

2 主桁下路プレートガーダーの全体座屈

OVERALL LATERAL BUCKLING OF THROUGH PLATE GIRDER BRIDGES

伊藤 文人* 野上 邦栄**

By Fumihito ITOH and Kuniei NOGAMI

This paper develops the strict theory on the lateral buckling of a through plate girder bridges, and simple approximate formulae for critical loads have been proposed. The validity of this theory has been examined by comparing with some experimental results, and the elastic lateral buckling loads and the load carrying capacities for the illustrative practical bridge models have been calculated.

The results have shown that the approximate formulae for critical values of symmetric and asymmetric elastic buckling under uniformly distributed load have to be useful, and that the load carrying capacities for long spans would depend on asymmetric overall lateral buckling. The symmetric buckling will be not so significant.

1. まえがき

下路プレートガーダー橋における横座屈の問題は、大きく3種に分類できそうに思われる。その第一は、最も古くから研究されてきた主桁単体としての横座屈の問題であって、これは横桁等によって拘束されたいわゆる固定点間に生じるものであるから、その意味では局部的な横座屈である。この種の問題に対して、最近では対傾構等による補剛効果についての研究が少なくない^{1) 2) 3)}。

第二の問題は、上横構が存在しないため、横桁の曲げ剛性や横桁と主桁の固定度が不充分な場合に両主桁が橋床面に対して倒れ込むような座屈であり、古くはボニートラスにおいて問題にされていた。鉄道橋の設計標準¹²⁾では、このような座屈を防ぐための規程が盛り込まれており、田島ら⁶⁾はこれについての確認実験も行っている。

第三の問題は、橋梁が全体として横座屈をする問題である。これについては、従来から断面形状保持と見做し、横構を等価な薄板に置き換え、全体を構形の梁と見做して取り扱う方法が一般的である^{4) 5) 12)}。しかし、横構がトラス形式であるとすれば、一般には板に比べて剪断変形が大きいので、鉛直軸回りの断面二次モーメントの値の求め方などに疑問の余地が残されている。

他方、西野ら¹¹⁾は、梁の横座屈に関し、座屈前の変形を考慮に加えることによって従来厳密式と見なされてきた座屈公式を修正することを提案している。その提案式は、弱軸回りのモーメントによっては横座屈

* 工博 東京都立大学教授 工学部土木工学科 (〒158 東京都世田谷区深沢2-1-1)

** 東京都立大学助手 工学部土木工学科 (〒158 東京都世田谷区深沢2-1-1)

を生じないと言う事実を明確に説明付けており、実用上の簡明さも損なわれていない。できれば下路プレートガーダー全体系の座屈に対する簡易計算式も、それと同程度の内容を持つものが得られることが望ましい。

ここでは、以上のことを考え、主として第二、第三の問題を対象にし、なるべく直感的な置き換えを避けながら、西野式と同程度の厳密さを持つ解析を行うことによって、厳密な解法と実用的な簡易計算式を得ることを目的に検討を行った。

2. 解析上の仮定

本解析において用いた仮定は、次のとおりである。

- ① 下路プレートガーダー橋は、2本の主桁、横桁および横構から構成されている。
- ② 2本並列主桁は、左右等断面で全長にわたって一様な2軸対称I型断面部材とする。
- ③ 横桁は、等間隔に配置されている。また横桁のねじり剛性と面外曲げ剛性は無視し、面内曲げ変形のみ考慮する。
- ④ 横構は、トラス形式とする。また横構部材の面外変形、曲げねじり剛性は無視し、伸び変形のみ考慮する。
- ⑤ 主桁中心間隔は、横構面で不変である。
- ⑥ 各部材は、全て一般の梁の理論に従う弾性体である。

3. 変位とひずみの表示

用いた座標系は、Fig.1に示すとおりの右手系とし、各主桁の変位は、それぞれの図心を原点とする座標系によって次式で与えられるものとする。各主桁は二軸対称であるから、剪断中心は図心に一致している。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - \theta y - \frac{1}{2} \theta^2 x \\ v &= v_s + \theta x - \frac{1}{2} \theta^2 y \\ w &= w_c - x(u'_s + v'_s \theta) - y(v'_s - u'_s \theta) + \omega \theta' \end{aligned} \right\}$$

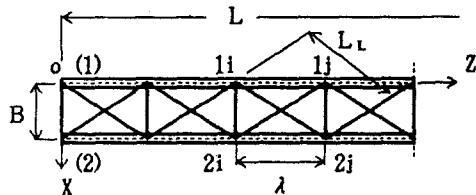
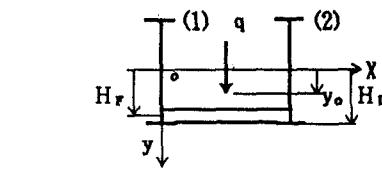


Fig.1 Coordinate System and Model of the Through Plate Girder Bridge

これらの量は、必要な場合、左下に添字として当面する主桁の番号を附して区別する。

これらは、下路プレートガーダー全体を单一の系と見做すための変位表示に変換すると便利である。そこで、全体系における断面の変形を大きく「対称」と「逆対称」に区別し、次式によって変換される量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} {}_1 u &= u^\circ + u^*, & {}_2 u &= -u^\circ + u^* \\ {}_1 v &= v^\circ + v^*, & {}_2 v &= v^\circ - v^* \\ {}_1 w &= w^\circ + w^*, & {}_2 w &= w^\circ - w^* \\ {}_1 \theta &= \theta^\circ + \theta^*, & {}_2 \theta &= -\theta^\circ + \theta^* \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

この新しい変位の上付の添字(°)はそれが橋軸を通る鉛直面に対して対称なものであり、同じく(*)は逆対称な変位であることを表すものである。

主桁のz軸方向ひずみ ε は、周知の式

$$\varepsilon = w' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

を用いる。この式はひずみを変位の導関数で級数展開して2次項まで採用したものであるから以下の解析においては、ポテンシャルにおいて3次、釣り合い方程式においては2次以下の項のみを有効と考える。

4. 全ポテンシャル

と表すことができる。他方、全体系の変位でこれを書いた場合、これらは逆対称成分を全く含まない項とその他の項に分けられ、またそのそれぞれが u_s^0, θ^0 およびそれらの導関数を含まない項と含む項に分けることができる。すなわち

$$\begin{aligned}\Pi &= \Pi_1^o(v_s^o, w_c^o) + \Pi_2^o(u_s^o, v_s^o, w_c^o, \theta^o) \\ &\quad + \Pi_1^*(v_s^*, w_c^*, u_s^*, v_s^*, w_c^*, \theta^*) + \Pi_2^*(u_s^*, v_s^*, w_c^*, \theta^*, u_s^*, v_s^*, w_c^*, \theta^*) \quad \dots \dots \dots \quad (5)\end{aligned}$$

