

(41) 地盤及び地盤-流体層連成系における特異基本解と

その円周上線積分解について

○吉田長行* 藤谷義信**

一序一

本論は、重力形式によつて地盤に着底される水中軸対称構造物の地震応答問題を解析することと、目的とする研究の環境である。そこで、本研究の基礎となる地盤及び地盤-流体層連成系に於ける特異基本解とその円周上線積分解の一般表現を提示する。

構造物と地盤及び流体層との動的相互作用を波動論に立脚して扱う立場から、最初に周波数領域での解析を行い、後にフーリエ逆変換によつて時刻歴応答を求める手法を採用する。周波数領域での解析では、定常入射地震波動に対する構造物各部の応答伝達関数を求める必要がある。伝達関数の構成には、構造物自体の変形特性と与える通常の周波数応答関数以外に、次の3つの周波数に依存する物理量の決定が必要である。1. 流体付加質量マトリクス、2. 地盤インピーダンスマトリクス、3. 地震強制バクトル。これらの物理量を決定するために、本論で前提とする解析手法は、固有関数、又は特異基本解を利用した境界型の解法である。地盤を剛とした場合の軸対称構造物の流体による複素付加質量マトリクスは、円筒座標を用いた固有関数展開法、又はリング状に分布した吹出し特異解を用いた積分方程式法[1]によつて解かれている。一方、地盤には、剛基盤の存在を仮定しない限り、固有関数が厳密には存在しない。従つて、境界型の解析法を半無限地盤に適用するには、追加振解を求める必要がある。[2]

地表面点加振解は、田治見の文献[3]に詳しい。高崎ら[4]は、これを粘弾性多層地盤に拡張した問題を扱っている。地中点加振解は、均質等方半無限地盤[5]、及び剛基盤上の表層を対象[6]に、素解と変位ポテンシャルを組み合わせたもので、松岡、八幡によつて解かれている。更に、藤堂[7]は、この方法を半無限多層地盤の地中加振解に應用している。一方、A.O.Awojobiら[8]は、地中鉛直ベルス解を加力点の上層と下層の解を境界条件によつて結合する手法によつて解いている。加力点を含む水平面で地盤を層分割するこの方法に基づき、高谷ら[9]は定常地中加振解を変位応力の一般解をベクトル・マトリクス表現するHaskell法によつて表示した。[10]

ところで、軸対称構造物を扱う場合には、円周上に線加振が作用するリング状加振解を用いると、3次元解析に比較して、周方向にフーリエ展開した効率の良い解析を行うことができる。地表面リング状加振解については、筆者らが文献[11]で部分的に示している。松岡らは、半無限一様地盤を対象に、地中点加振解を求めた時と同様の方法で地中リング状加振解を求めることを試みている。[12]

本論では、地盤を粘弾性平行多層構造にモデル化し、層境界(層内で加振される場合は、その層を上下2層に分割する)に点加振が与えられる時の解を、伝達マトリクス法によつて誘導する。これを円周上で解析的に線積分することにより、周方向に任意波数で展開されたリング状加振解の一般表現を示す。[13]

* 広島大学工学部助手, ** 同助教・工博

次に、自由表面を有する完全流体層を地盤上に想定する。そこで、地盤の点加振及びリング状加振によつて連成運動する流体層の速度ポテンシャルと、流体層中に点吹出し及びリング状吹出しを置いた時の連成場の解を与える。この時、地盤の解は、流体層が無い場合の解と流体による付加項の和として、流体層の解は、水底固定の場合の解と地表面運動による付加項の和として、それぞれ表現される[4]。最後に具体的に解を示し得る単純な地盤モデルについて、解の解析的表現を誘導する。解の特異性は、特異性を有するStatic成分と特異性のないDynamic成分に分離して議論される。又、Static成分の計算法に関し、若干の検討を加える。

1-1 点加振解

1-1 変位・応力のポテンシャル表現

定常加振状態を解析するため時間項を $e^{i\omega t}$ とする。 i は、添字として使用しない限り、虚数単位とする。又 t は、時刻、 ω は、円振動数である。

変位を1個のスカラ・ポテンシャルと2個のベクトルポテンシャルで、以下のように表現する。

$$\begin{aligned} u_r &= \phi_{,r} + \psi_{,r\bar{z}} + \psi_{2,\theta}/r \\ u_\theta &= \phi_{,\theta}/r + \psi_{\theta,z}/r - \psi_{2,r} \\ u_z &= \phi_{,z} + \psi_{1,\bar{z}\bar{z}} - \nabla^2 \psi_1 \end{aligned} \quad (1)$$

但し、 (r, θ, z) は、局所円筒座標、 ∇^2 は、ラプラスアンである。

以上のように表現された変位は、波動方程式を満足する。ここで、各ポテンシャルを次のように積分表示する。

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^\infty (A_1^m e^{\alpha z} + A_2^m e^{-\alpha z}) J_m(\beta r) d\beta e^{i\omega t} D_m(\theta) \\ \psi_1 &= \int_0^\infty (B_1^m e^{\beta z} + B_2^m e^{-\beta z}) J_m(\beta r) d\beta e^{i\omega t} D_m(\theta) \\ \psi_2 &= \int_0^\infty (C_1^m e^{\beta z} + C_2^m e^{-\beta z}) J_m(\beta r) d\beta e^{i\omega t} E_m(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

但し、 $\beta^2 = \alpha^2 + \lambda^2 = \beta^2 + j^2$, $\lambda = \omega/V_p$, $j = \omega/V_s$, $D_m(\theta) = \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{pmatrix}$, $E_m(\theta) = \begin{pmatrix} \sin m\theta \\ -\cos m\theta \end{pmatrix}$, V_p は、縦波

速度、 V_s は、横波速度、 J_m は、 m 種Bessel関数である。

1-2 粘弾性平行多層地盤の変位・応力表現

鉛直方向点加振解は、式(2)に於いて、 $D_m = 1$, $E_m = 0$, として、水平方向点加振解は、 $D_m = \cos \theta$, $E_m = \sin \theta$ として、それぞれ点加振の条件を満足するように未定係数 A_1^m, B_1^m, C_1^m ($m=0,1, \lambda=1,2$)を決定すれば、求められる。そこで、式(2)から、 $m=0,1$ について地盤を粘弾性平行多層構造にモデル化した時の α 層の変位・応力表現を導き、若干の式の変形によつてBessel関数を分離した形式で次のように書ける。

鉛直方向点加振解(α 層)

$$\begin{aligned} \kappa u_r &= \int_0^\infty \kappa U_r^* \beta J_1(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa u_z &= \int_0^\infty \kappa U_z^* \beta J_0(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa \sigma_{zr} &= \int_0^\infty \kappa \sigma_{zr}^* \beta J_1(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa \sigma_{zz} &= \int_0^\infty \kappa \sigma_{zz}^* \beta J_0(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3)$$

