_{cr}	31.008	31.585	31.864	32.021	32.117	32.179	32.264	32.248
Λ_{cr}	10.336	7.896	6.373	5.337	4.588	4.022	3.580	3.224
k	3.830	3.902	3.936	3.955	3.967	3.974	3.979	3.983
mode	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
A_{11}^{oc}	-0.100	-0.084	-0.137	-0.138	-0.182	-0.190	-0.229	-0.241
A_1^{1c}	-1.034	-0.668	-0.871	-0.738	-0.834	-0.764	-0.820	-0.776
A_{1111}^c	4.189	1.476	2.293	1.548	1.890	1.527	1.707	1.491
C_ℓ	0.675	0.368	0.439	0.350	0.378	0.333	0.347	0.320
C_d	0.175	0.116	0.141	0.110	0.115	0.098	0.099	0.088
C_ε	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000	-1.000
C	0.500	0.252	0.298	0.239	0.262	0.235	0.249	0.232

D.O.F. : 全自由度数（面内自由度数，面外自由度数）

P_{cr} : 一次座屈全荷重

Λ_{cr} : 無次元化一次座屈荷重パラメータ

k : 一次座屈係数

mode (m,n) : 一次座屈モード（x，y方向にm，n半波長；図-1）

$A_{1111}^c, A_{11}^{oc}, A_1^{1c}$: 式(11)のTaylor係数

C_ℓ : 安定性曲率 式(13)

C_d : 面内変位拘束係数 式(16)

C_ε : 初期不整係数 式(13)

C : 安定性曲率 式(16)

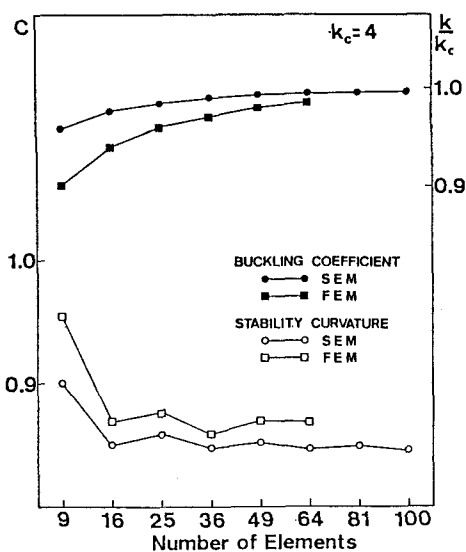


図-2 座屈係数 k ・安定性曲率 C の収束性
(周辺単純支持、正方形板)

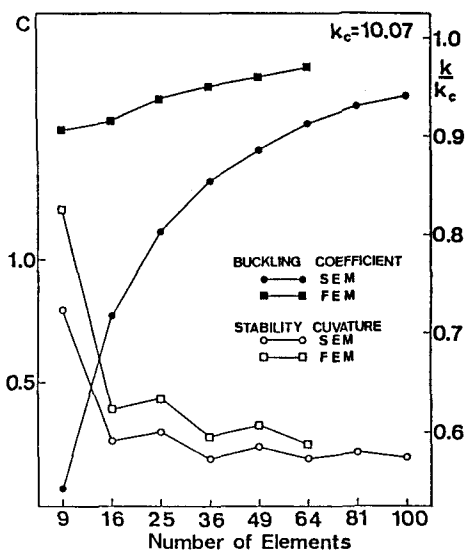


図-3 座屈係数 k ・安定性曲率 C の収束性
(周辺固定支持、正方形板)