と書ける。もし、外力の働き方が、微小変形の範囲において u^o, θ^o を発生させず、しかも橋軸に対して対称なものであれば、上式の右辺第1項は座屈前の変形を与える成分であり、第2項以下はそれぞれの変形を生じさせるような座屈に対応するものである。本研究において主眼とする横座屈は第3項に対応するものであるが、第2項の対応する対称座屈についても配慮することにする。なお第4項は第2項、第3項とともに両者の連成を表す項であって、これを取り扱うことが不可能では無いが、これは全ポテンシャル表示式の中で変位またはその導関数の3次以上の形でしか現れないで、その影響は特別な場合を除けば微小であると考え、本研究においてはこれ以上問題にしないこととする。

(1) 2本並列主樁

2本の並列する主桁に蓄えられるひずみエネルギー V_M は、各主桁の変位成分で表すと次のようになる。

$$V_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \int_0^L \left(EA \left\{ {}_k w_c'^2 + {}_k w_c' ({}_k u_s'^2 + {}_k v_s'^2) \right\} \right. \\ \left. + E I_y ({}_k u_s''^2) + E I_x ({}_k v_s''^2) + E I_\omega ({}_k \theta''^2) + G K ({}_k \theta')^2 \right. \\ \left. + 2 E (I_y - I_x) ({}_k u_s' {}_k v_s' {}_k \theta' + E (I_y + I_x) ({}_k w_c' {}_k \theta')^2) dz \right) \dots \quad (6)$$

$$H_9 = \frac{H_L A_T}{(A + A_T)} , \quad A_T = \frac{A_L \lambda^3}{\frac{1}{L}} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (8)$$

このようにすると、主軸のひずみエネルギー V_M は次のようになる。

$$V_{M_1} = \int_a^b (E A \left(\frac{W_q}{V_s} z + H_q V_s \frac{W_q}{V_s} z + 2 H_q W_q \frac{V_s}{V_s} z + \left(\frac{W_q}{V_s} + H_q V_s \right) \frac{V_s}{V_s} z \right) + E I x_k V_s \frac{W_q}{V_s} z) dz \quad (9-1)$$

$$V_{M2}^o = \int_0^L (EA \{ -2H_g w_g^{'''}(u_s^{'''}\theta^0 + u_s^{''}\theta^{''}) - 2H_g^2 v_s^{'''}(u_s^{'''}\theta^0 + u_s^{''}\theta^{''}) \\ + (w_g^{'''} + H_g v_s^{'''}) u_s^{''2} \} + EI_y u_s^{''2} + EI_w \theta^{''2} + GK \theta^{''2} \\ + 2E(I_v - I_y) u_s^{'''} \frac{\partial}{\partial z} \theta^0 + E(I_v + I_y)(w_g^{'''} + H_g v_s^{'''}) \theta^{''2}) dz \quad \dots \quad (9-2)$$

$$V_{M1}^* = \int_0^L (EA \{ \dot{w}_c^* - 2H_g \dot{v}_s^* (u_s^{**} \theta + u_s^{**} \dot{\theta}^{**}) - 2H_g^2 v_s^{**} (u_s^{**} \theta + u_s^{**} \dot{\theta}^{**}) \\ + (\dot{w}_g^* + H_g \dot{v}_s^*) (u_s^{**2} + \dot{v}_s^{**2}) + 2w_c^{**} \dot{v}_s^* v_s^{**} \} \\ + EI_y \ddot{u}_s^{**2} + EI_x \ddot{v}_s^{**2} + EI_\omega \dot{\theta}^{**2} + GK \theta^{**2} \\ + 2E(I_y - I_x) u_s^{**} \dot{v}_s^* \theta + E(I_y + I_x)(w_g^* + H_g v_s^*) \dot{\theta}^{**2}) dz \quad \dots \quad (9-3)$$

(2) 橋構

橋構は、理想的なトラスと見做し、部材には軸ひずみのみが生じるものとする。いま Fig.1 の各間($i-j$)に着目し、部材($1i-2j$)の各点変位(${}_1u_i, {}_1v_i, {}_1w_i, {}_1\theta_i$, ${}_2u_j, {}_2v_j, {}_2w_j, {}_2\theta_j$)による軸ひずみを ε_L とし、その対角部材のひずみを $\bar{\varepsilon}_L$ とすると、それぞれの軸ひずみと変位の関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_L &= \Delta w (\lambda/L_L) + \Delta u (B/L_L) + \frac{1}{2} \Delta w^2 (B/L_L)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta u^2 (\lambda/L_L)^2 + \frac{1}{2} \Delta v^2 - \Delta w \Delta u (\lambda B/L_L^2) - \dots \\ \bar{\varepsilon}_L &= \Delta \bar{w} (\lambda/L_L) - \Delta \bar{u} (B/L_L) + \frac{1}{2} \Delta \bar{w}^2 (B/L_L)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta \bar{u}^2 (\lambda/L_L)^2 + \frac{1}{2} \Delta \bar{v}^2 + \Delta \bar{w} \Delta \bar{u} (\lambda B/L_L^2) - \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (10)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \Delta w &= ({}_2w_j - {}_1w_i)/L_L, & \Delta \bar{w} &= ({}_1w_j - {}_2w_i)/L_L \\ \Delta u &= ({}_2u_j - {}_1u_i)/L_L, & \Delta \bar{u} &= ({}_1u_j - {}_2u_i)/L_L \\ \Delta v &= ({}_2v_j - {}_1v_i)/L_L, & \Delta \bar{v} &= ({}_1v_j - {}_2v_i)/L_L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (11)$$

とした。

したがって、この各間の橋構ひずみエネルギー V_{Lij}^e は

$$V_{Lij}^e = \frac{1}{2} E A_L L_L (\varepsilon_L^2 + \bar{\varepsilon}_L^2)_{ij} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (12)$$

で与えられる。ここで近似として

$$\left. \begin{aligned} w_j^o - w_i^o &= \int_{z_i}^{z_j} \bar{w}' dz, & w_j^* + w_i^* &= (2/\lambda) \int_{z_i}^{z_j} \bar{w}' dz \\ u_j^* - u_i^* &= \int_{z_i}^{z_j} \bar{u}' dz, & u_j^o + u_i^o &= (2/\lambda) \int_{z_i}^{z_j} \bar{u}' dz \\ v_j^o - v_i^o &= \int_{z_i}^{z_j} \bar{v}' dz, & v_j^* + v_i^* &= (2/\lambda) \int_{z_i}^{z_j} \bar{v}' dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (13)$$

の関係を導入すれば、橋構の全ひずみエネルギーは全長にわたる積分の形で表すことができる。さらに、仮定④によって橋構面では次式が成り立つものとする。

$$u_s^o = u_s^o - H_L \theta^o = 0 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (14)$$