水平方向点加振解(α 層)

$$\begin{aligned} \kappa u_t &= \int_0^\infty \kappa U_t^* \beta J_2(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa u_s &= \int_0^\infty \kappa U_s^* \beta J_0(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa u_p &= \int_0^\infty \kappa U_p^* \beta J_1(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa \sigma_t &= \int_0^\infty \kappa \sigma_t^* \beta J_2(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa \sigma_s &= \int_0^\infty \kappa \sigma_s^* \beta J_0(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \\ \kappa \sigma_p &= \int_0^\infty \kappa \sigma_p^* \beta J_1(\beta r) d\beta e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{但し, } \kappa U_t = \kappa U_r / \cos \theta + \kappa U_\theta / \sin \theta$$

$$\kappa U_s = \kappa U_r / \cos \theta - \kappa U_\theta / \sin \theta$$

$$\kappa U_p = \kappa U_z / \cos \theta$$

$$\kappa \delta_t = \kappa \delta_z r / \cos \theta + \kappa \delta_\theta z / \sin \theta$$

$$\kappa \delta_s = \kappa \delta_z r / \cos \theta - \kappa \delta_\theta z / \sin \theta$$

$$\kappa \delta_p = \kappa \delta_z z / \cos \theta$$

$$\beta^2 = \alpha_k^2 + \ell_k^2 = \beta_k^2 + j_k^2, \ell_k = \omega / V_{pk}, j_k = \omega / V_{sk},$$

$$V_{sk} = \sqrt{4\pi / P_k} = \gamma_k V_{pk}, \gamma_k = \sqrt{(1 - 2U_k) / (2(1 - U_k))},$$

$$G_k = (1 + 2P_k \cdot i) G_k^*, G_k, V_k, P_k, \text{は, } z \text{ 軸上}$$

のオキ層の剪断剛性, ポアソン比, 履歴減衰定数, 質量密度である。

式(3), (4)より, 局所直交デカルト座標での点加振解の一般的表现は, 次式となる。

$$\kappa u_{ij} = \int_0^\infty \kappa \bar{u}_{ij} d\beta e^{i\omega t} ; (i, j = x, y, z) \quad (5)$$

但し, κu_{ij} は, i 方向加振による j 方向変位

$$\kappa \bar{u}_{xx} = \kappa \bar{F}_1(\beta, z_k) J_0(\beta r) + \kappa \bar{F}_2(\beta, z_k) J_2(\beta r) \cos 2\theta$$

$$\kappa \bar{u}_{xy} = \kappa \bar{F}_2(\beta, z_k) J_2(\beta r) \sin 2\theta$$

$$\kappa \bar{u}_{xz} = \kappa \bar{F}_3(\beta, z_k) J_1(\beta r) \cos \theta$$

$$\kappa \bar{u}_{yx} = \kappa \bar{u}_{xy}$$

$$\kappa \bar{u}_{yy} = \kappa \bar{F}_1(\beta, z_k) J_0(\beta r) - \kappa \bar{F}_2(\beta, z_k) J_2(\beta r) \cos 2\theta$$

$$\kappa \bar{u}_{yz} = \kappa \bar{F}_3(\beta, z_k) J_1(\beta r) \sin \theta$$

$$\kappa \bar{u}_{zx} = \kappa \bar{F}_4(\beta, z_k) J_1(\beta r) \cos \theta$$

$$\kappa \bar{u}_{zy} = \kappa \bar{F}_4(\beta, z_k) J_1(\beta r) \sin \theta$$

$$\kappa \bar{u}_{zz} = \kappa \bar{F}_5(\beta, z_k) J_0(\beta r)$$

— (6)

$$\kappa \bar{F}_1 = (\kappa F_1 + \kappa F_2) / 2, \kappa \bar{F}_2 = (-\kappa F_1 + \kappa F_2) / 2$$

$$\kappa F_1 = (\kappa U_s^* - \kappa U_z^*) \beta / 2$$

$$\kappa F_2 = (\kappa U_s^* + \kappa U_z^*) \beta / 2$$

$$\kappa F_3 = \kappa U_p^*$$

$$\kappa F_4 = \kappa U_p^* \beta$$

$$\kappa F_5 = \kappa U_z^*$$

— (7)

式(3), (4)の被積分関数 $\kappa u_{ij}^*, \kappa \delta_{ij}^*$ は, オキ層の局所円筒座標系 (r, θ, z_k) で表わされ, 2つ1つ式で次のように書ける。

$$\{\kappa d^m\} = [\kappa H^m] \{\kappa Q^m\} ; m=0, 1 \quad (8)$$

$$\text{但し, } \kappa d^0_1 = \kappa U_t^*, \kappa U_s^*, \kappa \delta_z^*, \kappa \delta_z^*_1$$

$$\kappa d^1_1 = \kappa U_t^*, \kappa U_s^*, \kappa U_p^*, \kappa \delta_z^*, \kappa \delta_s^*, \kappa \delta_p^*_1$$

$$\kappa d^0_2 = \kappa \kappa A^0, \kappa \kappa B^0, \kappa \kappa A^2, \kappa \kappa B^2_1$$

$$\kappa d^1_2 = \kappa \kappa A^1, \kappa \kappa B^1, \kappa \kappa C^1, \kappa \kappa A^2, \kappa \kappa B^2_1, \kappa \kappa C^2_1$$

$$[\kappa H^0] = \begin{bmatrix} -e^{\alpha_k z_k} & , & -\beta_k e^{\beta_k z_k} & , \\ \alpha_k e^{\alpha_k z_k} & , & \beta_k^2 e^{\beta_k z_k} & , \\ -2G_k \alpha_k e^{\alpha_k z_k} & , & -G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{\beta_k z_k} & , \\ G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{\alpha_k z_k} & , & 2G_k \beta_k e^{\beta_k z_k} & , \\ -e^{-\alpha_k z_k} & , & \beta_k e^{-\beta_k z_k} & , \\ -\alpha_k e^{-\alpha_k z_k} & , & \beta_k^2 e^{-\beta_k z_k} & , \\ 2G_k \alpha_k e^{-\alpha_k z_k} & , & -G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{-\beta_k z_k} & , \\ G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{-\alpha_k z_k} & , & -2G_k \beta_k e^{-\beta_k z_k} & \end{bmatrix}$$

$$[\kappa H^1] = \begin{bmatrix} -e^{\alpha_k z_k} & , & -\beta_k e^{\beta_k z_k} & , & e^{\beta_k z_k} & , \\ e^{\alpha_k z_k} & , & \beta_k e^{\beta_k z_k} & , & e^{\beta_k z_k} & , \\ \alpha_k e^{\alpha_k z_k} & , & \beta_k^2 e^{\beta_k z_k} & , & 0 & , \\ -2G_k \alpha_k e^{\alpha_k z_k} & , & -G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{\beta_k z_k} & , & G_k \beta_k e^{\beta_k z_k} & , \\ 2G_k \alpha_k e^{\alpha_k z_k} & , & G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{\beta_k z_k} & , & G_k \beta_k e^{\beta_k z_k} & , \\ G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{\alpha_k z_k} & , & 2G_k \beta_k e^{\beta_k z_k} & , & 0 & , \\ -e^{-\alpha_k z_k} & , & \beta_k e^{-\beta_k z_k} & , & e^{-\beta_k z_k} & , \\ e^{-\alpha_k z_k} & , & -\beta_k e^{-\beta_k z_k} & , & e^{-\beta_k z_k} & , \\ -\alpha_k e^{-\alpha_k z_k} & , & \beta_k^2 e^{-\beta_k z_k} & , & 0 & , \\ 2G_k \alpha_k e^{-\alpha_k z_k} & , & -G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{-\beta_k z_k} & , & -G_k \beta_k e^{-\beta_k z_k} & , \\ -2G_k \alpha_k e^{-\alpha_k z_k} & , & G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{-\beta_k z_k} & , & -G_k \beta_k e^{-\beta_k z_k} & , \\ G_k (Z\beta^2 - j_k^2) e^{-\alpha_k z_k} & , & -2G_k \beta_k e^{-\beta_k z_k} & , & 0 & \end{bmatrix}$$