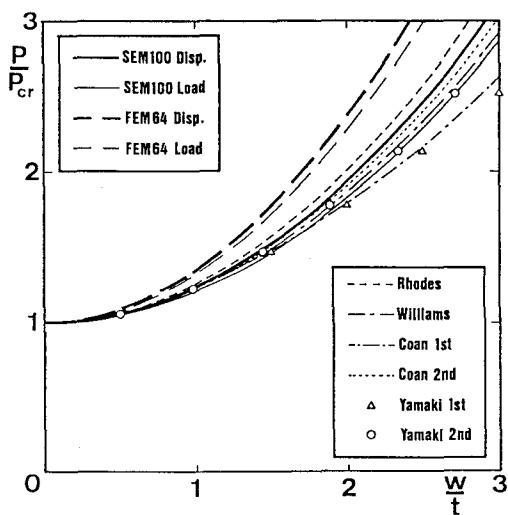


図-4 (a) 荷重-面外たわみ曲線
(周辺単純支持、正方形板)

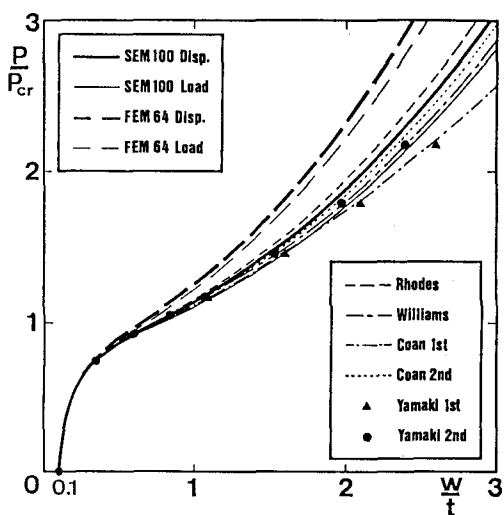


図-4 (b) 荷重-面外たわみ曲線
(周辺単純支持、正方形板)

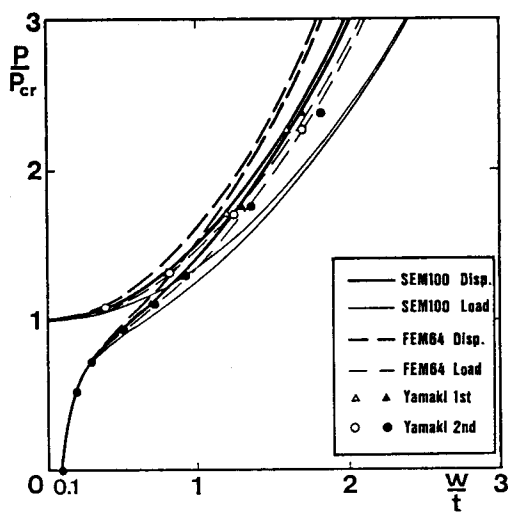


図-5 荷重-面外たわみ曲線
(載荷辺単純支持・非載荷辺固定支持、正方形板)

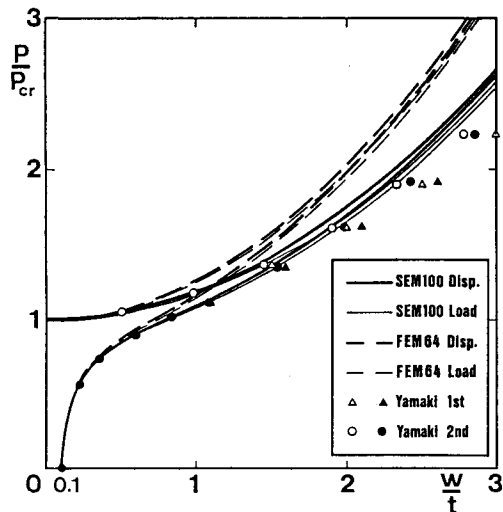


図-6 荷重-面外たわみ曲線
(載荷辺固定支持・非載荷辺単純支持、正方形板)

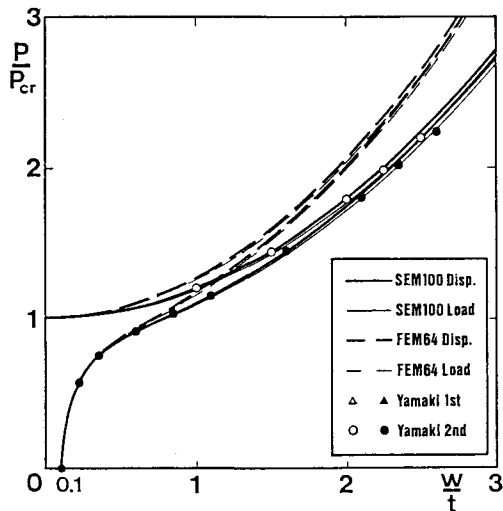


図-7 荷重-面外たわみ曲線
(周辺固定支持、正方形板)