これは横桁の断面積が橋構部材の断面積に比べて十分大きいと見做したことに相当する。

結果として橋構の全ひずみエネルギー V_L は、次式で与えられる。

$$V_L^o = \int_0^L E A_T \delta^o \{ \delta^o + v_s^o z + (B/L_L)^2 \delta^o z^2 \} dz \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (15-1)$$

$$V_L^o = \int_0^L 2 E A_T H_g \delta^o \{ \theta^o + \theta^o z \} dz \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (15-2)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{L1}^* &= \int_0^L [E A_s \tau^* (\gamma^* + 4 v_s^* v_s^*/B) + E A_T \delta^o \{ 2(H_L - H_g)(u_s'' \theta^* + u_s' \theta^{**}) \\ &\quad - (1 - 3B^2/L_L^2)(u_s'' - H_L \theta^{**})^2 + 12(B/L_L)^2 (w_c^*/B - H_L v_s^*/B)(u_s'' - H_L \theta^{**}) \\ &\quad + (B/\lambda)^2 (2v_s^*/B)^2 - (2B/\lambda)^2 (w_c^*/B - H_L v_s^*/B)(u_s'' - H_L \theta^{**}) \\ &\quad + 12(B^2/\lambda L_L)^2 (w_c^*/B - H_L v_s^*/B)^2 \}] dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (15-3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_s &= A_L \lambda B^2 / L_L^3 \\ \delta^o &= \bar{w}_g' + (H_g - H_L) \bar{v}_s'' \\ \tau^* &= 2 w_c^*/B - 2 H_L v_s^*/B - u_s'' + H_L \theta^{**} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (16)$$

と書いた。 δ^o より τ^* は、それぞれ橋構面の伸びひずみおよび剪断ひずみの、変位の1次項のみ採ったものに相当する。

(3) 橫桁

横桁のひずみエネルギーは、仮定⑧より曲げ変形によるひずみエネルギーのみを考える。Fig.1において、横桁 (1i-2i) の任意点 (x) における曲げモーメントMは、次式で与えられる。

$$M = - \frac{EI_F}{B} \left[6\left(\frac{x_1 V_i}{B} - \frac{z V_i}{B} \right) \left(\frac{2}{B}x - 1 \right) + 2x_1 \theta_i \left(\frac{3}{B}x - 2 \right) + 2x_2 \theta_i \left(\frac{3}{B}x - 1 \right) \right] \quad \cdot \quad (17)$$

横柄1本のひずみエネルギー $V_{F_1}^e$ は、

で与えられるので、式(17)を式(2)により変数変換し、式(18)に代入すると

$$V_{Fi}^e = \frac{2E I_F}{B^3} [12v_i^*(v_i^* + B\theta_i^*) + B^2(\theta_i^{oz} + 3\theta_i^{*z})] \quad \dots \quad (19)$$

になる。変数変換された変位 v_i^* は、式(1), 式(2)より次式で与えられる。

$$v_i^* = v_{si}^* - H_F \theta_i^* \theta_i \quad \dots \quad (20)$$

したがって、式(19)の中の v_i^* を式(20)を用いて書き直し、さらに式(13)と同様の近似によって和を積の形に書き改めると、横軸のひずみエネルギー V_F は次のように表される。

$$V_{F1}^* = (2 E I_F / B^3 \lambda) \int_0^L [12 V_s^* (V_s^* + B \theta^*) + 3 B^2 \theta^{**}] dz \quad \dots \quad (21-3)$$

(4) 外力

外力は鉛直等分布荷重であるとし、その断面内の合力の作用点は両主軸中心間の中央で、主軸の図心からy方向に測って y_0 の位置にあるものとする(Fig.1)。簡単のために、外力による横桁のたわみは無視する。この時、全体系の変位による外力作用点の変位 v_0 は、式(1)および式(2)により

$$v_p = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) = v_s - \frac{1}{2} y_0 (\theta^{*2} + \theta'^{*2}) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (22)$$

で与えられる。したがって、外力のポテンシャルWは次式で表される。

5. 座屈前の変形

外力および全構造系が橋軸を含む鉛直面に関して対称であるとすれば、その対称性によって逆対称変位成分 ($w_c^*, u_s^*, v_s^*, \theta^*$) よりその導関数は全て零である。また、横桁の外力による変形を無視しているので、断面の形状は保たれることになり、 $u_s^* = \theta^* = 0$ が成り立つ。したがって、座屈前の全ボテンシャルは

$$\begin{aligned} \Pi_1^o &= V_{M1}^o + V_{L1}^o + W_1^o \\ &= \int_0^L [E(A + A_T)(W_g^{o,z} + W_g^{o,r} V_s^{o,z}) + E I_x^o V_s^{o,z} + E A_T (B/L_L)^2 \delta^{o,3} q_y V_s^o] dz \quad \dots \quad (24) \end{aligned}$$

になる。ただし、

と書いた。

式(24)の被積分関数は3次項まで記してあるが、座屈前の変形に関しては通常の微小変形理論と比較できる精度で十分であると考えれば、3次項は省略して差支え無い。その場合、式(24)の第1変分から求めた釣

り合い方程式は、次のようになる。

この釣り合い方程式は、全断面積 $2(A + A_T)$ 、全体の断面2次モーメントを $2I_x^{\circ}$ とすれば、通常の良く知られた梁理論と完全に一致する。 A_T は、横構がフランジの一部として作用する影響を表す等価な断面積であり、式(25)における $H_g H_L A$ は同じく断面2次モーメントに対する寄与を表すものである。当然実橋ではこれらの値はそれぞれ A および I_x に対して十分に小さい。また両端が単純支持の場合には、式(26)より全長にわたって

が成り立ち、主桁のみの図心より H_g だけ下方に全体系の中立軸が存在するものと見做して良いことを表している。なお、実橋では通常 H_g は、 H_L に比べて十分小さいので無視しても差し支えないものである。

6. 座屈荷重 (固有値) の計算

(1) 対称座屈

全ポテンシャルの式には、対称座屈を表す Π_2^+ の項が現れる。この項を集めて整理すると、次式を得る。

$$\Pi_2^0 = \int_0^L [E J_{yw} \theta^{0''2} + G K \theta^{0'2} + E J_1 H_s \frac{\partial}{\partial s} \theta^{0'2} - 2 E J_2 H_L \frac{\partial}{\partial s} \theta^0 \theta^{0''} + \{2 E I_F / (B \lambda) + \frac{1}{2} q_y y_o\} \theta^{0''2}] dz \quad \dots \quad (29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} J_{y\omega} &= I_{\omega} + H_L^2 I_y \\ J_1 &= I_x + I_y - H_L^2 A \\ J_2 &= I_x - I_y + H_L H_s A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (30)$$

とした。

式(29)から得られる釣り合い方程式は、

$$2 E J_{yw} \theta^o = 2 G K \theta^o - 2 E (J_1 H_g + 2 J_2 H_L) (\dot{v}_s^o \theta^o)' + (4 E I_F / (B \lambda) - 2 E J_2 H_L \dot{v}_s^o + q_s y_o) \theta^o = 0 \quad \dots \quad (31)$$