式(8)を変位ベクトルと応力ベクトルに分解し, $[\kappa H^m]$ を成分表示すると,

$$\begin{Bmatrix} \kappa d^m_u \\ \kappa d^m_\sigma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa H^m_{u1}(z_k), \kappa H^m_{u2}(z_k) \\ \kappa H^m_{\sigma 1}(z_k), \kappa H^m_{\sigma 2}(z_k) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa Q^m_1 \\ \kappa Q^m_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

1-3 変位・応力の伝達マトリクス表現

層の上面と下面に於ける変位・応力ベクトルの値を、それぞれ $\{k\check{d}^m\}$, $\{k\hat{d}^m\}$ とすると、

$$\begin{aligned}\{k\check{d}^m\} &= [kH^m(0)]\{kQ^m\} = [k\check{H}^m]\{kQ^m\} \\ \{k\hat{d}^m\} &= [kH^m(-H_k)]\{kQ^m\} = [k\hat{H}^m]\{kQ^m\}\end{aligned}\quad (10)$$

但し、 H_k は、 k 層の層厚である。

層境界に外乱が作用していない場合、層間の連続条件は、次式で表現される。

$$\{k\check{d}^m\} = \{k-1\hat{d}^m\} \quad (11)$$

式(10)より、未定係数 $\{kQ^m\}$ を消去すると、

$$\{k\hat{d}^m\} = [kT^m]\{k\check{d}^m\} \quad (12)$$

但し、

$$[kT^m] = [k\hat{H}^m][k\check{H}^m]^{-1}$$

上式に式(11)を用いると、次の漸化式を得る。

$$\{k\check{d}^m\} = [k-1T^m]\{k-1\check{d}^m\} \quad (13)$$

地盤の最上層の層番号を 1、最下層を N とし、式(13)を $k=N$ 層上面の値 $\{N\check{d}^m\}$ に、順次作用させると、

$$\{N\check{d}^m\} = [NS^m]\{k\check{d}^m\} \quad (14)$$

但し、

$$[NS^m] = [N-1T^m][N-2T^m]\cdots\cdots[k+1T^m][kT^m]$$

ここで、 k 層と $k-1$ 層の境界面に次のような外乱ベクトル $\{e^m\}$ が作用しているならば、

$$\{L\check{d}^m\} - \{L-1\hat{d}^m\} = \{e^m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e_\sigma^m \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式(15)より、式(14)は、 k 層上面で、

$$\{N\check{d}^m\} = [NS^m]\{L-1\hat{d}^m\} + [NS^m]\{e^m\}$$

と書ける。上式を右辺第 1 項に式(13)を、再び順次作用させると、地盤の最下層上面の変位・応力ベクトル値と最上層上面のそれとを関係付ける次式を得る。

$$\{N\check{d}^m\} = [NS^m]\{1\check{d}^m\} + [NS^m]\{e^m\} \quad (16)$$

1-4 点加振による変位・応力ベクトルの決定

最下層の N 層は、下方遠方で発散する項を除いて、

$$\{N\check{d}^m\} = \begin{Bmatrix} N\check{H}_{u1}^m \\ N\check{H}_{\sigma 1}^m \end{Bmatrix} \{N\check{Q}_1^m\}$$

と表わす。これを式(16)に代入し、成分表示すると、

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} N\check{H}_{u1}^m \\ N\check{H}_{\sigma 1}^m \end{Bmatrix} \{N\check{Q}_1^m\} &= \begin{Bmatrix} NS_{u1}^m & NS_{\sigma 1}^m \\ NS_{\sigma u}^m & NS_{\sigma \sigma}^m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1\check{d}_u^m \\ 1\check{d}_\sigma^m \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} LS_{u1}^m & LS_{\sigma 1}^m \\ LS_{\sigma u}^m & LS_{\sigma \sigma}^m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ e_\sigma^m \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

上式から $\{N\check{Q}_1^m\}$ を消去すると次式を得る。

$$[N\check{G}_{u1}^m]\{1\check{d}_u^m\} + [N\check{G}_{\sigma 1}^m]\{1\check{d}_\sigma^m\} = -[N\check{G}_{\sigma \sigma}^m]\{e_\sigma^m\} \quad (17)$$

但し、

$$[N\check{G}_{te}^m] = [NS_{te}^m] + [N^m][NS_{\sigma te}^m] \quad k=1, L, \quad t=u, \sigma$$

ここで、

$$[N^m] = \begin{cases} -[N\check{H}_{u1}^m][N\check{H}_{\sigma 1}^m]^{-1} & \text{----- 最下層半無限} \\ 0 & \text{----- } \text{〃} \text{ 剛基盤} \end{cases}$$

自由地表面の条件 $\{1\check{d}_u^m\} = 0$ を導入すると、

最終的に地表面変位を定める式が得られる。

$$[NG_u^m]\{\dot{y}_u^m\} = -[NG_g^m]\{e_g^m\} \quad (18)$$

上式より、

$$\{\dot{y}_u^m\} = \begin{Bmatrix} \dot{y}_u^m \\ \dot{y}_g^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -[NG_u^m]^{-1}[NG_g^m] \\ \delta_{L1}[I] \end{bmatrix} \{e_g^m\} \quad (19)$$

但し、 δ_{L1} は、クォネッカー-αデルト、 $[I]$ は、単位マトリクスである。

$\{\dot{y}_u^m\}$ が求められると、順次下層α変位・応力ベクトルが、次のように決定される。

$$\{k d^m(z_k)\} = [KH^m(z_k)][K\dot{H}^m]^{-1}\{\dot{y}_u^m\} \quad (20)$$

ここで、

$$\{k d^m\} = [KS^m]\{\dot{y}_u^m\} + (1 - \delta_{L1})[KS^m]\{e_g^m\}$$

$$X, \quad [KS^m] = \begin{cases} [K_{-1}T^m][K_{-2}T^m] \cdots [K_{L+1}T^m][L^mT^m] & ; K > L \\ [I] & ; K = L \\ 0 & ; K < L \end{cases}$$

と定める。

外乱 $\{e_g^m\}$ を点加振とすると、鉛直点加振 $\{e_{gz}^m\}$ 及び水平点加振 $\{e_{gx}^m\}$ は、次式となる。

$$Le_{gz}^m = L0, \quad g/2\pi \quad (21)$$

$$Le_{gx}^m = L0, \quad 1/\pi, \quad 0$$

ここで、 π は、円周率を表わす。

式(21)を用いて、式(19)、(20)より $\{k d^m(z_k)\}$ を決定し、これを式(7)に代入すれば、粘弾性平行多層地盤α地中及び地表面点加振解式(5)、(6)が得られる。

-2- リング状加振解

前節の点加振解式(5)を、全体円筒座標系 (P, φ, Z) に於いて、加振位置 (P', φ', Z') を有する点加振解として解釈する。但し、 Z' は、局所鉛直座標では、 $Z_L = Z_L'$ に相当し、 $r = [P'^2 + P'^2 - 2PP' \cos(\varphi - \varphi')]^{1/2}$ の関係がある。ここで、 σ_L 層上面 $(Z = Z^*)$ の半径 P^* の円周上に作用する線加振；

$$e = \frac{1}{2\pi P} \delta(P - P^*) \delta(Z - Z^*) \begin{pmatrix} D_m(\varphi') \\ E_m(\varphi') \end{pmatrix}$$