一次座屈たわみモードの最大の大きさを1に調整したことによる。

式(13)あるいは式(16)を用いた釣り合い曲線、後座屈放物線径路と典型的な大たわみ非線形径路の結果は、図-4から図-7に描かれている。FEM 64要素とSEM 100要素の本数値計算結果による曲線と八巻、Coan、Williams、Rhodesらの結果とが比較して示されている。また、後座屈制御方式による違いも図中に表現されている。図-4(a)・(b), 5, 6および7はそれぞれ面外境界条件(i), (ii), (iii)および(iv)に対応している。ここに、横軸は一次座屈たわみモードの大きさ $x = W/t$ (t : 板厚)、縦軸は全荷重 P/P_{cr} を表す。大たわみ非線形径路としては、一次初期たわみモードの大きさを $\epsilon = W_0/t = 0.1$ を取り上げて計算した。

図-4(a)と(b)は、面外境界条件(i)のときの後座屈釣り合い径路と典型大たわみ非線形径路を示す。八巻、Coan、RhodesおよびWilliamsの釣り合い径路と、本評価法のSEM 100要素・FEM 64要素とを比較している。八巻とCoanに関しては、関与する座屈たわみモードの1次だけを考慮したものを1次解、さらに2次以上の高次座屈たわみモードをも含んだものを2次解として描いた。比較的小さな面外たわみ $W/t < 1.5$ の範囲では、いずれの面外境界条件および制御方式に対してもSEMによる本解法は、Coan、八巻、Williams、Rhodesらの結果によく一致している。本評価法SEMの解は1次座屈面外たわみモードのみを対象にしているにもかかわらず、既往の研究結果に十分精度よく一致している。また図-5, 6, 7は同じように本解析法と八巻の解を比較している。これら5つの結果から、弾性圧縮板要素の大たわみ非線形挙動の推定に、SEMによる本評価法が適用できるものと思われる。

カタストロフィー解析法は、座屈臨界点近傍のポテンシャル関数のたわみに関するTaylor展開を用いてその点における安定特性だけを評価することにより、対象とする構造系の大変形挙動を推定するものである。

座屈臨界点においては、(A)荷重方式の場合も(B)変位方式と同じように載荷辺上の面内変位は一様に拘束されており、いわゆる「平押条件」は満足されている。前者は座屈臨界点で面内圧縮方向変位 u がその方向に線形に分布している場合を扱っていることになり、座屈後に載荷荷重が一様であるような非現実的な非線形解析のものとは本質的に異なる。図-5の面外境界条件(ii)を除き、面外境界条件とは関係なく、比較的小さな面外たわみ $W/t < 1.5$ では(B)変位方式が、また、かなり大きな面外たわみ $W/t > 1.5$ では(A)荷重方式が八巻の数値解をよく近似している。しかしながら、その相違は定性的には言うまでもなく定量的にもほとんどない。なお、前述したように図-5の面外境界条件の場合は(B)変位方式の方が、全領域にわたって八巻の解に近い。

なお、式(7), (9), (15)等より荷重載荷辺上の平均軸圧縮方向面内変位と P (あるいは Λ) やたわみモード x との関係が得られる。また、式(14)を参考にすると式(4), (6)より $P_{\alpha}(\Lambda)$ は反力としての載荷辺上の圧縮方向の応力分布そのものに対応することになる。

4. 結 論

鋼圧縮矩形板要素の弾性非線形挙動は、カタストロフィー理論を適用した離散化手法とモード変換法を用い、座屈臨界点の構造安定特性のみを評価することにより推定できる。既往の解析的研究との比較により、以下のような結論が得られた。