になるから、問題は式(27)を満足する v_s^o を用いて、式(31)を解けば良い。

ここで単純桁を対象として解の形を

と置き、Galerkin法を用いて固有値 $\lambda_{q,cr}$ を与える式を求めるとき、 i 次の項に対して次式を得る。

$$\left[2 E J_{y\omega} \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 + 2 G K \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 + \frac{4 E I_F}{B \lambda} - \left\{ \frac{(J_1 H_g + 2 J_2 H_L)}{I_x^o} \left\{ 1 + \frac{(i\pi)^2}{6} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{J_2 H_L}{I_x^o} - y_o \right\} Q_v \right] d_i^o = \frac{2(J_1 H_g + 2 J_2 H_L)}{I_x^o} \sum_{j=i} \frac{ij(i^2 - 3j^2)}{(i^2 - j^2)^2} d_i^o = 0 \quad \dots (33)$$

ただし、 $i \pm j$ が偶数になるような j のみを探るものとする。これらの式から固有値を求めれば良いことになるが、この場合には最小の固有値を与える $i = 1$ であるとは限らない。

式(33)において、近似として i と j の相互影響を表す項および H_{ij} を無視すると、 i 次のモードに対する固有値 $\omega_{y_{cr}, i}$ は近似的に

になるが、この式の分母を $(i\pi)^2$ で割った値は、 $(i\pi)$ が十分に大きくなれば一定値 $J_2H_L/(6I_x^0)$ に漸近

する。したがって、これを一定値と見做せる状態では、 $q_{ycr,i}$ を極小にする i の値は次式

で与えられるから、式(35)で与えられる次数を中心に式(34)または数項を用いて式(33)から固有値を求めれば十分な精度で必要な座屈荷重が求められる。

(2) 逆対称座屈 (全体横座屈)

全ポテンシャルを表す式(5)のうち、 Π_2^* を考慮の外おくことになると、ここでは Π_1^* について考えれば良いことになる。すなわち、式(9)、式(15)、式(21)および式(23)を

に代入すれば良い。ところで、このポテンシャルには全体系としての断面形状を保持したいわゆる全体座屈の他に、断面形の「ゆがみ変形」を含んだかなり複雑な式になっている。

実際上の問題としては、断面形状保持としても発生するような全体座屈が重要であるものとして、「ゆがみ変形」を無視するならば、

の関係が成り立ち、その結果として式(21)により

が成り立つ。以下ではこれを「全体横座屈」であると見做し、これを対象とする。

さらに、実橋では一般に横構断面積が主桁断面積に比べて極めて小さく、次式が成り立つと考えられる。

そこで (A_t/A) および (A_s/A) は変位の 1 次の微小項と同程度の大きさを持つ量と見做し、全ボテンシャルの式中において、これらに変位の 3 次項を掛けたものは無視することにする。式(8)により (H_s/H_L) もまた同程度の微小項である。このようにした他、単純支持の条件では式(28)が成り立つので、この関係も利用することにすれば、最終的に式(36)は次式のようになる。

$$\Pi_1^* = \int_0^L (E A W_c^{**2} + E I_y u_s^{**2} + E J_{xw} \theta^{**2} + G K \theta^{**2} + E A_s \gamma^{**2} - E A B V_s^o w_s^{**2} \theta^{**2} + 2 E (I_y - I_x) u_s^{**2} V_s^o + E I_x^o y_o V_s^{***2} \theta^{**2}) dz \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (40)$$

ただし、

であり、また式(27)の関係を用いた。なお、ここでは式(37)が成り立つものとしているので τ^* は、次式で与えられるものとして良い。

式(40)の第1変分を計算し、それから釣り合い方程式を求めると

$$\left. \begin{aligned} (2E\bar{A}\bar{w}_c'' - EAB\bar{v}_s'\theta'')' - 4EA_s\gamma^*/B &= 0 \\ (2E\bar{I}_y\bar{u}_s''' + 2E(\bar{I}_y - \bar{I}_x)\theta''\bar{v}_s'')'' + 2EA_s\gamma'' &= 0 \\ (2EJ_{x\omega}\theta'')'' - (2GK\theta'' + 4EA_s\gamma^* - EAB\bar{v}_s'\bar{w}_c')' \\ + 2E(\bar{I}_x - \bar{I}_y)\bar{u}_s\bar{v}_s'' + 2EI_x\bar{v}_o\bar{v}_s\theta' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (43)$$

が得られる。

一般に座屈前の変形 v_s^0 は式(27)によって荷重 q_y と関係付けられており、任意の荷重分布に対して解くことが出来る。その結果は多くの場合

の形に Fourier 展開することが可能である。したがって、式(43)の解の形が

$u_s^* = \sum_i a_i^* \sin(i\pi z/L)$, $w_c^* = \sum_i c_i^* \cos(i\pi z/L)$, $\theta^* = \sum_i d_i^* \sin(i\pi z/L)$... (45)
と書けるものとすると、これらを式(43)に代入し、 $\cos(i\pi z/L)$ および $\sin(i\pi z/L)$ を掛けて0からしまで積分することにより、未知の係数 a_i^* , c_i^* , d_i^* を求めるための連立方程式を得ることができ、それによって問題が解かれる。解くべき釣り合い方程式は次のとおりである。

$$\begin{aligned} & \left[EA \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 + \frac{4EA_s}{B^2} \right] c_i^* - \frac{2EA_s}{B} \left(\frac{i\pi}{L} \right) a_i^* + \frac{4EA_s H_L}{B} \left(\frac{i\pi}{L} \right) d_i^* \\ & + q_y^o EAB \left(\frac{i^2\pi^2}{L^3} \right) \sum_j \sum_k \frac{2jk(i^2 - j^2 - k^2)}{i^4 + j^4 + k^4 - 2i^2j^2 - 2j^2k^2 - 2k^2i^2} b_k^o = 0 \\ & - \frac{2EA_s}{B} \left(\frac{i\pi}{L} \right) c_i^* + \left[EI_y \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 + EA_s \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] a_i^* - 2EA_s H_L \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 d_i^* \\ & - q_y^o E(I_y - I_x) \left(\frac{i^3\pi^3}{L^4} \right) \sum_j \sum_k \frac{8jk^3}{i^4 + j^4 + k^4 - 2i^2j^2 - 2j^2k^2 - 2k^2i^2} b_k^o = 0 \\ & \frac{4EA_s H_L}{B} \left(\frac{i\pi}{L} \right) c_i^* - 2EA_s H_L \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 a_i^* \\ & + \left[EJ_{x\omega} \left(\frac{i\pi}{L} \right)^4 + GK \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 + 4EA_s H_L^2 \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right] d_i^* \\ & + q_y^o \left[EAB \left(\frac{i\pi^2}{L^3} \right) \sum_j \sum_k \frac{2j^2k(j^2 - i^2 - k^2)}{i^4 + j^4 + k^4 - 2i^2j^2 - 2j^2k^2 - 2k^2i^2} b_k^o \right. \\ & - E(I_y - I_x) \left(\frac{i\pi^3}{L^4} \right) \sum_j \sum_k \frac{8j^3k^3}{i^4 + j^4 + k^4 - 2i^2j^2 - 2j^2k^2 - 2k^2i^2} b_k^o \\ & \left. - E I_x^o y_o \left(\frac{i\pi^3}{L^4} \right) \sum_j \sum_k \frac{8jk^5}{i^4 + j^4 + k^4 - 2i^2j^2 - 2j^2k^2 - 2k^2i^2} b_k^o \right] = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