但し、 δ はデルタ関数と考え、これを重みとして積分 $\int_0^\infty P dP \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dZ'$ を点加振解に施すと、次のような周方向波数 m を有する2次元リング状加振によるα層変位解を得る。

$$\begin{aligned} kU_{\rho\rho}^m &= \int_0^\infty k\bar{U}_{\rho\rho}^m d\varphi e^{i\omega t} D_m(\varphi) \\ kU_{\rho\varphi}^m &= \int_0^\infty k\bar{U}_{\rho\varphi}^m d\varphi e^{i\omega t} E_m(\varphi) \\ kU_{\rho Z}^m &= \int_0^\infty k\bar{U}_{\rho Z}^m d\varphi e^{i\omega t} D_m(\varphi) \end{aligned} \quad (22)$$

$Z = P, \varphi, Z$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\rho\rho}^m &= \{kF_1 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*) + kF_2 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*)\} \\ \bar{U}_{\rho\varphi}^m &= -\{kF_1 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*) + kF_2 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*)\} \\ \bar{U}_{\rho Z}^m &= -kF_3 J_m(\rho P) J_m^s(\rho P^*) \\ \bar{U}_{\varphi\rho}^m &= -\{kF_1 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*) + kF_2 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*)\} \\ \bar{U}_{\varphi\varphi}^m &= \{kF_1 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*) + kF_2 J_m^s(\rho P) J_m^s(\rho P^*)\} \\ \bar{U}_{\varphi Z}^m &= -kF_3 J_m(\rho P) J_m^s(\rho P^*) \\ \bar{U}_{Z\rho}^m &= -kF_4 J_m^s(\rho P) J_m(\rho P^*) \\ \bar{U}_{Z\varphi}^m &= -kF_4 J_m^s(\rho P) J_m(\rho P^*) \\ \bar{U}_{ZZ}^m &= -kF_5 J_m(\rho P) J_m(\rho P^*) \end{aligned}$$

ここで、

$$J_m^s = (J_{m-1} - J_{m+1})/2, \quad J_m^p = (J_{m-1} + J_{m+1})/2$$

上式中 $kF_1 \sim kF_5$ は、式(7)で定義されている。式(22)は、式(5)の点加振解を定める5個の被積分関数が求められれば、直ちにリング状加振解の被積分関数が得られることを示している。尚、式(22)を微分して、応力・歪関係に代入すれば、容易に応力解を導くことができるαで省略する。

-3- 流体層と地盤の連成場における 特異基本解

地盤の最上層が1層の上にLaplace方程式によって支配される水深 H_0 の完全流体の層が1層を考える。本節では、地盤の点加振及びリング状加振によって連成運動する流体層の速度ポテンシアル解と、流体層中に点吹出し及びリング状吹出しを置いた時の連成場の解を与える。

3-1 点加振解

自由水面で線形水面波の条件を満足する流体の速度ポテンシアル中の一般解は、次式となる。

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_m^* J_m(kr) dk e^{i\omega t} D_m(\theta) \quad (23)$$

但し、

$$\Phi_m^* = \{(g+k)e^{kz_0} + (g-k)e^{-kz_0}\} \circ A^m$$

$$K = \omega^2/g, \quad g: \text{重力加速度}$$

上式中 (r, θ, z_0) は、流体層の局所円筒座標である。地盤の点加振に対応して $m=0, 1$ を考えればよい。

地盤との接触面 $z_0 = -H_0$ における法線方向の変位・応力ベクトルは、流体密度を ρ_0 として、

$$i\omega \circ u_z^* = \Phi_{m,z}^* D_m(\theta)$$

$$\circ \delta z_z^* = \rho_0 \Phi_{m,z}^* D_m(\theta)$$

となるので、前節の表示を用いれば、

$$\{\circ \hat{d}_v^m\} = \{\circ \hat{H}\} \circ A^m \quad (24)$$

但し、

$$\circ \hat{d}_v^m = \int_0^\infty \frac{g/i\omega}{(g+k)e^{kz_0} + (g-k)e^{-kz_0}} \cdot \{i\omega \rho_0 [(g+k)e^{kz_0} + (g-k)e^{-kz_0}]\} \cdot \hat{d}_v^m$$

$$\circ \hat{d}_v^m = \circ \hat{d}_{uv}^m, \circ \hat{d}_{vz}^m, \circ \hat{d}_{v\theta}^m = \circ \hat{d}_{\theta z}^m, \circ \hat{d}_{\theta\theta}^m,$$

$$\circ \hat{d}_v^m = \circ \hat{d}_p^m, \circ \hat{d}_p^m \quad \text{と定める。}$$

式(24)より、未定係数 $\circ A^m$ を消去すると、

$$\circ \hat{d}_{vz}^m = \tilde{K} \circ \hat{d}_v^m \quad (25)$$

$$\text{但し、} \tilde{K} = -\rho_0 \frac{\omega^2}{g} \left\{ \frac{(g+k)e^{-kz_0} + (g-k)e^{kz_0}}{(g+k)e^{-kz_0} - (g-k)e^{kz_0}} \right\}$$

一方、式(17)を鉛直方向成分 (v) と水平方向成分 (u, θ) 分解して表現すると、

$$[N_{GH}^m, N_{GV}^m] \begin{Bmatrix} \hat{d}_{uH}^m \\ \hat{d}_{vH}^m \end{Bmatrix} + [N_{GH}^m, N_{GV}^m] \begin{Bmatrix} \hat{d}_{\theta H}^m \\ \hat{d}_{vH}^m \end{Bmatrix} = -[N_{GH}^m] \{e_\theta^m\} \quad (26)$$

地表面における鉛直方向の連続条件と水平方向応力の境界条件 $\{\hat{d}_{vH}^m\} = 0$ を考慮して、式(25)(26)を連立させて解くと次式を得る。

$$\{\hat{d}_{vH}^m\} = -[N_{GV}^m]^{-1} [N_{GH}^m] \{e_\theta^m\} - [N_{GV}^m]^{-1} \{\hat{d}_{\theta H}^m\} \hat{d}_{vH}^m$$

$$\hat{d}_{vH}^m = -(1 + \{C\}^T [N_{GV}^m]^{-1} [N_{GH}^m])^{-1} \{C\} [N_{GV}^m]^{-1} [N_{GH}^m] \{e_\theta^m\}$$

但し、 $\{C\}^T = L, \tilde{K}$ — (27), (28)

式(27)の2項は、流体層による付加項である。 $\hat{d}_{vH}^m = 0$ のとき、解は、式(19)と一致する。地盤の解は、式(19)を式(27), (28)に代えて用い、式(20)から求められ、最終的に式(5), (6), (7)に帰着する。流体層の解は、式(24)と式(28)より、

$$\Phi_m^* = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{(g+k)e^{kz_0} + (g-k)e^{-kz_0}}{(g+k)e^{-kz_0} - (g-k)e^{kz_0}} \cdot \hat{d}_{vH}^m \quad (29)$$

となり、式(23)より表現される。

以上より、局所円筒座標系での2方向点加振による速度ポテンシアル Φ_k ($k=x, y, z$) は、次式となる。

$$\Phi_x = \int_0^\infty \Phi_k^* J_1(kr) dk e^{i\omega t} \cos \theta$$

$$\Phi_y = \int_0^\infty \Phi_k^* J_1(kr) dk e^{i\omega t} \sin \theta \quad (30)$$

$$\Phi_z = \int_0^\infty \Phi_k^* J_0(kr) dk e^{i\omega t}$$

3-2 リンク状加振解

リンク状加振に対する地盤の解は、式(22)によつて一般表示されている。周方向モードのリ
ンク状加振に対する速度ポテンシャルは、式(30)
を円周上で線積分することにより、次式となる。

$$\Phi_l^m = \int_0^\infty \bar{\Phi}_l^m d\varphi e^{i\omega t} D_m(\varphi); l=P, Q, Z$$