- (1) 本解析法は、荷重と変位の2つの後座屈制御方式に関し次の4つの面外たわみ境界条件を有する鋼圧縮正方形板に対し適用された：(i)周辺単純支持、(ii)載荷辺単純支持・非載荷辺固定支持、(iii)載荷辺固定支持・非載荷辺単純支持、(iv)周辺固定支持。
- (2) 板要素の変形剛性評価のために、ここでは離散化手法として、ACM形状関数を持つ有限要素法と線形形状関数による簡易化要素法を用いた。

- (3) モード変換法は、多自由度系構造物の不安定現象を1・2自由度系のそれへ低次元化するために、また純数学的には「微分位相同型写像」として採用された。
- (4) 弾性座屈係数は、後座屈制御方式や面外境界条件に対し、離散分割要素数の増大とともにTimoshenkoの解に十分な精度で収束する。
- (5) 一次座屈モードに対する後座屈経路および典型的なたわみ非線形釣り合い経路は、非線形連立方程式を逐次に解くことなく、カタストロフィー理論により座屈臨界点近傍のポテンシャル関数のたわみに関するTaylor展開から容易に求められる。
- (6) その結果はいわゆる荷重-たわみ曲線を与えられ、荷重がたわみモードと初期たわみモードの陽な形の関数として表現できる。そして、この経路は典型として適当な初期たわみおよびたわみの大きさに対し既往の研究成果に十分に精度よく一致する。
- (7) 本解析法は、離散化手法の種類に関係なく、ある卓越した1・2の座屈モードで分岐座屈現象を呈する離散化構造系に対し一般的に適用できるものと思われる。
- (8) さらに、線形・非線形の座屈前基本釣り合い経路を持つアーチやシェル等の構造系に対しても、その基本経路からの摂動としてのポテンシャル関数を定義することにより、本解析法は同様に適用できるものと思われる。

5. 参考文献

- 1) Timoshenko, S. P. and J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Edition. Mc-Graw Hill, 1962.
- 2) Coan, J. M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvatures loaded in edge compression. J. Applied Mech., ASME, Vol. 18, pp. 143-151, 1951.
- 3) Yamaki, N. : Postbuckling behavior of rectangular plates with small initial curvatures loaded in edge compression. J. Applied Mech., ASME, Vol. 26, pp. 407-414, 1959.
- 4) Rhodes, J., J. M. Harvey and W. C. Fok : The load-carrying capacity of initially imperfect eccentrically loaded plates. Int. J. Mech. Sci., Vol. 17, pp. 161-175, 1975.
- 5) Williams, D. G. and A. C. Walker : Explicit solutions for plate buckling analysis. J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 103, No. EM4, pp. 549-568, 1977.
- 6) Niwa, Y., E. Watanabe and H. Isami : Catastrophe analysis of structures by discretization and modal transforms. Mem. Fac. Engg, Kyoto University, Vol. 43, pp. 67-87, 1981.
- 7) Thom, R. : Structural Stability and Morphogenesis, Benjamin, Massachusetts, 1975.
- 8) 野口 広・福田 拓生 : 初等カタストロフィー. 共立全書, 208, 1976.
- 9) Thompson, J. M. T. and G. W. Hunt : Elastic Instability Phenomena. John Wiley & Sons, 1984.
- 10) Poston, T. and I. Stewart : Catastrophe Theory and Its Applications. Pitman, 1978.
- 11) Niwa, Y., E. Watanabe and H. Isami : Catastrophes of elastic column structures. Mem. Fac. Engg., Kyoto University, Vol. 45, pp. 71-97, 1983.
- 12) Isami, H. : A topological aspect of imperfection sensitivity of structures. Bull. Kochi Tech. College, No. 20, pp. 85-94, 1984.
- 13) Yamada, Y., E. Watanabe and R. Ito : Compressive strength of plates with closed-sectional robs. Proc. JSCE, No. 278, pp. 133-147, 1978.