ただし、式(46)の q_y^o の係数に現れる総和は、 $(i \pm j \pm k)$ が奇数になるような組み合わせについてのみ実行するものとする。したがって、もし荷重分布が橋梁の支間中央に関して対称なものであれば、式(44)によって展開された v_s^o は、奇数次の項しか現れず、その場合には座屈モードの奇数次と偶数次とは互いに独立に計算できることになる。

式(46)の解が全て零で無い値を持つような荷重の大きさ q_y^o は、式(46)の係数から作られる固有方程式によって求められ、それによって横座屈荷重が得られる。

(3) 等分布荷重を受ける場合の近似解

荷重が等分布である場合には、 v_s^o を式(44)のように Fourier 展開するよりも、そのまま積分を行う方が便利である。また座屈モードとして 1 次項を探るだけで精度が十分目的にかなう場合には、近似式の形で与えておくのが便利である。

そのためには、式(43)の 3 本の釣り合い方程式を 2 本に減らしておくことが好ましい。そこで式(43)の第 1 式と第 2 式から τ^* を消去し、さらに端条件を考慮することにより、次式が得られる。

$$w_c^{**} = \frac{B}{2} \left[-\frac{4I_y}{AB^2} u_s^{**} - \frac{4(I_y - I_x)}{AB^2} v_s^{o''} \theta^{**} + v_s^{o'} \theta^{**} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

これを式(42)および式(43)に代入して w_c^* を消去することによって、釣り合い方程式はその数を 2 本に減らすことができる。3 次の項を省略すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} & EI_y u_s^{****} + E(I_y - I_x) [v_s^{o''} \theta^{**}]'' - EA_s [1 + 4(I_y/(AB^2))] u_s^{**} \\ & + 2EA_s H_L \theta^{**} + EA_s v_s^{o'} \theta^{**} - [4EA_s (I_y - I_x)/(AB^2)] v_s^{o''} \theta^{**} = 0 \end{aligned}$$

$$E J_{x\omega} \theta^{***} - G K \theta^{**} + 2 E (I_y - I_x) H_L (\dot{v}_s^* \theta^*)'' + E I_x^* y_0 \dot{v}_s^* \theta^* \\ + 2 E I_y H_L \dot{u}_s^{***} - E I_y \dot{v}_s^* \dot{u}_s^{**} - E I_x \dot{v}_s^* \dot{u}_s^{**} = 0 \quad \cdots \cdots \quad (48)$$

式(48)の \dot{v}_s^* , etc に等分布荷重の場合の解を代入し、式(45)の $u_s^* \theta^*$ の 1 項のみを採ることにすると、2 次の固有方程式が得られる。その解を整理し、固有値を最大曲げモーメントの形で表すと、式(49)のようになる。ただし、簡単のため $(I_y / I_x) \ll 1$ 、 $2 I_y \ll I_y^*$ として省略した。

$$M_{cr} = \frac{3 \pi^4 E I_y^*}{2 (3 + \pi^2) L^2 (1 - \frac{I_y^*}{2 I_x^*})} \left[-\beta \pm \sqrt{\beta^{**2} + (1 - \frac{I_y^*}{2 I_x^*}) \frac{(E I_x^* + G K^* (L/\pi)^2)}{E I_y^*}} \right] \quad (49)$$

ここで、 I_x^* , ..., K^* は、橋梁全体としての断面定数であり、

$$\left. \begin{aligned} I_x^* &= 2 I_x \\ I_y^* &= \frac{2 A (B/2)^2}{1 + \frac{A (B/2)^2}{A_s (L/\pi)^2}} + 2 I_y \\ I_\omega^* &= 2 J_{x\omega} \\ K^* &= 2 K \\ \beta^* &= 2 H_L - \frac{6}{(3 + \pi^2)} y_0 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \quad (50)$$

と書いた。

7. 横座屈模型実験と解析結果の比較

前節までに誘導した解析方法においては、とりわけ横座屈についていくつかの近似が持ち込まれており、その妥当性を実験結果との比較によって検討することが望ましい。ここでは、かつて行われた日本国有鉄道(J.N.R.)^{7) 8) 9)} および東京都立大学(T.M.U.)¹⁰⁾ による弾性横座屈実験の結果を利用する。横座屈模型実験に用いた試験体の諸元は Table-1 に示すとおりであり、使用鋼材は S41 である。荷重は支間中央の集中荷重であり、Photo-1 および Photo-2 より明らかのように、上フランジに左右主桁にまたがる載荷板を載せ、両主桁の中央を鉛直方向に押すようにしたものである。横桁は一定間隔に配置され、横構は、左右両主桁の下フランジに直接取りつけられている。なお、Photo-3 および Photo-4 は弾性横座屈崩壊状況の写真である。

解析は、実験の荷重が集中荷重であるため、外力のポテンシャル W を誘導し、等分布荷重の場合と同様にして座屈前の撓み形状 v_s^* を求め、これと式(45)を式(43)に代入して積分する方法を用いた。また座屈モードは対称モードのみを考え、これは 1 項のみを用いた場合と 3 項まで採用した場合 ($i = 1, 3, 5$) の比較を行なうこととした。

Fig.2 および Fig.3 はそれぞれ国鉄と都立大の実験結果を上記の解析結果と比較したものである。いずれも縦軸には座屈荷重を、横軸には支間を採っている。試験桁の自重を考慮に加えた解析値は、Fig.2, Fig.3 において共に実験値より多少小さ目になっており、全体として大層良い一致を示しているものと判断される。

Table-1 Dimensions and Cross-sectional Properties of the Experimental Bridges

| | J. N. R. | T. M. U. |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Main Girder | I-159x20x2.3x4.5 I _x = 172.13 cm ⁴ I _y = 0.6152 cm ⁴ I _{\omega} = 35.805 cm ⁶ K = 0.1841 cm ⁴ A = 5.25 cm ² | I-150x16.8x16.8x1.2 I _x = 54.474 cm ⁴ I _y = 0.2968 cm ⁴ I _{\omega} = 13.934 cm ⁶ K = 0.0105 cm ⁴ A = 2.1744 cm ² |
| Floor Beam | I-40x2.3 I _r = 1.2267 cm ⁴ | I-30x1.2 I _r = 0.27 cm ⁴ |
| Lateral Bracing | ■-8x8 A _L = 0.64 cm ² | L-5x5x1.2 A _L = 0.1056 cm ² |
| Skeleton | B = 8.0 cm λ = 16.0 cm H _L = 7.5 cm H _r = 5.5 cm y _o = -12.0 cm | B = 4.88 cm λ = 7.5 cm H _L = 7.38 cm H _r = 5.88 cm y _o = -11.0 cm |
| Span | L = 400 cm 496 592 688 784 | L = 347.6 cm 397.6 447.6 497.6 |

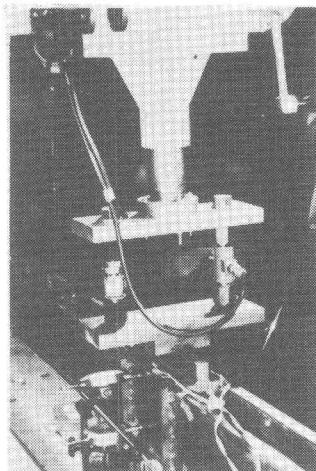


Photo-1 Loading Apparatus (J.N.R.)