ここで、

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_P^m &= \Phi_1^* J_m(\beta P) J_m^*(\beta P^*) \\ \bar{\Phi}_Q^m &= -\Phi_1^* J_m(\beta P) J_m^*(\beta P^*) \\ \bar{\Phi}_Z^m &= \Phi_0^* J_m(\beta P) J_m^*(\beta P^*)\end{aligned}$$

3-3 点吹出し解

流体層中、 $r=0, Z_0=Z_0^*$ に吹出し時異点を置
いた場合を考える。この時、流体層の速度ポテ
ンシャル Φ_e は、次のように定められる。

$$\Phi_e = \left[\frac{1}{4\pi R} + \int_0^\infty \Phi_e^* J_0(\beta r) d\beta \right] e^{i\omega t} \quad (32)$$

但し、

$$\begin{aligned}\Phi_e^* &= \frac{\Phi_0^*}{\beta + K} - \frac{1}{4\pi} e^{-\beta(Z_0 - Z_0^*)} \\ \Phi_0^* &= \{(\beta + K)e^{\beta Z_0} + (\beta - K)e^{-\beta Z_0}\} A^0 \\ R &= [r^2 + (Z_0 - Z_0^*)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

式(23)から式(25)に至ると同様な手順によ
り、式(25)に代えて次式を得る。

$$\hat{\alpha} \hat{\alpha}_{\phi v} = \tilde{\kappa} \cdot \hat{\alpha}_{uv} + \tilde{\epsilon}_\phi \quad (33)$$

但し、 $\tilde{\epsilon}_\phi = -\frac{i\omega \rho_0}{2\pi} \frac{(\beta + K)e^{\beta Z_0^*} + (\beta - K)e^{-\beta Z_0^*}}{(\beta + K)e^{-\beta H_0} - (\beta - K)e^{\beta H_0}}$

$\tilde{\kappa}$ は、式(25)で示したものである。式(26)で
 $m=0, \{e_\phi^0\}=0$ とし、地表面の水平方向応力の
境界条件 $\{d_{\phi v}^0\}=0$ を代入して、式(33)を考慮
すれば、次式を得る。

$$[\{N_{\phi u}^0\}, \{N_{\phi v}^0\} + \tilde{\kappa} \{N_{\phi v}^0\}] \{d_{\phi v}^0\} = -\{N_{\phi v}^0\} \tilde{\epsilon}_\phi \quad (34)$$

式(34)を解いて、地盤表面の変位ベクトルが
求まり、鉛直方向応力ベクトルは、これを式
(33)に代入して求まる。このより、下層の地
盤の解は漸近式により順次 $KU_{2i}(i=x, y, z)$ となる。

一方、流体層の速度ポテンシャルは、式(33)
を、式(32)に代入して若干の変形を行つと、下
式となる。

$$\Phi_e = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \int_0^\infty \frac{\Psi_0^*}{F_\psi} J_0(\beta r) d\beta + \int_0^\infty \frac{\Psi_1^*}{F_\psi} J_0(\beta r) d\beta \right\} e^{i\omega t} \quad (35)$$

但し、

$$\begin{aligned}R' &= [r^2 + (Z_0 + Z_0^* + 2H_0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \Psi_0^* &= 2(\beta + K)e^{-\beta H_0} \cosh \beta(Z_0 + H_0) \cosh \beta(Z_0^* + H_0) \\ \Psi_1^* &= -\frac{4\pi i \omega}{\beta} (\beta \cos \beta Z_0 + K \sin \beta Z_0) d_{uv}^0 \\ F_\psi &= \beta \sinh \beta H_0 - K \cosh \beta H_0\end{aligned}$$

式(35)の右辺4項は、地盤とα連成による付加
項である。右1項から右3項までは、地盤を剛
とする仮定の下で用いられている周知の流体の
Green 関数である。

3-4 リンク状吹出し解

リンク状吹出しに対する地盤の解も、式(22)
により $KU_{2i}(i=P, Q, Z)$ となる。周方向モードのリ
ンク状吹出しに対する流体層の解は、松井[15]
による流体Green 関数の軸対称表現を参考にし
て、下式となる。但し、吹出し強度は、 $\frac{S(P-P^*)}{2\pi P^*} D_m(\varphi)$

$$\Phi_e^m = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\pi \sqrt{PP^*}} \left\{ Q_{m-\frac{1}{2}}(L) + Q_{m-\frac{1}{2}}(L') \right\} + \int_0^\infty \left\{ \frac{\Psi_0^*}{F_\psi} + \frac{\Psi_1^*}{F_\psi} \right\} J_m(\beta P) J_m^*(\beta P^*) d\beta \right] e^{i\omega t} D_m(\varphi)$$

但し、 $Q_{m-1/2}$ は奇数次の Legendre 関数

$$\begin{aligned}L &= \frac{P^2 + P'^2 + (Z_0 - Z_0^*)^2}{2PP^*} \\ L' &= \frac{P^2 + P'^2 + (Z_0 + Z_0^* + 2H_0)^2}{2PP^*}\end{aligned} \quad (36)$$

-4- 半無限-様弾性地盤のリング状加振解

一様地盤を扱うので、層番号を示す添字を省略する。式(5)は、次のように書ける。

$$u_{ij} = [u_{ij}^s + u_{ij}^p] e^{i\omega t} \quad (37)$$

但し、

$$u_{ij}^s = \int_0^\infty \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{u}_{ij} d\xi$$

$$u_{ij}^p = \int_0^\infty (\bar{u}_{ij} - \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{u}_{ij}) d\xi$$

u_{ij}^s は、 $\omega=0$ のとき Static solution に一致し、静的 Mindlin 解である。加振解の特異性は、 u_{ij}^p にのみ存する。以上 α ように解を分解表示する α は、特異基本解を利用した積分方程式法による解析を行う場合、境界積分に現れる特異積分 α の処理を u_{ij}^p に限定して効率良く行うためと、 u_{ij}^p の無限積分表示を有限積分表示に変換して実際には数値積分する α で、その必要条件である「ジョー」の補助定理を満足させるためである。

無次元化量 $\xi = \xi_j$, $a = r_j$, $b = z_j$, $b^* = z^* j$ を導入して u_{ij}^p を具体的に示すと次のようである。

$$u_{ik}^p = \int_0^\infty \bar{u}_{ik}^p d\xi \quad ; \quad i, k = x, y, z \quad (38)$$

ここで、

$$\bar{u}_{xx}^p = \bar{F}_1^p J_0(\xi a) + \bar{F}_2^p J_2(\xi a) \cos 2\theta$$

$$\bar{u}_{xy}^p = \bar{F}_2^p J_2(\xi a) \sin 2\theta$$

$$\bar{u}_{xz}^p = \bar{F}_3^p J_1(\xi a) \cos \theta$$

$$\bar{u}_{yx}^p = \bar{u}_{xy}^p$$

$$\bar{u}_{yz}^p = \bar{F}_1^p J_0(\xi a) - \bar{F}_2^p J_2(\xi a) \cos 2\theta$$

$$\bar{u}_{zx}^p = \bar{F}_3^p J_1(\xi a) \sin \theta$$

$$\bar{u}_{xy}^p = \bar{F}_4^p J_1(\xi a) \cos \theta$$

$$\bar{u}_{yz}^p = \bar{F}_4^p J_1(\xi a) \sin \theta$$

$$\bar{u}_{zz}^p = \bar{F}_5^p J_0(\xi a)$$

— (39)