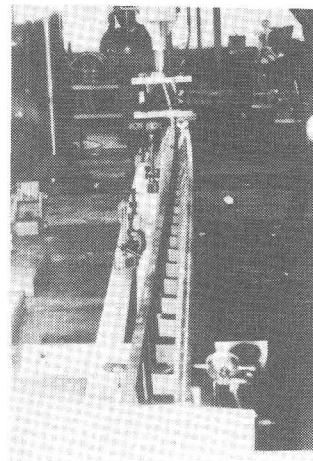


Photo-3 Bridge after Failure (J.N.R.)

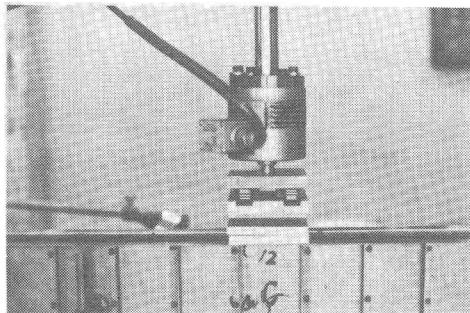


Photo-2 Loading Apparatus (T.M.U.)

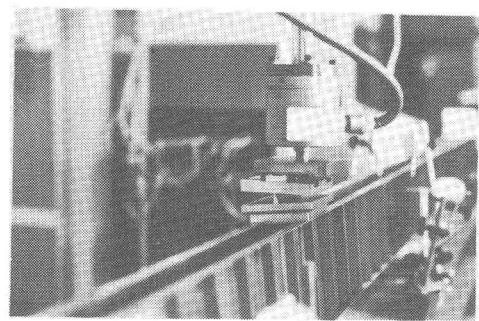


Photo-4 Bridge after Failure (T.M.U.)

なお、試験桁の自重を考慮しない解析値はそれを考慮した解析値に比べ長支間寄りでは危険側の座屈荷重を与えていている。

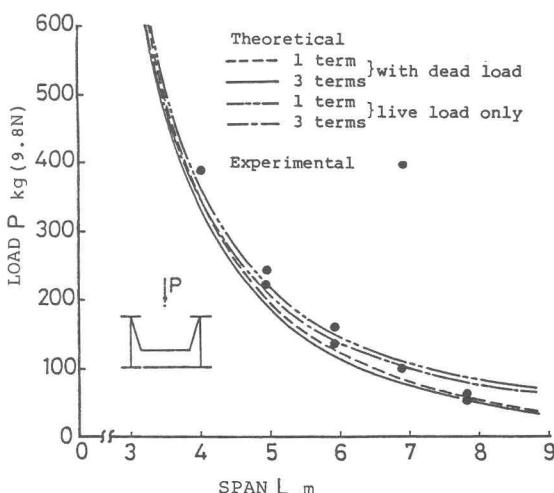


Fig.2 Comparison of the Experimental Values (J.N.R.) with the Theoretical Curves

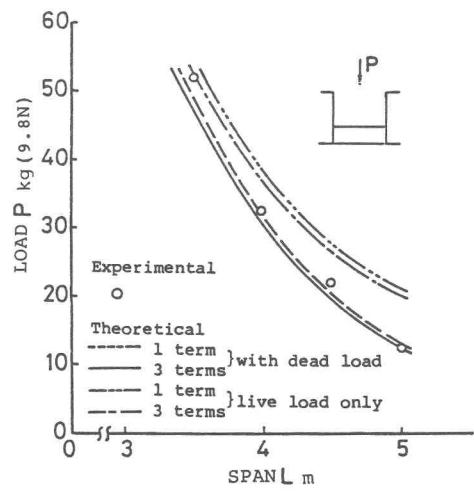


Fig.3 Comparison of the Experimental Values (T.M.U.) with the Theoretical Curves

また、Fig.2 および Fig.3 から明らかなように、座屈モードとして 1 項しか採らなかった場合と、3 項まで採用した場合の解析結果の差は僅かであり、Fig.2 の場合、実験の繰り返しによるバラツキとこの差がほぼ同程度と見られる。したがって、集中荷重の場合でも実用上の目的には座屈モードとしては 1 次だけ考えれば十分であると言えよう。

なお、この解析では横桁の鉛直軸回りの曲げ剛性を無視しており、その影響が心配されたが、この結果で見る限りその心配の必要は無かったものと思われる。

8. 実橋モデルに対する解析例

前節で扱った実験模型は、弾性横座屈を起こさせるために、主桁間隔を極端に狭くしたものであった。そこで、もう少し実際に近いモデルを対象とした解析を試みた。

実際の 2 主桁下路プレートガーダー鉄道橋で 40 m を越えるものは極めて僅かであり、実例については多くの解析が出来ないので、ここでは国鉄が設計した支間 32 m の単線下路プレートガーダーを基準にし、これを長支間に修正したものを実橋モデルとする。支間にかかわらず主桁中心間隔、横桁間隔および構構、横桁の断面寸法は変更せず、主桁断面だけをそれぞれの支間に見合う最大曲げモーメントに対して最適設計によって決定した。ただし、鋼材は SM50 に限り、水平補剛材は常に 1 本用いることとして腹板の幅厚比は、 $h_w/t_w = 200$ にしてある。またフランジの幅厚比は、カバープレートを含めた厚さを t とし、 $b/t = 6$ に決めた。その結果、支間によってはかなり非現実的なものになったが、そのまま解析を行うことにした。Table-2 は、計算に用いた実橋モデルの断面諸元および主要な構造を示したものである。

Fig.4 は、上記の実橋モデルに本解析法を適用して求めた弾性座屈荷重と支間の関係を示したものであって、縦軸は座屈応力と降伏応力の比、横軸は支間と主桁中心間隔の比で表している。図中の「対称座屈」の●印は、式(35)によって座屈モードの次数を求め、近似式(34)によって座屈荷重を計算した結果であるから座屈モードとしては 1 項しか用いていないものであるが、式(33)を用い、3 項 ($i-1, i, i+1$) を採って計算した曲線（2 点鎖線）上に載っており殆ど違ひが無い。なお、横桁剛性に関してニーブレースの影響は無視した。座屈モードの次数は、Table-2 に示した支間の範囲では 5 ~ 8 であって、支間の短い程小さな値になる傾向があるが、同時に半波の長さも短くなる。この例では L/B が 6 以下の場合には、半波長が実際の横桁間隔と同程度、またはそれより短くなるので、本解析法のように横桁の曲げ剛性の影響を積分で置き換える方法の妥当性は疑問である。また、 L の増大につれて σ_e / σ_y が低下しているのは、主桁断面が L の増大に伴って大きくなることにより相対的に横桁の剛性が不足するためである。

Table -2 Cross Sectional Properties and Dimensions of the Calculated Practical Models

Main Girder

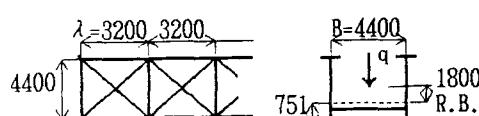
| | 12.8 | 25.6 | 38.4 | 51.2 | 64.0 | 76.8 | 89.6 | 102.4 | 115.2 | 128.0 |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| M tm | 185 | 657 | 1380 | 2336 | 3515 | 4907 | 6506 | 8037 | 10304 | 12496 |
| b cm | 20.0 | 27.0 | 35.0 | 42.0 | 47.0 | 52.0 | 57.0 | 62.0 | 67.0 | 72.0 |
| t_F cm | 3.3 | 4.4 | 5.8 | 6.7 | 7.7 | 8.6 | 9.4 | 10.2 | 11.0 | 11.9 |
| h_w cm | 143.0 | 218.0 | 280.0 | 333.0 | 381.0 | 426.0 | 468.0 | 508.0 | 546.0 | 582.0 |
| t_w cm | 0.9 | 1.1 | 1.4 | 1.7 | 1.9 | 2.1 | 2.3 | 2.5 | 2.7 | 2.9 |
| $tm (9.8 kN \cdot m)$ | | | | | | | | | | |

$$\text{Floor Beem} \quad I_F = 125750 \text{ cm}^4$$

$$\text{Lateral Bracing} \quad A_L = 17.0 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 6.54 \text{ cm}^2, A_t = 3.46 \text{ cm}^2$$

$$H_g = 0.296 (L=128\text{m}), \dots, 0.936 (L=12.8\text{m})$$



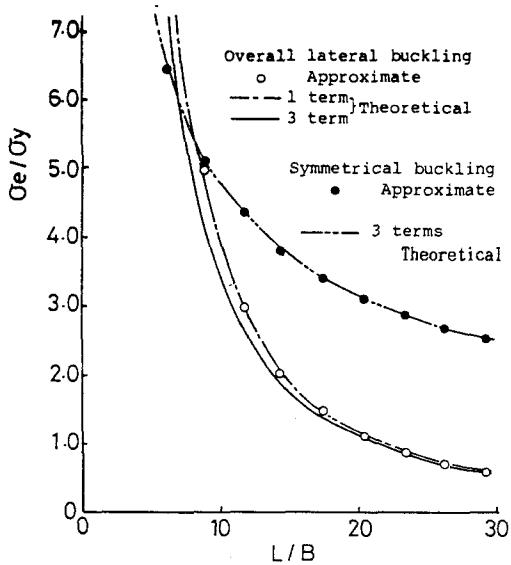


Fig.4 Symmetrical and Overall Lateral Buckling Curves under Uniformly Distributed Loading

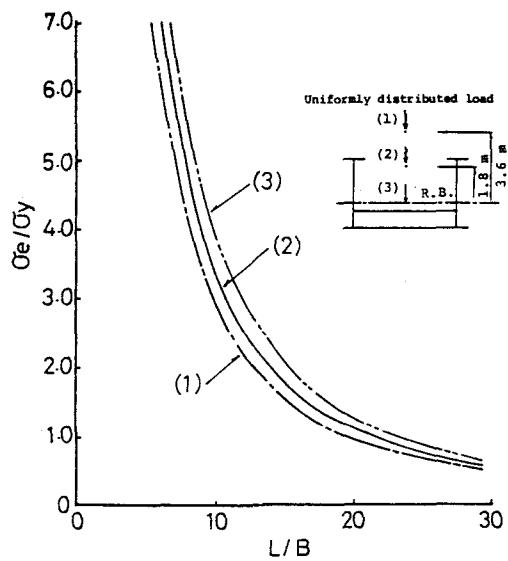


Fig.5 Effect of the Loaded Location on the Overall Lateral Buckling

「全体横座屈」については、式(44)と式(45)を用いた。ここでも座屈モードを1項のみ採った場合と3項まで採った場合の比較が示してある。3項まで採る方が安全側の解を与えるが、両者の差は実用上僅かであると見て差支え無いであろう。なお、 v_s^0 はいずれも3項用いている。さらに図中の○印は式(49)による近似解であるが、1項のみを採った解析値（1点鎖線）に近い値を示している。式(49)の近似式は、座屈モードとしては1項しか考えておらず、さらに式(43)から式(48)へ移行する際に生ずる高次項を省略しているにもかかわらず、かなり良い精度を持っているものと考えられ、十分実用に耐えるであろう。

一般に対称座屈荷重は、全体横座屈荷重に比べ極めて短支間の場合を除けば、大である。すなわち長支間下路プレートガーダーにおいてはあまり対称座屈について心配する必要が無いように思われる。

Fig.5 は、荷重作用点の高さの影響を調べたものである。短支間において荷重作用点の影響が大きく、スパンが長くなると、その影響は比較的小さくなっている。しかし、実際の鉄道における重心高さとしての荷重作用点は軌上面の高さに依存するので、設計によってはその影響を確かめるのが良い。

いずれにせよ、Fig.4とFig.5で示した座屈曲線は降伏点を遙かに越えた領域に現れている。これは実橋の座屈が弾性領域では無く、非弾性座屈領域に現れるはずであることを示しており、上記の解析は、そのままで意味のないものになってしまふ。従って、正しくは全ボテンシャル増分の計算式まで立ち戻り、初期不整と残留応力分布の影響も考慮に加えた上で、材料非線形の耐荷力問題として解析を行うのが正しい。しかし、ここでは簡単のため適当な耐荷力曲線を想定して、上述の弾性座屈曲線から近似的に所要の耐荷力曲線を求めて見る。

当然その結果は、用いた耐荷力曲線によって変わってくるので、ここでは過去に行われた多くの梁の実験データ^{14) 15)}の平均的曲線を表すA I S Cの梁の耐荷力曲線とその下限付近を通る道路橋示方書¹²⁾の梁の曲線について調べる。具体的にはこれらの曲線に対して、本解析により得られた弾性座屈荷重 σ_e を用いた細長比パラメーター $\alpha^2 = \sigma_y / \sigma_e$ を導入し、この値から下路プレートガーダーの非弾性座屈強度を推定する。その結果を示したのがFig.6である。なお図には「まえがき」で触れた西野らの公式

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E I_y G K}{(1 - I_y^2 / I_x)}} \left[1 + \frac{\pi^2 E I \omega}{L^2 G K} \right] \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (51)$$

を用いて局部的な固定点間の座屈モーメントを求め、これから導いた座屈耐荷力曲線を書き加えてある。

Fig.6 に示した曲線において、道路橋示方書による推定値はこの構造系の下限値を、A I S C による値は平均推定値を示しているものと思われる。いずれにせよ、各示方書の3本の曲線のうち、最も低い値を与えるものがこの構造系の耐荷力を表していることになる。この図から見る限り、支間の短い側では固定点間座屈が支配的であり、支間が長くなると全体横座屈が支配的になる。その境界はここで用いた実橋モデルでは、 $L/B = 10.5$ ($L = 46\text{ m}$) であった。