$$\bar{F}_1^p = (F_1^p + F_2^p)/2, \quad \bar{F}_2^p = (-F_1^p + F_2^p)/2$$

但し、

$$F_1^p = \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} b - b^*} - \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} \right\} - \frac{1}{2C_1} \{ C_3 - |b - b^*| \xi \} e^{-\xi |b - b^*|} \right. \\ \left. + \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \xi^2 e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} - \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} \right\} - \frac{1}{2C_1} \{ C_3 + (b + b^*) \xi \} e^{\xi (b + b^*)} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{2\xi^3}{\sqrt{\xi^2 - 1} F(\xi)} \left\{ (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} - 2\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} \right\} \{ (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} - 2\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} \} + \frac{1}{C_1} (C_2 + b\xi)(C_2 + b^*\xi) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right]$$

$$F_2^p = \frac{1}{4\pi G} \left[\left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} - e^{-\xi |b - b^*|} \right\} + \left\{ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} - e^{\xi (b + b^*)} \right\} \right]$$

$$F_3^p = \frac{1}{4\pi G} \left[-\left[\text{sign}(b - b^*) \cdot \xi^2 \left\{ e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} - e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} \right\} + \frac{1}{2C_1} (b - b^*) \xi e^{-\xi |b - b^*|} \right] + \left[\xi^2 \cdot \left\{ e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} - e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} \right\} - \frac{\xi}{2C_1} (b + b^*) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{2\xi^2}{F(\xi)} \left\{ (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} - 2\xi^2 e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} \right\} \{ (2\xi^2 - 1) \cdot e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} - 2\sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} \} - \frac{1}{C_1} (C_1 - b\xi) \cdot (C_2 + b^*\xi) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right]$$

$$F_4^p = \frac{1}{4\pi G} \left[-\left[\text{sign}(b - b^*) \cdot \xi^2 \left\{ e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} - e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} \right\} + \frac{1}{2C_1} (b - b^*) \xi e^{-\xi |b - b^*|} \right] + \left[\xi^2 \cdot \left\{ e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} - e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} \right\} - \frac{\xi}{2C_1} (b + b^*) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{2\xi^2}{F(\xi)} \left\{ 2\xi^2 e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} - (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} \right\} \{ 2\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} - (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} \} - \frac{1}{C_1} (C_1 + b\xi) \cdot (C_2 - b^*\xi) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right]$$

$$F_5^p = \frac{1}{4\pi G} \left[-\left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} - \xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2 - 1} |b - b^*|} \right\} + \frac{1}{2C_1} \{ C_3 + |b - b^*| \xi \} e^{-\xi |b - b^*|} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} - \xi^2 e^{\sqrt{\xi^2 - 1} (b + b^*)} \right\} + \frac{1}{2C_1} \{ C_3 - (b + b^*) \xi \} e^{\xi (b + b^*)} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{2\xi^3}{\sqrt{\xi^2 - 1} F(\xi)} \left\{ 2 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} - (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b} \right\} \{ 2\sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} - (2\xi^2 - 1) e^{\sqrt{\xi^2 - 1} b^*} \} + \frac{1}{C_1} (C_2 - b\xi) \cdot (C_2 - b^*\xi) e^{\xi (b + b^*)} \right] \right]$$

— (40)

$$F(\xi) = (2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2 - 1} \sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$C_1 = 2(1 - \nu), \quad C_2 = 1 - 2\nu, \quad C_3 = 3 - 4\nu = C_1 + C_2, \quad \bar{\gamma} = \sqrt{C_2/C_1}$$

式(40)は、特別な場合として $z=z^*=0$ の時、

$$\begin{aligned} F_1^p &= -\frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\sqrt{4\zeta^2-1}}{F(\zeta)} + C \right\} \\ F_2^p &= -\frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}} - 1 \right\} \\ F_3^p &= -\frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{2\zeta^2-1}{2F(\zeta)} + C \right\} = -F_4^p \\ F_4^p &= -\frac{1}{2\pi G} \left\{ \frac{\sqrt{4\zeta^2-1}}{F(\zeta)} + C \right\}; C=1-\nu \end{aligned} \quad (41)$$

と簡単な表現になる。

式(22)の γ は、 γ 状加振解モード(37)と同様な分解を行うと次のようになる。

$$\begin{aligned} u_{lp}^m &= [u_{lp}^{sm} + j \int_0^\infty \bar{u}_{lp}^{pm} d\zeta] e^{i\omega t} D_m(\varphi) \\ u_{lq}^m &= [u_{lq}^{sm} + j \int_0^\infty \bar{u}_{lq}^{pm} d\zeta] e^{i\omega t} E_m(\varphi) \\ u_{lz}^m &= [u_{lz}^{sm} + j \int_0^\infty \bar{u}_{lz}^{pm} d\zeta] e^{i\omega t} D_m(\varphi) \end{aligned} \quad (42)$$

$\zeta = p, q, z$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{u}_{pp}^{pm} &= \{F_1^p J_m^s(\zeta a) J_m^s(\zeta a^*) + F_2^p J_m^p(\zeta a) J_m^p(\zeta a^*)\} \\ \bar{u}_{pq}^{pm} &= -\{F_1^p J_m^s(\zeta a) J_m^s(\zeta a^*) + F_2^p J_m^s(\zeta a) J_m^p(\zeta a^*)\} \\ \bar{u}_{pz}^{pm} &= F_3^p J_m(\zeta a) J_m^s(\zeta a^*) \\ \bar{u}_{qp}^{pm} &= -\{F_1^p J_m^s(\zeta a) J_m^p(\zeta a^*) + F_2^p J_m^p(\zeta a) J_m^s(\zeta a^*)\} \\ \bar{u}_{qq}^{pm} &= \{F_1^p J_m^p(\zeta a) J_m^p(\zeta a^*) + F_2^p J_m^s(\zeta a) J_m^s(\zeta a^*)\} \\ \bar{u}_{qz}^{pm} &= -F_3^p J_m(\zeta a) J_m^p(\zeta a^*) \\ \bar{u}_{zp}^{pm} &= -F_4^p J_m^s(\zeta a) J_m(\zeta a^*) \\ \bar{u}_{zq}^{pm} &= F_4^p J_m^p(\zeta a) J_m(\zeta a^*) \\ \bar{u}_{zz}^{pm} &= F_5^p J_m(\zeta a) J_m(\zeta a^*) \end{aligned} \quad (43)$$

但し、 $p_j = a, p_j^* = a^*$

Mindlin 解の軸対称表現 u_{lk}^{sm} ($l, k = p, q, z$) を示す。

$$\begin{aligned} u_{pp}^{sm} &= u_{pp}^{km} + \bar{u}_{pp}^{km} + K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^s(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ -Q_{\lambda,1}^p(L_2) + \frac{3}{2} Q_{\lambda,1}^p(L_2) - \frac{p^2 + p^{*2}}{p p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_2) + \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ -Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{3}{2} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p^2 + p^{*2}}{p p^*} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{pq}^{sm} &= u_{pq}^{km} + \bar{u}_{pq}^{km} - K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^p(\beta p) J_m^s(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ Q_{\lambda,1}^s(L_2) + \frac{p^*}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) - \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{p^*}{p} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) - \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{pz}^{sm} &= u_{pz}^{km} + \bar{u}_{pz}^{km} - K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^s(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ \frac{1}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) - \frac{1}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ \frac{1}{p} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) - \frac{1}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{qp}^{sm} &= u_{qp}^{km} + \bar{u}_{qp}^{km} + K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^p(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ -Q_{\lambda,1}^s(L_2) - \frac{p}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ -Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) - \frac{p}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{qz}^{sm} &= u_{qz}^{km} + \bar{u}_{qz}^{km} + K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^s(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ -Q_{\lambda,1}^p(L_2) - \frac{1}{2} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ -Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) - \frac{1}{2} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{lz}^{sm} &= u_{lz}^{km} + \bar{u}_{lz}^{km} - K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^p(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ \frac{z-z^*}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{z z^*}{p p^*} \frac{(z+z^*)}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zp}^{sm} &= u_{zp}^{km} + \bar{u}_{zp}^{km} - K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^s(\beta p) J_m^p(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ \frac{z-z^*}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{1}{p} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{z z^*}{p p^*} \left\{ \frac{z+z^*}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) + \frac{1}{p} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zq}^{sm} &= u_{zq}^{km} + \bar{u}_{zq}^{km} + K_1 \int_0^\infty e^{\beta(\zeta+z^*)} J_m^p(\beta p) J_m^s(\beta p^*) d\beta \\ &\quad + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[-(1-2\nu) \frac{(z-z^*)}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{z z^*}{p p^*} \frac{(z+z^*)}{p} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{zz}^{sm} &= u_{zz}^{km} + \bar{u}_{zz}^{km} + \frac{K_2}{\pi \sqrt{p p^*}} \left[(1-2\nu) \left\{ (1-2\nu) Q_{\lambda,1}(L_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(z+z^*)^2}{p p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_2) + \frac{z z^* (z+z^*)^2}{(p p^*)^2} Q_{\lambda,1}^{(2)}(L_2) \right\} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

但し、 $K_1 = \frac{1-2\nu}{4\pi G}, K_2 = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)}, \lambda = m - \frac{1}{2}$

又、 $u_{lk}^{km} = u_{lk}^{km}(p, z; p^*, z^*)$ は、静荷重 Kelvin 解の軸対称表現であり、 $\bar{u}_{lk}^{km} = \bar{u}_{lk}^{km}(p, z; p^*, -z^*)$ は、その鏡像である。[16] 具体的に、下式となる。

$$u_{pp}^{km} = \frac{K_2}{2\pi \sqrt{p p^*}} \left[(3-4\nu) Q_{\lambda,1}^p(L_1) + \frac{3}{2} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_1) - \frac{p^2 + p^{*2}}{p p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_1) + \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_1) \right]$$

$$u_{pq}^{km} = \frac{K_2}{2\pi \sqrt{p p^*}} \left[-(3-4\nu) Q_{\lambda,1}^s(L_1) + \frac{p^*}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_1) - \frac{1}{2} Q_{\lambda,2}^{(1)}(L_1) \right]$$

$$u_{pz}^{km} = \frac{K_2}{2\pi \sqrt{p p^*}} (z-z^*) \left[\frac{1}{p} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_1) - \frac{1}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(1)}(L_1) \right]$$

$$U_{\varphi p}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} \left[(3-4\nu)Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1) - \frac{p}{p^*}Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1) + \frac{1}{2}Q_{\lambda,2}^{(s)}(L_1) \right]$$

$$U_{\varphi q}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} \left[(3-4\nu)Q_{\lambda,1}^{(p)}(L_1) - \frac{1}{2}Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1) + \frac{1}{2}Q_{\lambda,2}^{(p)}(L_1) \right]$$

$$U_{\varphi z}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} \frac{(z-z^*)}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1)$$

$$U_{z p}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} (z-z^*) \left[-\frac{1}{p^*}Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1) + \frac{1}{p}Q_{\lambda,1}^{(p)}(L_1) \right]$$

$$U_{z q}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} (z-z^*) \left[-\frac{1}{p}Q_{\lambda,1}^{(s)}(L_1) \right]$$

$$U_{z z}^{km} = \frac{K_2}{2\pi\sqrt{pp^*}} \left[(3-4\nu)Q_{\lambda}(L_1) - \frac{(z-z^*)^2}{pp^*}Q_{\lambda}^{(s)}(L_1) \right]$$

— (45)

以上の式では、次に定める記号が用いられた。

$$L_1 = \frac{p^2 + p^{*2} + (z-z^*)^2}{2pp^*}, \quad L_2 = \frac{p^2 + p^{*2} + (z+z^*)^2}{2pp^*}$$

$$\frac{d^n}{dL^n} Q_{\lambda}(L) = \frac{1}{(L^2-1)^{n/2}} Q_{\lambda}^{(n)}(L) = Q_{\lambda}^{(n)}(L)$$

$$\lambda = m-1/2, \quad n=0,1,2,\dots \text{は上添字省略}$$

$$Q_{\lambda, k}^{(s(n))}(L) = \frac{1}{2} \{ Q_{\lambda-k}^{(n)}(L) - Q_{\lambda+k}^{(n)}(L) \}$$

$$Q_{\lambda, k}^{(p(n))}(L) = \frac{1}{2} \{ Q_{\lambda-k}^{(n)}(L) + Q_{\lambda+k}^{(n)}(L) \}$$

$$k=1, 2, \dots$$

特別な場合として、 $z=z^*=0$ とする式(44)は下

式となる。

$$U_{pp}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1}{\pi\sqrt{pp^*}} \left[Q_{\lambda,1}^{(p)}(l) + \frac{1}{2}\nu \{ Q_{\lambda}^{(s)}(l) - Q_{\lambda,2}^{(p)}(l) \} \right]$$

$$U_{p q}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1}{\pi\sqrt{pp^*}} \left[-(1-\nu)Q_{\lambda,1}^{(s)}(l) + \nu \frac{p}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(s)}(l) - \frac{1}{2}\nu Q_{\lambda,2}^{(s)}(l) \right]$$

$$U_{p z}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1-2\nu}{2} [p^*S_m - pS_m^p]$$

$$U_{q p}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1}{\pi\sqrt{pp^*}} \left[(1-\nu)Q_{\lambda,1}^{(s)}(l) - \nu \frac{p}{p^*} Q_{\lambda,1}^{(s)}(l) + \frac{1}{2}\nu Q_{\lambda,2}^{(s)}(l) \right]$$

$$U_{q q}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1}{\pi\sqrt{pp^*}} \left[(1-\nu)Q_{\lambda,1}^{(p)}(l) - \frac{1}{2}\nu \{ Q_{\lambda}^{(s)}(l) - Q_{\lambda,2}^{(p)}(l) \} \right]$$

$$U_{q z}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{2\nu-1}{2} pS_m^s$$

$$U_{z p}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1-2\nu}{2} [pS_m - p^*S_m^p]$$

$$U_{z q}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1-2\nu}{2} p^*S_m^s$$

$$U_{z z}^{sm} = \frac{1}{2\pi q} \frac{1-\nu}{\pi\sqrt{pp^*}} Q_{\lambda}(l)$$

— (46)

$$\text{但し, } l = \frac{p^2 + p^{*2}}{2pp^*},$$

$$S_m = \begin{cases} \frac{1}{p^{*2}-p^2} \left(\frac{p}{p^*} \right)^m \cdots \cdots p < p^* \\ \frac{1}{p^2-p^{*2}} \left(\frac{p^*}{p} \right)^m \cdots \cdots p^* < p \end{cases}; m \geq 0$$

$$S_m = 0; m < 0$$

$$S_m^s = \frac{1}{2} (S_{m-1} - S_{m+1})$$

$$S_m^p = \frac{1}{2} (S_{m-1} + S_{m+1})$$

5 Legendre陪関数の計算法

半奇数の λ の 2 種 Legendre 陪関数 $Q_{m-1/2}^{(n)}(L)$ は、

$n=0$ の場合、 $m=0, 1$ について完全楕円積分と次のように関係がある。

$$Q_{-\frac{1}{2}}(L) = k K(k)$$

$$Q_{\frac{1}{2}}(L) = -k K(k) + \frac{2}{k} [K(k) - E(k)]$$

— (47)

$$\text{但し, } k^2 = 2/(L+1)$$

$K(k)$: 第 1 種完全楕円積分

$E(k)$: 第 2 種 “

$m > 1$ の Legendre 関数 $Q_{m-1/2}(L)$ は、漸化式

$$(m+\frac{1}{2})Q_{m+\frac{1}{2}}(L) - 2mLQ_{m-\frac{1}{2}}(L) + (m-\frac{1}{2})Q_{m-\frac{3}{2}}(L) = 0$$