また、 L/B の減少に伴って、固定点間座屈強度 σ_{cr}/σ_y が低下しているのは、 L の減少につれて主桁が小さくなってくるにもかかわらず横桁間隔が基準パネル長 λ に固定されているため、結果として横桁間隔に比して主桁剛性が不足するためである。

この計算例では「対称座屈」が支配的になることは全く無いとの結果が得られているが、Fig.6 から見て、何らかの理由で横桁の剛性が不足した場合に

この種の座屈が現れるとしたら恐らく上記の
境界付近であろう。

なお、小松等⁵⁾は2主桁橋を対象にした全体横座屈強度式を提案しており、これを用いた結果はA I S C 曲線から推定した耐荷力曲線と比較すると、 L の短い領域では高めに、 L が長くなるに従って低めの値になるが、全体としては比較的近い結果を与える。このことから、単一部材としての梁の耐荷力曲線を用いて推定する本近似法は、ここで扱っているような立体組立梁に対しても適合性を有すると判断できるであろう。

9. 結論

上記の結果をまとめると次のように書くことができる。

- 1) 橋構を持つ開床式下路プレートガーダーの対称座屈および全体横座屈荷重を求める一般的な解法を導くことができた。この解析法には、荷重作用点の高さの影響も含まれる。
- 2) 一様分布荷重の場合について、上記対称座屈の座屈モードを近似的に求める式(35)を得、その結果を用いて座屈荷重を求める近似式(34)を与えることができた。
- 3) 一様分布荷重の場合の全体横座屈荷重を与える近似公式(49)を得ることができた。全体系としての断面定数は式(50)、式(16)および式(41)によって容易に求められる。
- 4) ここで用いた解析法は、集中荷重を含む場合にも拡張可能であり、その結果は弾性横座屈をする実験結果と良い一致を示した。
- 5) 上記の方法を実橋モデルに適用した結果、支間（または支間／全幅）の大きい場合の耐荷力は全体横座屈によって支配されることが推定される。
- 6) 実橋モデルで試算した範囲では、対称座屈の生じる可能性は少ない。

10. あとがき

この研究はかなり以前から、阿部英彦宇都宮大学教授に強くすすめられていたものである。

利用させて頂いた実験結果は、国鉄構造物設計事務所の御厚意によるものと、それにヒントを得て独自に

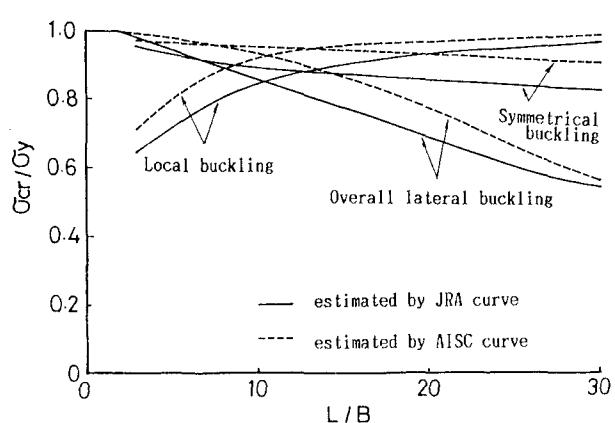


Fig.6 Buckling Strength Curves of the Practical Bridge Models

行ったものであるが、東京都立大学の実験には、石橋建材工業㈱の大関宗孝君および漢陽大学校の馬根殖教授の労を多く患わせた。また本文の解析を進めるに当たっては東京鉄骨橋梁㈱の井上寛君の努力に負うところが大である。特記して謝意を表したい。

記号

| | |
|-----------------------------------|------------------------------------------|
| x, y, z | : 右手系直交直線座標系 |
| u, v, w | : 基準状態での x, y, z 軸方向変位 |
| u_s, v_s | : 剪断中心の x, y 軸方向変位 |
| w_c, θ, ω | : 囲心の z 軸方向変位、剪断中心回りの回転および単位そり関数 |
| L, B, λ | : 支間、主桁中心間隔および横桁間隔 |
| E, G | : ヤング率および剪断弾性係数 |
| A, I_x, I_y | : 主桁の断面積、 x 軸回りおよび y 軸回りの断面 2 次モーメント |
| I_ω, K | : " そり 2 次モーメントおよびサン・ブナンのねじり定数 |
| A_L, L_L, H_L | : 橫構部材の断面積、長さおよび取付位置 |
| I_F, H_F | : 横桁の断面 2 次モーメントおよび取付位置 |
| $\sigma_{cr}, \sigma_e, \sigma_y$ | : 橫座屈強度、弹性横座屈応力（固有値）および降伏応力 |
| P, q_y | : 集中荷重および等分布荷重 |
| ()' | : z 軸に関する微分 |

参考文献

- 1) 福本勝士・久保全弘：横構・対傾構をもつ桁の横倒れ座屈強度、土木学会論文報告集、No.196, 1971
- 2) 西田進・吉田博・福本勝士：横桁による並列主桁の横補剛効果、土木学会論文報告集、No.268, 1977
- 3) M.Fisher : Zum Kipp-Problem von Kontinuierlich Seitlich Gestulzten I-Tragern, Stahlbau, 1976
- 4) 小松定夫・西村宜男・中田憲正：横構・対傾構で連結された 2 主桁橋の全体横倒れ座屈荷重の簡易計算式、土木学会論文報告集、No.341, 1984
- 5) 小松定夫・西村宜男・中田憲正：側道 2 主桁橋架設系の全体横倒れ極限強度式と補剛設計法、第30回構造工学シンポジウム、1984
- 6) 田島二郎・伊藤文人・稲葉紀昭・結城皓眩：下路プレートガーダーの横倒れ座屈に関する研究、第24回土木学会年次学術講演会概要集、1969
- 7) 阪本謙二：長大下路プレートガーダーの全体座屈、国鉄構造物設計資料、No.36, 1973
- 8) 阪本謙二：長大下路プレートガーダーの全体座屈（続報）、国鉄構造物設計資料、No.41, 1975
- 9) 伊藤文人・阿部英彦・佐野信一郎：長スパン下路プレートガーダーの全体座屈の実験的研究、第29回土木学会年次学術講演会概要集、1974
- 10) 大関宗孝：下路プレートガーダーの横座屈に関する研究、東京都立大学修士論文、1976
- 11) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじれを受ける薄肉断面部材、土木学会論文報告集、No.225, 1974
- 12) 土木学会：国鉄建造物設計標準解説（鋼鉄道、鋼とコンクリートの合成鉄道橋）、1983
- 13) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（鋼橋編）、1980
- 14) Fukumoto, Y.: Numerical Data Bank for the Ultimate Strength of Steel Structures, US-Japan Seminar on Inelastic Instability of Steel Structures and Structural Element, Tokyo, 1981
- 15) B.G.Johnston : Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, Wiley Inter-science, 1976