— (48)

より計算される。 $Q_{m-1/2}^{(n)}(L)$ の $n \geq 1$ については、式(47)、(48)及びその漸化式により計算される。

$$Q_{m-1/2}^{(1)}(L) = (m+\frac{1}{2})(L^2-1)^{-1/2} \{ Q_{m+\frac{1}{2}}(L) - LQ_{m-\frac{1}{2}}(L) \}$$

$$Q_{m-1/2}^{(n+2)}(L) + 2(n+1)L(L^2-1)^{-1/2} Q_{m-1/2}^{(n+1)}(L)$$

$$- (m-n-\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2}) Q_{m-1/2}^{(n)}(L) = 0$$

— (49)

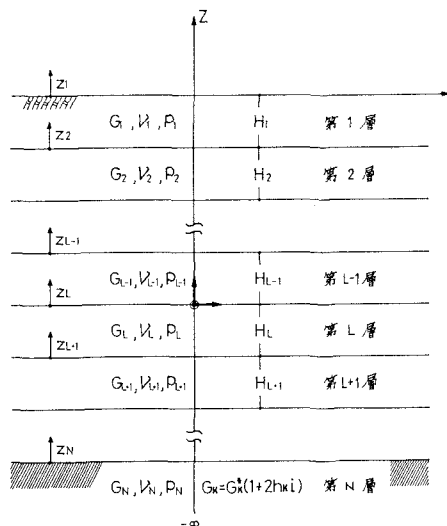
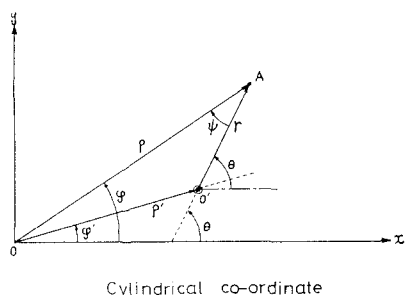
半無限粘弾性平行多層地盤及びその上に流体層の存在する連成場における1点、及びリング状の特異基本解を誘導した。解析的表示の可能な一様地盤の地中及び地表面加振解を示し、解の形式を既往のStatic solution とその他の成分に分解表示することにより、加振解の特異性を明示した。

リング状加振解とリング状吹出し特異解の特異性は、任意の周方向波数に対し、同一種完全積内積分に帰着されることが判明した。多層地盤においてもこの結果と利用することが可能である。

[参考文献]

1. Fenton, J.D. "Waves Forces on Vertical Bodies of Revolution," J.Fluid.Mech., Vol. 85, part2, 1978, pp.241-255
2. 吉田長行, 藤谷義信, 水津育男, "埋込み剛基礎を有する構造物の地震応答性状について(その1),(その2)," 昭和58年建築学会
3. 田治見宏, 建築学構造学大系1, "地震工学," 章国社, 1968, pp.91-105
4. 高崎芳夫, 平澤光春, "粘弾性多層地盤上の構造物と地盤との動的相互作用について," 第6回日本地震工学会, 1982, pp.1649-
5. 松岡理, 八幡夏恵子, "三次元均質等方弾性体動問題の基本解とその応用(その2),(その3)," 日本建築学会論文報告集 Vol.293, 298
6. 同上(その4) Vol.330 , 7. 藤堂正喜, "埋設基礎の動特性," 第6回日本地震工学会, 1982, pp.1753-
8. Awojoki, A.O., Sobayo, O.A., "Ground Vibrations due to Seismic Denotation of a Buried Source," E.E.S.D., Vol 5, 1977
9. 高谷富世, 北村泰寿, 桜井春輔, "半無限弾性体内部の点加振問題の解析," 土木学会第36回年次講演, I-261, 1981, pp.521.
10. Haskell, N.A., "The Dispersion of Surface Waves of Multi-layered Media," Bulletin of S.S.A., Vol 43, No.1, 1953, pp.17-
11. 松井長行, 藤谷義信, 日本建築学会中国支部研, 第9巻2号, 昭和57年3月, 12. 松岡理 et al., 日本建築学会, 昭和55年9月 pp.523-
13. 吉田長行, 藤谷義信, 第33回応力連合, 1983, pp.107, 14. 同左, 日本建築学会中国支部研, 昭和58年10月,
15. 松井徹哉, "軸対称構造物に作用する波力および散乱波の解析," 日本建築学会大会, 昭和53年9月, pp.1097-
16. 松井長行, 藤谷義信, "Kelvin解の軸対称表現,"

日本建築学会中国支部研, 第9巻1号, 昭和56年10月



Multilayered soil model

THE FUNDAMENTAL SINGULAR SOLUTIONS DUE TO THE POINT AND RING
LOADS FOR A SEMI-INFINITE MEDIA CONSISTING OF
THE MULTI-LAYERED SOIL AND FLUID

N. Yoshida*, Y. Fujitani**

The authors have recently researched the method of seismic response analysis of the rotational gravity offshore structure. The present report aims at deriving the fundamental singular solutions for a semi-infinite field consisting of the multi-layered soil and fluid which are employed in the boundary-type of the numerical analysis. These solutions are studied from the viewpoint of the three dimensional wave theory, and utilized for the numerical investigation on the dynamic interaction between the structure and the external media. The fundamental solutions of periodically oscillating point and ring loads enable us to analyse the following physical quantities: 1. Added mass matrix of fluid, 2. Foundation impedance matrix, 3. Seismic exciting force vector.

For axisymmetric analysis, the point loads are generalized to ring loads. At first the displacement field due to the point loads for the multi-layered soil is derived in a general form by means of the transfer matrix method. The solution for the ring loads is obtained by analytically integrating its application around the ring. The solutions of the verosity potential due to a point source and a ring one are also obtained in a similar manner.

The basic characteristics of the formulation is that the solution for the soil is represented as the sum of one without the fluid layer and added terms due to fluid motion, on the other hand the solution for the fluid is represented as the sum of one obtained under the assumption of rigid soil and added terms influenced by the movement of the soil surface.

Furthermore the obtained solutions are decomposed into the two parts: one is the static component which is known well as Mindlin's solutions etc., the other is the dynamical component without singularities which is generally indicated by the infinite integral.

For the axisymmetric problem, the static component is described by the associate legendre function. For computational purposes the legendre functions and their derivatives are written in terms of elliptic function of the first and second kinds. Therefore the singularity of the fundamental solution is explicitly took out. This means that the singular integral appeared in the boundary integral method can be efficiently calculated. While the dynamic component described by the infinite integral can be transformed into the finite one because the integrand satisfies Jordan's lemma.

Although the above mentioned matter is examined in the case of a semi-infinite homogeneous media, a similar formulation might be applicable in an arbitrary multi-layered one.

* Research Associate, Faculty of Engineering, Hiposhima University

**Associate Professor, Faculty of Engineering, Hiroshima University